Física nuclear y de partículas

Antonio Ferrer Soria

3.ª edición corregida y ampliada

PUV

Material protegido por derechos de autor

FÍSICA NUCLEAR
Y DE PARTÍCULAS

Educació. Materials 62

Antonio Ferrer Soria

FÍSICA NUCLEAR Y DE PARTÍCULAS

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Colección: Educació. Materials
Director de la colección: Guillermo Quintás Alonso

Esta publicación no puede ser reproducida, ni total ni parcialmente, ni registrada en, o transmitida por, un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, ya sea fotomecánico, fotoquímico, electrónico, por fotocopia o por cualquier otro, sin el permiso previo de la editorial.

1.ª edición: febrero 2003
2.ª edición, corregida y ampliada: diciembre 2006
3.ª edición, corregida y ampliada: febrero 2015

© El autor, 2015
© De esta edición: Universitat de València, 2015

Coordinación editorial: Maite Simon
Maquetación: el autor
Cubierta: Celso Hernández de la Figuera

ISBN: 978-84-370-9771-8

Índice

PRESENTACIÓN

PARTE I
FÍSICA NUCLEAR: ESTRUCTURA
Y MODELOS NUCLEARES

Capítulo 1. El núcleo atómico: propiedades físicas

1.1 Introducción a la física nuclear
1.2 Tamaño y distribución de carga nuclear. Medida del radio de los núcleos
1.3 Masa y abundancia de núclidos
1.4 Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas
1.5 Estabilidad nuclear. Parábola de masas
1.6 Espín, paridad, isospín y momentos nucleares
1.7 Estructura cuántica de niveles energéticos nucleares E_n
1.8 Problemas

Capítulo 2. La fuerza nuclear: el deuterón. Interacción *N–N*

2.1 El deuterón, propiedades y números cuánticos
2.2 Función de ondas del deuterón
2.3 Difusión *N-N*. Desfasajes
2.4 Potencial de Yukawa
2.5 Potencial *N-N*
2.6 Problemas

Capítulo 3. Modelos nucleares. Modelos colectivos y modelo de capas

3.1 Introducción
3.2 Modelos semiclásicos
3.3 Propiedades colectivas de los núcleos par-par
3.4 Modelo vibracional
3.5 Modelo rotacional
3.6 Propiedades de los núcleos con *A* impar
3.7 Modelos de partícula individual. Modelo de capas esférico
3.8 Modelo unificado
3.9 Problemas

PARTE II
TÉCNICAS EXPERIMENTALES
EN FÍSICA NUCLEAR

Capítulo 4. Aceleradores de partículas

4.1 Generalidades sobre aceleradores de partículas
4.2 Aceleradores de corriente continua
4.3 Aceleradores de corriente alterna
4.4 Colisionadores
4.5 Problemas

Capítulo 5. Interacción de las partículas con la materia

5.1 Introducción
5.2 El concepto de sección eficaz
5.3 Interacción de partículas cargadas con la materia
5.4 Interacción partícula-átomo
5.5 La fórmula de Bethe-Bloch
5.6 Interacción de e^+ y e^-con la materia
5.7 Interacción de fotones con la materia
5.8 Otros fenómenos: *Channeling*, Efecto Cherenkov
5.9 Problemas

Capítulo 6. Detectores de partículas

6.1 Generalidades sobre detectores de partículas
6.2 Magnitudes características de los detectores
6.3 Detectores gaseosos. Contador Geiger-Müller
6.4 Detectores de centelleo. Fotomultiplicadores
6.5 Ejemplos de espectros de fuentes radiactivas
6.6 Detectores de estado sólido
6.7 Detección de partículas neutras
6.8 Problemas

Capítulo 7. Métodos estadísticos en física nuclear y de partículas
7.1 Errores instrumentales y estadísticos
7.2 Distribuciones de probabilidad
7.3 Distribuciones uniforme, binomial, Poisson, Gauss y χ^2
7.4 Propagación de errores estadísticos
7.5 Método de máxima verosimilitud
7.6 Ajustes de curvas
7.7 Interpolaciones
7.8 Problemas

PARTE III
DESINTEGRACIONES NUCLEARES

Capítulo 8. Radiactividad y desintegración nuclear
8.1 Generalidades
8.2 Ley de desintegración radiactiva
8.3 Teoría cuántica de la desintegración radiactiva
8.4 Tipos de desintegraciones nucleares. Fuentes radiactivas más comunes
8.5 Series naturales de elementos radiactivos
8.6 Cadenas radiactivas. Ecuaciones de Bateman
8.7 Radiactividad artificial
8.8 Aplicaciones de la radiactividad
8.9 Dosimetría. Unidades. Efectos biológicos de la radiación

8.10 Sistema de limitación de dosis
8.11 Medidas de protección
8.12 Problemas

Capítulo 9. Teoría de las desintegraciones α
9.1 Propiedades generales de la desintegración α
9.2 Modelo de Gamow de la desintegración α
9.3 Espectroscopía alfa y estructura nuclear
9.4 Reglas de selección: Momento angular y paridad
9.5 Problemas

Capítulo 10. Teoría de las desintegraciones β
10.1 Introducción
10.2 Teoría de la desintegración β nuclear
10.3 Espectro β: Plot de Kurie. Medida de la masa del ν_e
10.4 Semivida comparativa y transiciones prohibidas
10.5 Experimento de Reines y Cowan
10.6 Violación de la paridad en la desintegración β
10.7 Espectroscopía β. Desintegración doble beta
10.8 Problemas

Capítulo 11. Teoría de las desintegraciones γ
11.1 Introducción
11.2 Conservación de la energía en las desintegraciones γ
11.3 Estimadores de Weisskopf. Vidas medias
11.4 Reglas de selección. Conversión interna
11.5 Espectroscopía gamma
11.6 Efecto Mössbauer
11.7 Problemas

PARTE IV
REACCIONES NUCLEARES

Capítulo 12. Reacciones nucleares

12.1 Introducción
12.2 Leyes de conservación
12.3 Clasificación de reacciones nucleares
12.4 Mecanismos de reacción
12.5 Modelo óptico
12.6 Problemas

Capítulo 13. Fisión nuclear
13.1 Fisión nuclear
13.2 Reacción de fisión controlada
13.3 Reactores de fisión
13.4 Problemas

Capítulo 14. Fusión nuclear
14.1 Introducción
14.2 Fusión y Cosmología
14.3 Fusión solar y neutrinos solares
14.4 Aplicaciones de la fusión nuclear
14.5 Reactores de fusión
14.6 Problemas

PARTE V
FÍSICA DE PARTÍCULAS

Capítulo 15. Constituyentes de la materia: introducción y generalidades
15.1 Introducción
15.2 Del e^-al Higgs. Los descubrimientos de partículas
15.3 Clasificación de partículas
15.4 Las cuatro interacciones fundamentales
15.5 El Modelo Estándar
15.6 La gran unificación
15.7 Problemas

Capítulo 16. Simetrías y leyes de conservación

16.1 Introducción
16.2 Invariancia relativista
16.3 Traslaciones y rotaciones en el espacio
16.4 El grupo SU(2). Espín e isospín
16.5 Simetrías *P, C* y *T*
16.6 La invariancia *gauge*
16.7 Leyes de conservación en las interacciones fundamentales
16.8 Problemas

Capítulo 17. Espectroscopía de hadrones

17.1 El modelo de quarks de los hadrones
17.2 Números cuánticos de los hadrones
17.3 La simetría SU(3)
17.4 Multipletes de bariones y mesones
17.5 Masas y momentos magnéticos de los hadrones
17.6 Espectroscopía de mesones pesados
17.7 Los *Quarkonia* y el potencial de QCD
17.8 El descubrimiento del último quark (el quark t)
17.9 Problemas

Capítulo 18. Interacciones débiles

18.1 Introducción
18.2 Violación de la paridad en la interacción débil
18.3 Teoría V-A de la desintegración beta
18.4 Fenomenología de las corrientes cargadas
18.5 Fenomenología de las corrientes neutras
18.6 Los bosones intermediarios W y Z
18.7 Problemas

APÉNDICES

Apéndice A. Constantes físicas
Apéndice B. Unidades en el SI. Múltiplos y submúltiplos

Apéndice C. Efemérides
Apéndice D. Tablas de partículas
Apéndice E. La ecuación de Dirac
Apéndice F. Funciones especiales
Apéndice G. Masas atómicas
Apéndice H. Tablas estadísticas
Apéndice I. Estructura electrónica de los elementos
Apéndice J. Tablas de propiedades atómicas de los elementos
Apéndice K. La tabla de Mendeleiev

ÍNDICE DE FIGURAS

BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE ALFABÉTICO

Presentación

Estas notas contienen una introducción a la física nuclear y a la física de partículas estructurada en cinco partes: la primera introduce la física nuclear y trata sobre la estructura nuclear. A continuación se aborda una parte que integra varios temas sobre metodología experimental, necesaria para comprender los avances de estas jóvenes disciplinas científicas y contiene una introducción a la física de las radiaciones y sus efectos biológicos. Sigue el estudio de las desintegraciones y las reacciones nucleares. Porúltimo, se presenta una introducción a la física de partículas. Se completa el texto con varios apéndices que contienen tablas de constantes, partículas y núcleos que pueden ser de gran interés para diversas aplicaciones prácticas.

Los temas aquí presentados correspondena los exigidosen la materia denominada *Física nuclear y de partículas,* que es una materia troncal de la licenciatura de físicas, impartida en la Universitat de València a partir del curso 1996/1997.

Tanto la física nuclear como la física de partículas son dos disciplinas o campos de la física que se han desarrollado durante el siglo XX y han compartido, entre otros, casi toda la misma instrumentación y la metodología. Para identificar los contenidos de cada uno de estos campos de la física es muy instructivo ver la tabla siguiente:

Campo de la física	Ente físico	Constituyentes	Cuanto del campo	Fuerza
Atómica	Átomo	(e^-, p)	γ	electromagnética (QED)
Nuclear	Núcleo	(p, n)	"π"	nuclear (Yukawa)
Partículas	quarks (q)	$\left\{ \begin{array}{l} qqq \text{ (bariones)} \\ q\overline{q} \text{ (mesones)} \end{array} \right\}$	gluón (8)	fuerte (QCD)
	q, leptones	$(q, \overline{q})+(\ell, \nu)$	$\gamma, Z^0, W^{\pm}$	electrodébil (GWS)

Todos los entes descritos en esta tabla, son entes de tamaño extraordinariamente pequeño. El mayor de ellos es el átomo, cuyas dimensiones son del orden de varios angström (1 Å = 10^{-10} m), mientras que los núcleos son objetos de 2 a 7 fermi (1 fm =10^{-15} m). Hoy en día se piensa que los verdaderos constituyentes de la materia son los leptones y los quarks, y son entes sin estructura (al menos son de tamaño inferior a 10^{-18} cm, que es la distancia mínima que se ha explorado hasta hoy gracias a los aceleradores de partículas de mayor energía disponible; del orden del TeV = 10^{12} eV).

El infinitamente grande (el Cosmos desde el *Big-Bang* hasta hoy) y el infinitamente pequeño (los quarks y leptones) estáníntimamente relacionados. Cosmología y Física de Partículas son necesarias y se complementan para entender el Universo. Entre el tamaño del Universo (10^{26} m) y el del protón (10^{-15} m) existen 41 órdenes de magnitud. Casualmente, el tamaño de la Tierra donde vive el hombre está casi a mitad de camino de los dos extremos.

La otra idea contenida en la tabla anterior se refiere a la de fuerzas debidas al intercambio de partículas.Ésta es una noción introducida por las teorías cuánticas de campo, y en particular a la teoría de la electrodinámica cuántica (QED), que supone que la interacción eléctrica entre dos cargas (por ejemplo, la interacción de un electrón y un protón como en el caso del átomo de hidrógeno) se debe al intercambio de fotones (cuantos del campo electromagnético) virtuales. Que el fotón sea virtual quiere decir que no es real; así, si fuese real, su energía sería E =

pc y podría interaccionar con la materia, por ejemplo sufrir efecto fotoeléctrico. La noción de partícula virtual significa que no tiene energía bien definida; de hecho es una partícula que existe brevemente, durante un inter-valo de tiempo permitido por el principio de incertidumbre $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, por lo que puede no cumplirse la conservación de la energía en el proceso de emisión o de absorción del fotón. Eso sí, la energía siempre se conserva en la reacción global.

Como pasa con los tamaños, las masas de los objetos que se estudiarán aquíson extraordinariamente pequeñas (del orden de 10^{-27} kg). Por ello las unidades utilizadas en física nuclear y de partículas deben adecuarse. En este libro se ha pretendido utilizar sistemáticamente el Sistema Internacional (SI). Sin embargo se usarán frecuentemente otras unidades. Por ejemplo, las masas se dan en múltiplos de eV/c^2. Para entender estas unidades basta con recordar la fórmula de Einstein

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

que relaciona masa, momento y energía. La masa del electrón es m_e =0,511 MeV/c^2 y la del protón m_p =938,3 MeV/c^2. Recuérdese que 1 eV = 1,6 × 10^{19} J, y que las energías suelen medirse en múltiplos del eV. En física nuclear, es habitual usar el keV (= 10^3 eV) para clasificar los niveles excitados de los núcleos. Se verá por ejemplo la unidad de masas atómica u =931,49 MeV/c^2, en la que la masa del protón es sencillamente m_p = 1,007276 u. Esta unidad se obtiene al tomar la masa del carbono-12 igual a 12u.

En física de partículas es muy frecuente encontrarse en la bibliografía con el sistema de unidades llamado *natural*, que suele utilizarse por comodidad. En este sistema, las constantes fundamentales $\hbar = c = 1$, por consiguiente, longitudes, masas y tiempos vienen dados en potencias de la energía. En todo caso, siempre se puede recuperar la unidad SI recordando los factores de conversión $\hbar c$ = 197,3 MeV · fm, así como los valores de las constantes c = 2,998 × 10^{23} fm · s^{-1} y $\hbar$ = 6,582 × 10^{-22} MeV · s.

En 1997, año en el que comencé a trabajar dando forma a este libro sobre física nuclear y de partículas, se celebró el centenario del descubrimiento del electrón por J. J. Thomson, galardonado con el premio Nobel de Física en 1906. El electrón es la base de la física atómica; con él se inicia la elaboración de la lista de los constituyentes elementales de la materia. Ese acontecimiento coincidió con el 50 aniversario del descubrimien to del pión (por el grupo de la Universidad de Bristol, C. M. G. Lattes, G. Occhialini y C. F. Powell. A este último se le concedióel Nobel de Física en 1950) y el del descubrimiento de las partículas extrañas (entre otros, P. M. Blackett de la Universidad de Manchester, quien recibió el premio Nobel en 1948, por sus estudios de los rayos cósmicos). A partir de aquí, el extraordinario desarrollo de los aceleradores de partículas y la continua mejora de los detectores de partículas, que se han beneficiado del progreso de la electrónica y de las computadoras, han permitido un entendimiento de la materia muchísimo más profundo que el que se tenía en los albores de la aparición de la mecánica cuántica. Así, en 2012 se consiguió, por fin, descubrir el *bosón de Higgs* en los experimentos ATLAS y CMS instalados en el colisionador LHC del CERN.

Con este libro, se pretende que el alumno, o el lector interesado, pueda recorrer las enormes distancias que separan los átomos de los núcleos, hasta llegar a los constituyentes más elementales de la materia, los quarks y los leptones. No se sabe cuánto tiempo transcurrirá hasta que probablemente se descubra que quarks y leptones no son los últimos y más elementales ladrillos que constituyen la materia que nos rodea.

Quisiera terminar esta presentación, agradeciendo el apoyo de los compañeros del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universitat de València para la realización de este texto; en particular, a los profesores Dr. Eduardo Ros y Dr. Juan Antonio Valls por la recopilación de problemas propuestos al final de cada tema así como sus comentarios sobre el texto. Por último, agradezco a Publicacions de la Universitat de València su interés por la edición de este libro y por haberme permitido las correcciones inevitables que han

mejorado esta publicación y han dado lugar a la tercera edición del mismo.

Antonio Ferrer Soria
Valencia, enero de 2015

Parte I

Física nuclear: estructura y modelos nucleares

1. El núcleo atómico: propiedades físicas

1.1 Introducción a la física nuclear

La física nuclear es el campo científico que estudia los núcleos atómicos, sus propiedades y las fuerzas que actúan entre sus constituyentes: protones y neutrones, denominados genéricamente nucleones. Como los núcleos son entes físicos de dimensiones extraordinariamente pequeñas (entre 2 y 10 fm), su estudio debe abordarse utilizando los métodos y prescripciones de la mecánica cuántica, aunque también se recurre, circunstancialmente, a conceptos macroscópicos, como en el caso del modelo de la gota líquida, especialmente útil para estudiar los núcleos con un gran número de nucleones.

Hoy es bien conocido que los nucleones están constituidos por entes más fundamentales llamados quarks, que son entes puntuales, sin estructura aparente. Sin embargo, para el estudio de las propiedades de los núcleos no es necesario recurrir a la estructura de quarks de los nucleones. La mayoría de las propiedades de los núcleos pueden entenderse a partir de las propiedades del protón y neutrón interaccionando a través de un campo de fuerzas.

Los núcleos son sistemas complejos, formados por un gran número de constituyentes entre los que actúan tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza; la fuerza nuclear (también llamada fuerza fuerte por ser la más intensa de las conocidas), la electromagnética

y la débil, ya que la gravitatoria es totalmente insignificante y, entre partículas, se suele despreciar. A pesar del gran desarrollo de la física nuclear en el siglo XX, todavía no se dispone de una teoría aceptable que describa las propiedades de los núcleos; se tiene una visión fenomenológica de todos los fenómenos estudiados. No es posible describir la física nuclear de manera coherente, a partir de primeros principios, como en la mecánica clásica o el electromagnetismo. Se suele recurrir a modelos nucleares, que a primera vista parecen incompatibles.

A lo largo de los temas aquí recogidos, es indispensable adelantar conceptos que posteriormente son ampliados y aclarados. Por eso, el estudio de la física nuclear debe realizarse de forma iterativa.

A modo de resumen, conviene tener presente que la física nuclear tiene tres objetivos:

• Escrutar las partículas y sus interacciones; campo muy activo que ha dado origen a la física de partículas,

• Clasificar e interpretar las propiedades de los núcleos y

• Producir avances tecnológicos que beneficien a la sociedad.

En este Capítulo se describirá el estudio de las propiedades globales de los núcleos, la medida de las masas y los radios nucleares, el concepto de estabilidad nuclear y se presentarán las predicciones de las masas nucleares a partir del modelo nuclear de la gota líquida.

1.1.1 El núcleo atómico

Los núcleos están compuestos por A nucleones (también llamado número másico), siendo Z el número de protones y $N = A - Z$ el de neutrones. Existen núcleos con valores de A que van desde 1 hasta $A \approx 260$. Se trata pues de entes constituidos por un gran número de nucleones; por eso son sistemas extensos y muy complicados. Suelen denominarse nucleidos y para distinguirlos se emplea la notación ${}^{A}_{Z}X$. Ejemplos: ${}^{1}_{1}\mathrm{H}, {}^{2}_{1}\mathrm{H}, {}^{3}_{1}\mathrm{H}, {}^{235}_{92}\mathrm{U}, {}^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Existen 274 nucleidos naturales (todos ellos estables y presentes en la

Tierra) y se han estudiado más de 2500 núcleos inestables (llamados también artificiales). Los núcleos con el mismo número atómico Z se denominan *isótopos*, con el mismo N, *isótonos* y con el mismo A, *isóbaros*. Un mismo núcleo puede tener estados *isómeros*, que son estados excitados de vida media larga. Curiosamente los únicos isótopos que han sido bautizados con un nombre diferente al del elemento químico asociado son los del hidrógeno, llamados deuterio ($^{2}_{1}$H) y tritio ($^{3}_{1}$H). Los núcleos respectivos se denominan protón (p), deuterón (d) y tritón (t). Al núcleo del átomo de helio ($^{4}_{2}$He) se le identifica como la partícula alfa (α).

Más adelante se justificará que para núcleos con A impar suele haber un sólo núcleo estable, mientras que en el caso de los núcleos con A par suelen haber al menos dos isótopos estables (véase la tabla de núcleos en el Apéndice G). Curiosamente sólo existen dos elementos (con $Z < 83$) en la tabla periódica que no tienen ningún isótopo estable, el tecnecio: $_{43}$Tc yel prometio: $_{61}$Pm.

La masa, vida media y carga eléctrica de los nucleones libres toman los siguientes valores:

$$m_p = 1,67262 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 938,272\ \text{MeV/c}^2 \qquad \tau_p > 5 \times 10^{32}\ \text{años} \qquad q_p = +e$$
$$m_n = 1,67492 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 939,565\ \text{MeV/c}^2 \qquad \tau_n = 885.7 \pm 0.8\ \text{s} \qquad q_n = 0$$

El neutrón, ligeramente más masivo que el protón, es inestable cuando se encuentra en estado libre. Por el contrario, todavía no se ha detectado un caso de desintegración del protón, por lo que su vida media (τ_p) suele darse como un límite inferior. Los nucleones tienen masas $\approx 1840 \times m_e$, con lo que los núcleos contienen toda la masa del átomo. La unidad de carga eléctrica utilizada es e =1, 6 × 10^{-19} C, valor absoluto de la carga del electrón. Los nucleones son también fermiones (es decir, tienen espín s =1/2). Su momento dipolar magnético es:

$$\mu_p = 2,792847351(28)\,\mu_N \quad \text{y} \quad \mu_n = -1,9130427(5)\,\mu_N$$

siendo $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,152 \times 10^{-14}$ MeV/T, el magnetón nuclear. Se observa la elevada precisión de estas medidas. Las cifras entre paréntesis representan el error (equivalente a una desviación estándar) sobre las últimas cifras de la magnitud, o sea es equivalente escribir:

$$\mu_n = -1,9130427(5)\,\mu_N = -1,9130427 \pm 0,0000005\,\mu_N$$

El isospín de los nucleones es $t = 1/2$. Por convenio, el protón es el estado con tercera componente $t_3(p) = +1/2$ y el neutrón $t_3(n) = -1/2$. La importancia del isospín quedará clara cuando se estudie la independencia de carga de la interacción fuerte; o sea, en el estudio de la difusión *N–N*, en la sección 2.3.

La existencia y estabilidad de los núcleos implica la existencia de una fuerza nuclear o fuerte, atractiva, que cohesiona todos los nucleones, de mayor intensidad que la repulsión culombiana y de corto alcance (≈ 1 fm).

Los núcleos se consideran sistemas cuánticos con propiedades estáticas y dinámicas bien definidas:

$$M, R, Z, J^P, T, \mu, Q, \tau, \sigma, E_n$$

osea, masa, radio, número atómico Z (que da su carga eléctrica $q = Ze$), el espín J, la paridad P y el isospín T, los momentos multipolares electromagnéticos, el dipolar magnético μ y el cuadrupolar eléctrico Q. Entre los momentos multipolares electromagnéticos no aparece, por ejemplo, el momento dipolar eléctrico, que es nulo, ya que no puede haber asimetría de cargas arriba–abajo.

Los núcleos tienen también propiedades dinámicas; por ejemplo, si son inestables y se desintegran, tienen una vida media τ. Otra propiedad muy característica de los núcleos es que poseen niveles energéticos discretos E_n bien definidos.

En condiciones normales un núcleo se encontraráen el estado fundamental, que es el estado de mínima energía (igual a la masa del

núcleo); es el más accesible y por lo tanto el más fácil de estudiar. Suele ser el estado mejor conocido de dicho nucleido. Los niveles de mayor energía que el estado fundamental, E_n, están cuantizados; son accesibles a través de reacciones nucleares o como consecuencia de la desintegración de núcleos vecinos. La magnitud física que caracteriza las reacciones nucleares es la sección eficaz,[1] que representa la probabilidad de reacción. La magnitud que caracteriza las desintegraciones nucleares es la constante de desintegración λ (que da la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo) o su inversa la vida media $\tau = 1/\lambda$, aunque en física nuclear se suele utilizar el semiperiodo $t_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$.

Antes de iniciar el estudio de las propiedades nucleares es interesante recordar dos históricos experimentos, que marcan el origen de la física nuclear:

- el experimento de Rutherford (1911), que estudióla colisión elástica de partículas α con el oro: $^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{197}_{79}\mathrm{Au} \rightarrow {}^{197}_{79}\mathrm{Au} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, permitiendo el descubrimiento del núcleo.

- el experimento de Chadwick (1932), basado en el estudio de la reacción nuclear, también con partículas α: $^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{n}$, que condujo al descubrimiento del neutrón.

En ambas reacciones puede comprobarse que el número de nucleones A se conserva. Esta es una propiedad fundamental de las colisiones entre núcleos. Además, se cumple que el número de protones Z y de neutrones $N = A - Z$ es el mismo, antes y después de la reacción. Esto último es una consecuencia de la conservación de la carga eléctrica en las reacciones nucleares.

El experimento de Rutherford

Se trata de la colisión elástica ${}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{197}_{79}\mathrm{Au}$, debida a la interacción eléctrica entre la carga de la partícula α (Z_1e, con $Z_1 = 2$) y el núcleo de oro (Z_2e, con $Z_2 = 79$). Los proyectiles (partículas α), con energía cinética $T_\alpha = 7{,}68$ MeV, provenían de una fuente radiactiva de *Ra*.

La sección eficaz diferencial de Rutherford informa sobre la probabilidad de colisión por elemento de ángulo sólido $d\Omega$ (véase figura 1.1).

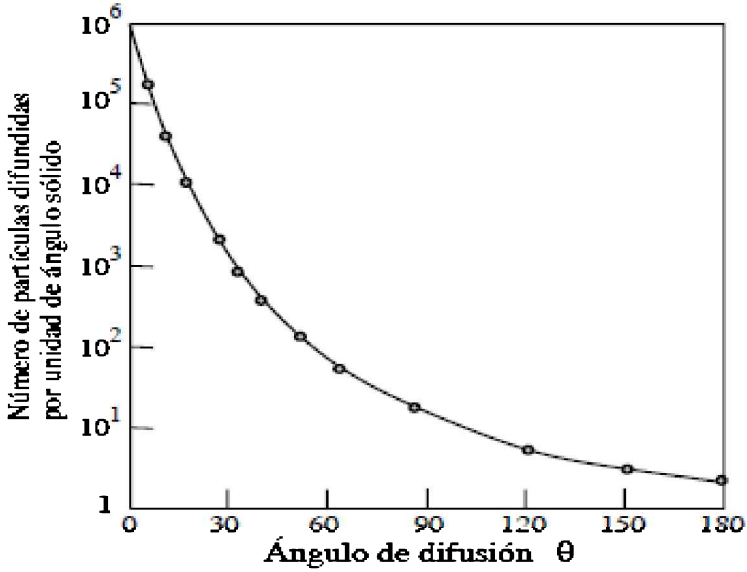


Figura 1.1: La sección eficaz diferencial de Rutherford.

En el caso no relativista y suponiendo espín 0 para proyectil y blanco, su valor es:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4T_\alpha \sin^2(\frac{\theta}{2})}\right)^2 = \frac{d_0^2}{16}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad (1.1)$$

siendo d_0 la distancia de máximo acercamiento al núcleo, obtenida al igualar la energía cinética con la potencial:

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Z_2e^2}{d_0} \qquad (1.2)$$

La conclusión de las medidas realizadas por los colaboradores de Rutherford, Geiger y Marsden, fue que el núcleo podía considerarse como si fuese puntual y con toda la carga eléctrica, Z_2e, concentrada en ese punto. Es por ello que el experimento llamado de Rutherford, se asocia con el descubrimiento del núcleo atómico y revolucionó la física atómica.

El experimento de Chadwick

Consistió en explicar los enigmáticos rayos del berilio, producidos en la reacción nuclear:[2]

$$^4_2\mathrm{He} + {}^9_4\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + {}^1_0\mathrm{n} \qquad (1.3)$$

Estos *rayos* eran desconocidos. Se trataba de neutrones, cuya detección es muy difícil. El método empleado en la época se basó en la colocación de parafina detrás de la lámina de berilio y detectar en un detector Geiger cercano los protones emitidos en la colisión elástica n + p → p + n que tenía lugar en la parafina (material rico en hidrógeno). Así se verificó cinemáticamente que los hipotéticos rayos eran neutrones.

Las primeras propiedades que interesa estudiar son el tamaño y el radio de los núcleos. Esta información permitirá conocer las distancias entre nucleones en un núcleo y la naturaleza de las fuerzas que actúan entre ellos.

1.2 Tamaño y distribución de carga nuclear. Medida del radio de los núcleos

La forma del núcleo es aproximadamente esférica. Cerca de la

superficie, su contorno es impreciso y la densidad va disminuyendo progresivamente. Es lo que se conoce por *corteza* nuclear. Su distribución de carga o materia será caracterizada mediante dos parámetros, el radio *R* y el parámetro ligado a la anchura de la corteza, *t*.

Los resultados experimentales realizados para medir la densidad de carga nuclear conducen a una distribución del tipo:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r - R)/t}} \qquad (1.4)$$

llamada de Fermi o de Saxon–Woods; ρ_0 es la densidad máxima de carga nuclear y el radio:

$$R = r_0 A^{1/3} \qquad (1.5)$$

con $r_0 \approx 1{,}2$ fm y $t = 0{,}55 \pm 0{,}07$ fm. El parámetro r_0 representa el *tamaño* medio del protón (núcleo del hidrógeno, $A = 1$) en un núcleo. El parámetro *t* está relacionado con el tamaño de la corteza nuclear y es prácticamente el mismo para todos los núcleos.

Como suele ser habitual, el radio *R* representa el valor de *r* para el que la densidad se reduce a la mitad del valor máximo (se cumple que $\rho(R) = \rho_0/2$). El parámetro *t*, mide el intervalo de *r* en el que la densidad pasa del 62,2 % al 37,8 %. En efecto, estos son los valores de la densidad que se obtienen al hacer $r = R \pm \frac{t}{2}$. Sin embargo, para tener una idea de la anchura de la corteza nuclear se suele tomar por convenio la anchura en la que la densidad nuclear pasa del 90 % al 10 %. Es fácil comprobar usando (1.4) que la anchura de la corteza nuclear es $4t \ln 3$ ($= 4{,}39 \times t$). La distribución de Saxon–Woods puede verse en la figura 1.2.

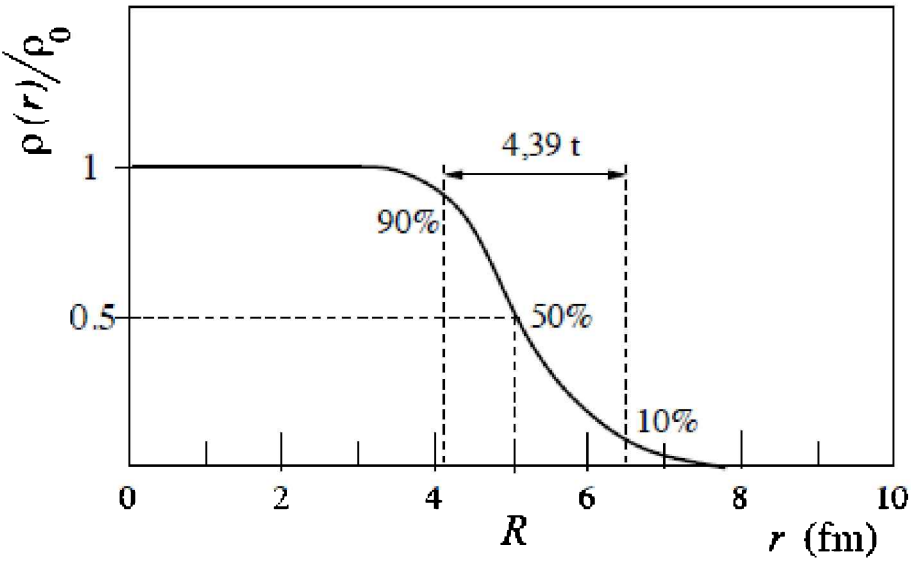


Figura 1.2: La distribución de Saxon–Woods, para R = 5 fm y t = 0,5 fm. Se observa la definición de radio nuclear, R, y de la anchura de la corteza nuclear.

Toda una serie de experimentos se utilizan para medir esta distribución;

a) Experimentos para la medida de la carga nuclear:
   - Difusión electrón-núcleo, (e + N),
   - Rayos X de isótopos,
   - ΔE en núcleos espejo.

b) Experimentos para la medida de la materia nuclear:
   - Difusión de Rutherford (las desviaciones),
   - Colisiones π-núcleo,
   - Rayos X de átomos piónicos o kaónicos.

1.2.1 Medida del radio de carga de los núcleos

Difusión elástica $e^- + N$

La fórmula de De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ relaciona la longitud de onda, λ, asociada a una partícula con cantidad de movimiento p. Por ello, deben utilizarse electrones con $p \geq 100$ MeV/c, para que puedan explorar zonas de tamaño $\lambda \leq 10$ fm. La difusión $e^- N$ es similar a la difracción de la luz por un disco de diámetro D; la posición del primer mínimo de la sección eficaz diferencial aparece en los ángulos θ solución de la ecuación similar a la que se aplica en la difracción de Fraunhofer:

$$\boxed{\sin\theta = \frac{1,22\lambda}{D}} \qquad (1.6)$$

Así, por ejemplo, a partir de resultados de experimentos de difusión con electrones llevados a cabo en el laboratorio SLAC[3] se determinó que el radio del núcleo del oxígeno vale $R(^{16}\mathrm{O}) \approx 2{,}6$ fm, y que el del carbono es $R(^{12}\mathrm{C}) \approx 2{,}3$ fm.

Factor de forma de carga nuclear

Más cuantitativamente, la densidad de carga nuclear se mide a partir del factor de forma nuclear $F(q^2)$, que se define como la transformada de Fourier de la distribución de carga $\rho ch(\vec{r})$.

La difusión de electrones por núcleos, en el supuesto en el que la longitud de onda de de Broglie es del orden del tamaño nuclear, debe tratarse relativísticamente. Además el electrón tiene espín 1/2. En el centro de masas (cdm) la interacción e^-–núcleo, considerados ambos como puntuales, obedece a la fórmula de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{\alpha\hbar c Z E}{2p^2c^2\sin^2(\theta/2)}\right)^2 \left(1 - \beta^2\sin^2(\theta/2)\right)$$

donde $\alpha \approx \frac{1}{137}$ es la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$,

adimensional. E y p la energía y momento del e^- y Z el número atómico del núcleo. La sección eficaz diferencial de Rutherford $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R$ vista en (1.1) explica la difusión culombiana no relativista entre dos cargas puntuales y es el límite de la anterior sección eficaz de Mott. Efectivamente en el límite no relativista, $\beta \to 0$, $E \to m_e c^2$ y $T = p^2/2m$ con lo que $\frac{E}{2p^2c^2} \to \frac{1}{4T}$. La ecuación de Rutherford se puede reescribir en función del momento transferido entre el electrón inicial y final, $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$, que, al tratarse de una difusión elástica ($|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$) se cumple $q^2 = 4p^2\sin^2(\theta/2)$. Se tiene, en el límite $E \to pc$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right)_R \approx \frac{4\pi(Z\alpha\hbar)^2}{q^4}$$

ya que $d\Omega = 2\pi d(\cos\theta) = \frac{\pi}{p^2}dq^2$. Sólo depende del momento transferido.

Si se supone un objeto extenso, ya no se tiene una carga puntual, sino una distribución de carga espacial $\rho_{ch}(r)$. Para describir la difusión de un electrón (puntual) con un objeto extenso se introduce el factor de forma ($F(\vec{q})$, con lo que la sección eficaz de Rutherford se modifica:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \left[F(q^2)\right]^2$$

que, en función del momento transferido:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right) = \frac{4\pi(Z\alpha\hbar)^2}{q^4}\left[F(q^2)\right]^2$$

Para entender el significado del factor de forma, recuérdese que si $\psi(\vec{r})$ es la función de ondas nuclear del estado fundamental, debidamente normalizada a 1, la densidad de carga es:

$$\rho_{ch}(r) = Ze|\psi(\vec{r})|^2 \tag{1.7}$$

siendo la normalización $Ze = 4\pi \int_0^\infty \rho_{ch}(r) r^2 dr$. La relación entre sección eficaz y amplitud de difusión se describe en la sección 5.2.2, donde se utiliza la primera aproximación de Born de la mecánica cuántica, que puede verse por ejemplo en la ecuación (5.9). De su utilización se deduce el valor del factor de forma como la transformada de Fourier de la distribución de carga:

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Ze} \int_0^\infty \rho_{ch}(\vec{r}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d\vec{r} \tag{1.8}$$

al tomar la parte radial, queda:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int_0^\infty \rho_{ch}(r) \sin(\frac{qr}{\hbar}) r dr$$

Desarrollando el sin(*qr*) se tiene:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int_0^\infty \rho_{ch}(r) \left(\frac{qr}{\hbar} - \frac{1}{3!} \left(\frac{qr}{\hbar} \right)^3 + ... \right) r dr$$

o sea:

$$F(q^2) = \left(1 - \frac{1}{6\hbar^2} q^2 \langle r^2 \rangle + ... \right) \tag{1.9}$$

con lo que puede obtenerse el radio cuadrático medio $\langle r^2 \rangle$, que a su vez puede determinar el radio *R*. Se observa que el factor de forma toma el

valor F (0) = 1, es decir, se obtiene la sección eficaz diferencial para un blanco puntual.

Para un núcleo esférico de densidad constante $\rho(r) = \rho_0$ se cumple:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^R r^2 \rho_0 dV}{\int_0^R \rho_0 dV} = \frac{\int_0^R r^2 \rho_0 (4\pi r^2 dr)}{\int_0^R \rho_0 (4\pi r^2 dr)} = \frac{3}{5} R^2$$

luego:

$$\boxed{R = 1,29\sqrt{\langle r^2 \rangle}} \qquad (1.10)$$

Ejemplos de medidas realizadas por este método son:[4]

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{(^{40}\mathrm{Ca})} = 3,448 \text{ fm} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{\langle r^2 \rangle}_{(^{206}\mathrm{Pb})} = 5,509 \text{ fm}$$

La distribución de medidas del radio nuclear, $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$, al ajustarlas en función del número másico $A^{1/3}$ da lugar a una constante para $A \geq 50$, obteniéndose:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,97(4)\ A^{1/3} \text{ fm} \qquad (1.11)$$

y se verifica que:

$$\boxed{R = r_0 A^{1/3}, \text{ con } \quad r_0 \approx 1,2 \text{ fm}} \qquad (1.12)$$

También se podría conocer la distribución de carga eléctrica nuclear, $\rho_{ch}(r)$, realizando la transformada de Fourier inversa:

$$\rho_{ch}(r) = \frac{Ze\hbar}{2\pi^2 r}\int_0^\infty F(q^2)\sin(\frac{qr}{\hbar})qdq$$

La figura 1.3, muestra el resultado experimental de las medidas de la densidad de carga, $\rho_{ch}(r)$, de varios núcleos, obtenido mediante el estudio de la difusión elástica $e^- + N$. Todas estas curvas, siguen la forma de Saxon–Woods o de Fermi, vista vista en la figura 1.2.

Este método también se emplea para medir el radio del protón. Para describir su distribución de carga, se suele utilizar una forma:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{q_0 r}{\hbar}} \qquad (1.13)$$

siendo q_0 = 0,84 GeV/c. Esta última forma es debida a que el factor de forma (eléctrico) del protón es de tipo dipolar; es decir, con la normalización $G(0) = 1$:

$$G(q^2) = \left[1 + (q/q_0)^2\right]^{-2} \qquad (1.14)$$

Utilizando el mismo desarrollo que en la expresión (1.9), se tiene:

$$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2\left[\frac{dG(q^2)}{dq^2}\right]_{q^2=0} = \frac{12\hbar^2}{q_0^2} \qquad (1.15)$$

o sea, $\langle r^2\rangle$ = (0,81 fm)^2 y utilizando (1.10), se obtiene para el radio del protón, R_p = 1,16 fm.

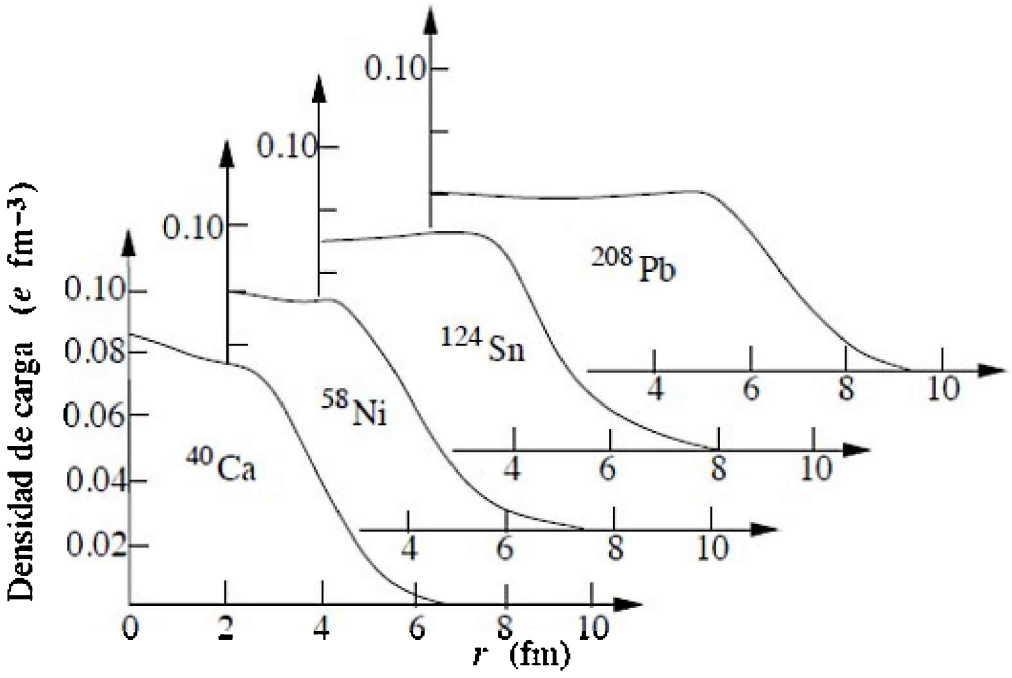


Figura 1.3: Densidad experimental de carga nuclear ($e \cdot fm^{-3}$) en función del radio nuclear, para varios núcleos.

Transiciones atómicas

Se trata de estudiar el efecto del tamaño nuclear sobre la energía de los rayos X de un elemento. Si los núcleos fuesen puntuales, todos los isótopos del mismo elemento tendrían el mismo espectro de rayos X, ya que todos los electrones sentirían la misma carga nuclear puntual (los efectos de masa son despreciables ya que interviene la masa reducida $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$ que es prácticamente $\mu = m_e$).

El núcleo es extenso y si se supone esférico de radio R, laenergía potencial de un electrón en su interior es:

$$V'(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (1.16)$$

mientras que para $r > R$ es como si fuese puntual y vale $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$.

Al calcular la diferencia en el nivel energético de un electrón debida al tamaño del núcleo:

$$\Delta E = E'_{1s,\text{extenso}} - E_{1s,\text{puntual}} = \langle V' \rangle - \langle V \rangle$$

se supondrá que las funciones de onda ψ_n son iguales en los dos casos (por eso los términos de energía cinética del hamiltoniano se cancelarán). Para calcular ΔE, basta utilizar según se enseña en mecánica cuántica, la teoría de perturbaciones en primer orden. Debe pues calcularse el valor esperado de la energía potencial $\langle |V| \rangle = \langle \psi_n | V | \psi_n \rangle$, tomando como función de ondas $\psi_n = \psi_{1s}$, la del electrón en un átomo hidrogenoide que ocupa el estado no perturbado 1*s* cuya expresión es $\psi_{1s} = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}}\, e^{-Zr/a_0}$, dando lugar a:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^4e^2}{a_0^3}\int_0^R e^{-\frac{2Zr}{a_0}}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3}\right)r^2 dr$$

o sea:

$$\Delta E = \frac{2}{5}\frac{\alpha\hbar c Z^4}{a_0^3}R^2 \qquad (1.17)$$

en donde a_0 es el radio de Bohr, $a_0 = \hbar/(m_e \alpha c) = 0{,}529$ Å. El radio de Bohr a_0 representa la distancia más probable de encontrar al electrón respecto del centro de masas del átomo de hidrógeno, o sea, el máximo de probabilidad radial. Si se aplica la fórmula a unátomo hidrogenoide, debe usarse la masa reducida μ yse habla de radio de Bohr de unátomo hidrogenoide $a_\mu = \hbar/(\mu \alpha c)$. Es una expresión que fue obtenida por primera vez por el propio N. Bohr (premio Nobel de Física en 1922): en

general el máximo de la amplitud de probabilidad radial $D_{n\ell}$ es $\bar{r} = \dfrac{n^2 a_\mu}{Z}$ donde $n\ell$ son los números cuánticos principal, n, y orbital, ℓ, que definen la función de ondas del electrón del átomo hidrogenoide.

Sin embargo, aunque estáclaro que no existen núcleos puntuales, no se tiene suficiente precisión teórica para concluir sobre el radio nuclear con la sola medida de la energía del rayo X de la capa K (el desplazamiento ΔE es del orden $\sim 10^{-4}$ de E, energía del rayo X). Por ello se miden desplazamientos isotópicos, es decir, diferencias de energías de rayos X respecto a las de un isótopo dado, como se describe a continuación.

Desplazamiento isotópico de rayos X de la capa K

Sea el rayo X debido a la transición $2p \rightarrow 1s$, que se comparará entre 2 isótopos A y A' del mismo elemento. La diferencia de energía de los rayos X de dichos isótopos será:

$$\begin{aligned} E_K(A) - E_K(A') &= (E_{2p}(A) - E_{1s}(A)) - (E_{2p}(A') - E_{1s}(A')) = \\ &= E_{1s}(A') - E_{1s}(A) \end{aligned}$$

ya que la función de ondas $\psi_{210} \sim r$, lo que implica que $\psi_{210}(0) = 0$, y sólo cabe retener la parte del estado $1s$ cuya función de ondas es la función ψ_{1s} vista más arriba.

Al calcular el desplazamiento isotópico $\delta E = E_K(A) - E_K(A') = \Delta E(A') - \Delta E(A)$ se elimina el término E_{puntual} visto más arriba, ya que es el mismo para los dos isótopos. La diferencia entre las energías del mismo rayo X será función del tamaño nuclear dado por R en la fórmula (1.17), y se predice un desplazamiento isotópico:

$$\boxed{\delta E = \frac{2}{5}\frac{\alpha\hbar c Z^4}{a_0^3} r_0^2 \left(A'^{2/3} - A^{2/3}\right)} \qquad (1.18)$$

Para comprobar esta dependencia se han medido las energías de los rayos X de la capa K de los isótopos ^{198}Hg al ^{204}Hg del mercurio. En la figura 1.4 pueden verse los resultados; tomando la energía del rayo X de la capa K del isótopo ^{198}Hg como origen se calculan las diferencias δE respecto a él, hasta el ^{204}Hg.

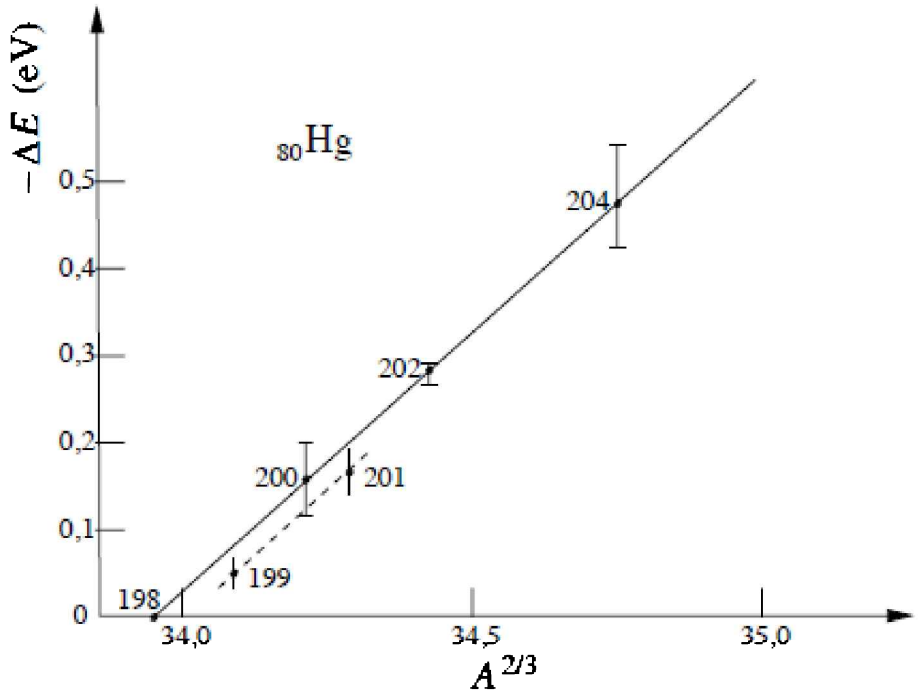


Figura 1.4: Desplazamientos de rayos X de la capa K en los isótopos del $_{80}$Hg. Se ve claramente la dependencia en $A^{2/3}$ tanto en los isótopos con A par como en los de A impar. Datos de P. L. Lee *et al.*, *Phys. Rev.*, C17 (1978) 1859.

Los rayos X tienen energías del orden de 80 keV, de forma que el desplazamiento medido es del orden de 10^{-6}. Se ve claramente la dependencia en $A^{2/3}$ tanto en los isótopos con A par como en los de A impar. Se obtienen valores de δE del orden de 0,1 a 0,5 eV alineados en una recta en función de $A^{2/3}$ y tras ajustar la fórmula (1.18) a los datos, el valor numérico del parámetro que se obtiene es r_0 = 1,2 fm. Para la medida del radio nuclear es mucho más sensible la utilización de los

llamados átomos muónicos. Un átomo muónico se caracteriza porque uno de los electrones de la corteza atómica ha sido reemplazado por un muón, una partícula (leptón) que tiene las mismas propiedades que el electrón pero con mayor masa (m_μ = 105,66 MeV/c^2) e inestable (τ_μ = 2,2 μs). Para obtener átomos muónicos, basta con bombardear el material elegido con un haz de muones, que se fabrican gracias al uso de aceleradores. La manera de detectar la existencia de un átomo muónico es, precisamente, a través de la emisión de rayos X de mayor energía que en el caso del átomo ordinario. Recuérdese que la energía del electrón en un átomo hidrogenoide es $E_n = -\frac{\mu c^2}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2}$, proporcional a la masa reducida (μc^2) que en el caso del muón es 211 veces mayor que la del electrón. Sin embargo, las órbitas del átomo muónico están más cerca del núcleo ya que el radio es ≃ 211 veces menor. En efecto, los radios medios de la trayectoria del e^- y del μ^- en el átomo hidrogenoide están relacionados:

$$\overline{r}_\mu = \overline{r}_e \frac{m_e}{m_\mu} \qquad \text{con} \qquad \overline{r}_e = \frac{n^2}{Z} a_0$$

siendo a_0 el radio de Bohr. Por ello el μ^- es una sonda más sensible que el e^- a una estructura nuclear extensa y los desplazamientos isotópicos son más fáciles de medir, ya que dan lugar tanto a energías como a desplazamientos energéticos de los rayos X mucho mayores.

Energía culombiana de núcleos espejo

Los núcleos *X* e *Y* son núcleos espejo si el número de protones de uno es igual al de neutrones del otro, $Z_X = N_Y$ y viceversa. Es como si uno de ellos fuese la imagen especular del otro. Por ejemplo: $({}^{3}_{1}\mathrm{H},\ {}^{3}_{2}\mathrm{He})$, $({}^{13}_{7}\mathrm{N},\ {}^{13}_{6}\mathrm{C})$, $({}^{39}_{20}\mathrm{Ca},\ {}^{39}_{19}\mathrm{K})$, etc. Restringiéndose a los núcleos espejo *impares*, que son los únicos que interesan, se tiene la ventaja de que el neutrón impar del uno ocupa el mismo estado cuántico que el protón

impar del otro (no habrá cambio de orbitales). La única diferencia entre los dos núcleos vendrá dada por su distribución de carga eléctrica. Se puede calcular la diferencia de la energía culombiana, suponiendo que esos núcleos son esferas cargadas: $E_c = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$. Si se toma Z como el número atómico del núcleo de mayor carga de los dos núcleos espejo, entonces el valor de A de los núcleos espejo cumple que $A = 2Z - 1$ y

$$\Delta E_c = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R}\left(Z^2 - (Z-1)^2\right) = \frac{3}{5}\frac{\alpha\hbar c}{R}A$$

con lo que queda la siguiente relación entre ΔE_c y r_0:

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{3}{5}\frac{\alpha\hbar c}{r_0}A^{2/3}} \qquad (1.19)$$

La medida de la diferencia de energía culombiana, ΔE_c, se hace a través de la medida de $T_{\max}(e^+)$ del positrón en la desintegración β^+ entre núcleos espejo. Tómese por ejemplo la desintegración:

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e \qquad (1.20)$$

con $t_{1/2}$ = 10 min y Q_{CE} = 2220,4 keV. El valor de $T_{\max}(e^+)$ en la reacción (1.20) viene dado por el valor Q de la reacción: $Q = T_{\max}(e^+)$, y Q por definición es $Q = m_{\text{inicial}} - m_{\text{final}}$, la diferencia entre lamasa total del estado inicial y la del estado final; o sea:

$$Q = (M_N - M_C - m_e)c^2$$

ya que la masa del neutrino es prácticamente nula y no interviene en este balance. Se entiende que M_N y M_C son masas nucleares, aunque a la hora de calcular Q, siempre hay que recurrir a masas atómicas que son las aparecen en las tablas. La diferencia de masas entre dos núcleos espejo

(N y C) vendrá dada por la diferencia de sus energías culombianas corregida por la diferencia de masas entre el neutrón y el protón. Con todo ello, el valor de la energía máxima del positrón emitido, T_{max} (e^+), vendrá dado por:

$$T_{max}(e^+) = \Delta E_c - (m_n - m_p)c^2 - m_e c^2 = \Delta E_c - 1{,}80 \text{ MeV}.$$

Otro método para medir ΔE_c es el de la medida del umbral energético de reacciones entre núcleos espejo (de intercambio de carga); por ejemplo:

$$^{13}_{6}\text{C}(\text{p},\text{n})^{13}_{7}\text{N} \qquad \text{o bien} \qquad ^{11}_{5}\text{B}(\text{p},\text{n})^{11}_{6}\text{C}$$

Los resultados de los experimentos citados, confirman el valor de:

$$r_0 = 1{,}22 \text{ fm}$$

1.2.2 Distribución de materia (masa) nuclear

Para sondar la materia nuclear es necesario utilizar proyectiles sensibles a la interacción fuerte. El método permite detectar no sólo protones (con carga) sino también neutrones, ya que estos últimos sólo tienen interacción fuerte. Se pueden utilizar los siguientes tipos de experimento:

a) Colisiones α + núcleo. Midiendo por ejemplo la probabilidad de difusión, a un ángulo fijado, en función de la energía de la partícula α, se llega a un valor a partir del cual se vence la repulsión culombiana; los dos núcleos entran en contacto y la fuerza nuclear entra en acción. A partir de entonces ya no se cumple la ley de Rutherford. El valor de la energía cinética de la partícula α, T_α, para el que se rompe la ley de Rutherford, está relacionado con el R nuclear. Véase la figura 1.5, donde se muestra

que la ley se rompe a partir de T_α = 27 MeV en la colisión $\alpha + Pb$.

b) Rayos X en átomos π^- o K^-mésicos. En este caso, se trata de medir rayos X de átomos en los que un electrón ha sido sustituido por un pión o un kaón, partículas que tienen interacción fuerte con el núcleo, a diferencia de losátomos muónicos, en los que el muón sólo interacciona eléctricamente.

c) Absorción de neutrones. La sección eficaz de absorción puede escribirse:

$$\sigma_{abs} = \pi\,(R + \lambda\!\!\!^{-})^2$$

siendo $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$, la llamada longitud de onda reducida de De Broglie del neutrón, habiéndose utilizado $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/(2\pi)$ y $\hbar = h/(2\pi)$ como es habitual; p es el momento del neutrón y R el radio de masa del blanco nuclear.

d) Difusión $\pi + N$. Estas reacciones son sensibles a la distribución de neutrones en los núcleos. En efecto, la invariancia de isospín conduce a:

$$\boxed{\frac{\sigma(\pi^+\mathrm{p})}{\sigma(\pi^+\mathrm{n})} \sim \frac{\sigma(\pi^-\mathrm{n})}{\sigma(\pi^-\mathrm{p})} \sim 9} \qquad (1.21)$$

ya que π^+ p y π^- n son reacciones puras de isospín T = 3/2, y se supone que la amplitud de isospín T = 1/2 es f_T = 1/2 ~ 0. La relación anterior se obtiene para las secciones eficaces elásticas si se trabaja a energías cercanas a la producción de la resonancia $\Delta\,\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, (1232), debido al valor de los coeficientes de Clebsch–Gordan (el estudio del isospín se amplía en la sección 16.4 y hay tablas de Clebsch–Gordan en el Apéndice F.8).

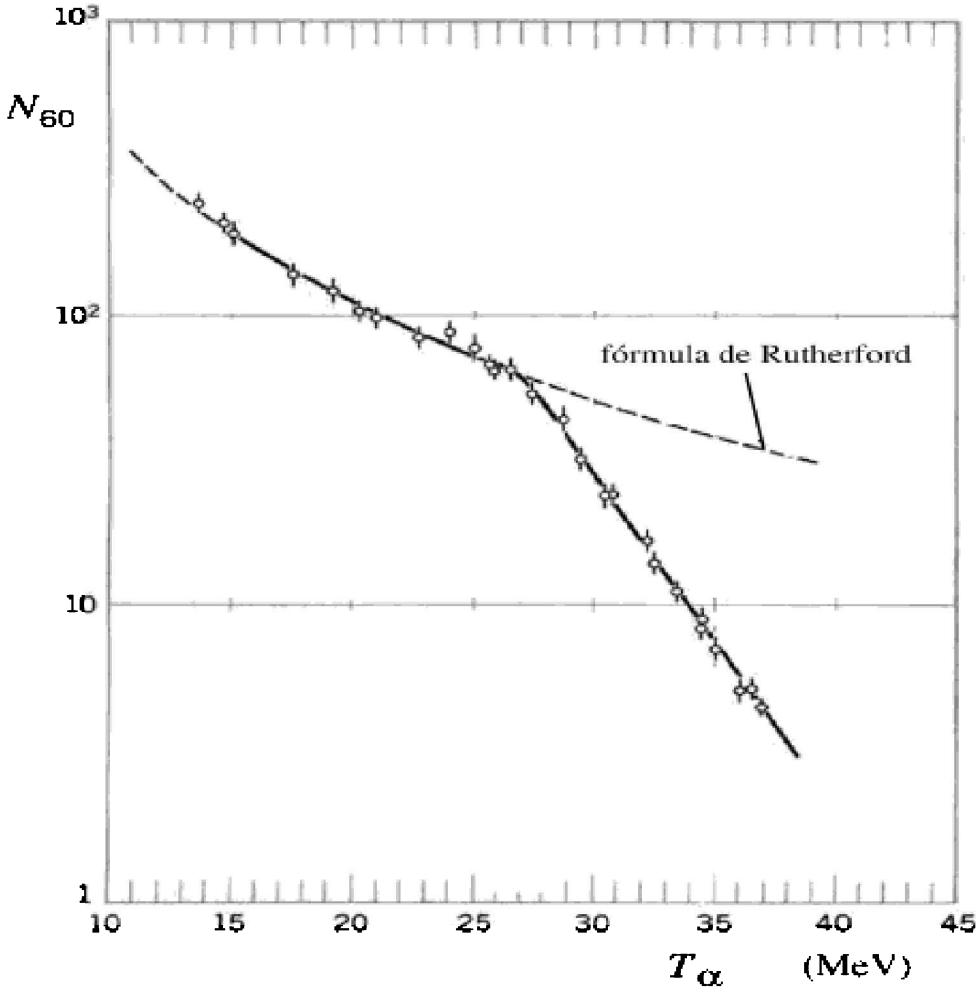


Figura 1.5: La curva muestra los resultados de la medida de la intensidad de partículas α difundidas a 60º, N_{60}, en unidades arbitrarias, en la colisión α+ Pb, en función de la energía cinética T_α. La energía a partir de la cual se desvía de la curva de Rutherford, está relacionada con el radio nuclear. Datos de R. M. Eisberg and C. E. Porter, *Rev. Mod. Phys*, 33 (1961) 190.

De los experimentos antes descritos, se obtienen radios nucleares y formas nucleares que son muy similares a los obtenidos en el estudio de la carga nuclear. Los protones y neutrones se entremezclan, independientemente del número *A*.

CONCLUSIONES SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA Y MATERIA NUCLEAR

El radio de los núcleos varía como $R = r_0 A^{1/3}$, siendo $r_0 \approx 1{,}2$ fm. La distribución de carga $\rho_{ch}(r)$ sigue la forma de Fermi o de Saxon–Woods vista en (1.4). La densidad nucleónica es constante y vale $n_A = A/(\frac{4}{3}\pi R^3) = 0{,}14 \times 10^{45}$ nucleones/m^3; la densidad másica de los núcleos es $\rho_M \approx 2{,}3 \times 10^{17}$ kg/m^3, mientras que la densidad de carga es $\rho_0 \approx (Z/A)\rho_M$. Con estos datos, se verifica que el volumen nuclear, es proporcional al número de nucleones $V \approx V_0 A$ siendo $V_0 = 7{,}2$ fm^3.

Estas conclusiones tienen implicaciones directas sobre los modelos nucleares, que se estudiarán más adelante, pues éstos deberán explicar las magnitudes nucleares obtenidas.

1.3 Masa y abundancia de núclidos

Experimentalmente es mucho más fácil medir masas de átomos que de núcleos. De hecho lo que suele medirse es la masa deátomos ionizados, a los que les falta algún electrón, lo que facilita su análisis con campos eléctricos y magnéticos. Por contra, es muy difícil medir masas de núcleos (a menos que sean muy ligeros), puesto que para aislarlos habría que ionizar los átomos completamente. Por ello en física nuclear es frecuente que se hable de masas atómicas. De hecho es lo que se suele encontrar en las tablas nucleares.

1.3.1 Unidad de masa atómica

Desde 1961 la unidad de masa atómica “u”, también representada a veces por las iniciales “uma” se define como la masa media de un nucleón del ^{12}C; es decir, $\frac{\mathcal{M}(^{12}\mathrm{C})}{12}$, siendo $M(^{12}\mathrm{C})$ la masa de un átomo

de ^{12}C. Para conocer el equivalente en kg, hay que tener en cuenta cuál es el número de átomos en un mol, con lo que:

$$12\,\mathcal{N}_A \cdot u = 0,012\,\mathrm{kg} \Longrightarrow u = 1,66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$$

lo que permite calcular la energía equivalente $E_u = u \cdot c^2 = 931,494$ MeV, o también decir que la unidad de masa atómica vale:

$$\boxed{u = 931,494\,\mathrm{MeV/c^2}} \tag{1.22}$$

1.3.2 Medida de masas de núcleos

La relación entre la masa atómica M_a y la masa del núcleo M_n es:

$$M_n(^A_Z X) = \mathcal{M}_a(^A_Z X) - Z m_e + \sum_{i=1}^{Z} B_i/c^2 \tag{1.23}$$

donde B_i son las energías de ligadura de los electrones, despreciables en la anterior expresión (sus valores se encuentran entre 10 eV y 100 keV). Se conoce una estimación empírica del término de energía de ligadura de los electrones:

$$\sum_{i=1}^{Z} B_i = 14,33 \times Z^{2,39}\,\mathrm{eV} \tag{1.24}$$

Hay que insistir de nuevo en el hecho de que en las tablas de propiedades de los núcleos siempre aparecen las masas atómicas.

Es más conveniente realizar cálculos con el llamado *defecto de masa*, que se define como:

$$\Delta = \mathcal{M}_a(Z,N) - A \cdot \mathrm{u} \tag{1.25}$$

en donde M_a es la masa atómica. Recuérdese que $A = N + Z$ es un número adimensional, por lo que en el cálculo de Δ aparece multiplicado por u. Al final del libro puede consultarse la tabla de defectos de masa (en keV), actualizada, en el apéndice G.

Espectroscopía de masas

El instrumento utilizado para medir masas atómicas recibe el nombre de espectroscopio (véase la figura 1.6).

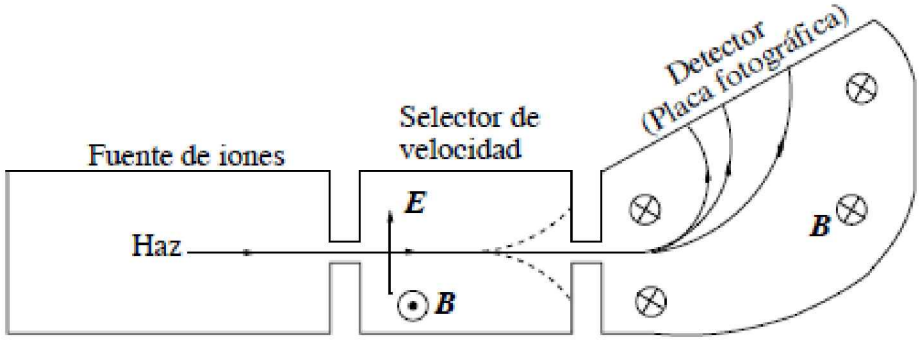


Figura 1.6: Esquema de un espectroscopio para la medida de masas atómicas.

Éste consiste en un recinto en el que normalmente se ha hecho el vacío y en donde se aplica un campo eléctrico $\mathcal{E}$ y un campo magnético B, que pueden variarse. Si se mantienen los dos campos perpendiculares entre sí, se puede realizar una selección de velocidades de iones al igualar las fuerzas eléctrica $F_e = qE$ y magnética $F_m = qvB$. A la salida del espectroscopio se mantiene únicamente el campo magnético con lo que al cumplirse $v = E/B$, se puede medir la masa a partir de la medida del radio de curvatura, ρ de la trayectoria en el campo magnético B; o sea, como $mv = qB\rho$,

$$\boxed{m = \frac{q\rho B^2}{\mathcal{E}}} \qquad (1.26)$$

Las masas atómicas se determinan con precisiones del orden de una parte en un millón ($1 \div 10^6$). Para ilustrarlo se describen a continuación los métodos más frecuentes. Primero se describe el método pionero utilizado por Thomson y se completa con métodos más actuales, por ejemplo el del doblete de masas cuya característica más destacada es que se consigue una gran precisión en la medida de masas.

La parábola de Thomson

El método utilizado por Thomson para la medida de *e/m*, se conoce como el método de la parábola de Thomson. Fue básico, a principios del siglo XX, para la determinación de masas. Este método es el que le sirvióa Francis W. Aston en 1920 para establecer por primera vez los isótopos de un mismo núcleo (^{20}Ne, ^{21}Ne y ^{22}Ne) y su abundancia relativa, descubrimiento que fue premiado con el Nobel de Química en 1922. En efecto, sea un haz de electrones que atraviesa un campo eléctrico y magnético cuya dirección sea la del eje *y* de la figura 1.7. El campo eléctrico lo crea un condensador de longitud ℓ. La trayectoria que sigue el electrón en el campo *E* se deduce de

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$$

o sea $\ddot{y} = \frac{e}{m} \cdot \mathcal{E}$ que tiene por solución

$$y = \frac{1}{2}\frac{e\mathcal{E}}{m}t^2 = \frac{e\mathcal{E}}{2m}\frac{\ell^2}{v^2}$$

Después de atravesar el campo eléctrico, entra en el campo magnético, actuando la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ a lo largo de un recorrido de igual longitud que el campo eléctrico, ℓ. Si se trata de un electrón se cumplirá que $ma_c = evB$, y la deflexión en el campo magnético vendrá dada por

$$x = \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{c\mathcal{B}\ell^2}{2mv}$$

de forma que la órbita descrita por las partículas será una parábola

$$\boxed{y = \frac{2\mathcal{E}m}{\ell^2 \mathcal{B}^2 e} x^2} \qquad (1.27)$$

independiente de la velocidad de los iones. Según la parábola de Thomson, descrita por la expresión (1.27), la deflexión eléctrica $d_{ele} = y$ (producida por el campo E) y la deflexión magnética, $d_{mag} = x$, están relacionadas y permiten determinar el cociente e/m. Los iones no deflectados (caso de que $E = B = 0$) incidirán en el centro de coordenadas; por el contrario, con campos no nulos, se distribuirán a lo largo de la curva dependiendo de su velocidad.

En el caso de la espectroscopía de masas nuclear, la intensidad de las parábolas informa sobre la abundancia relativa de los isótopos.

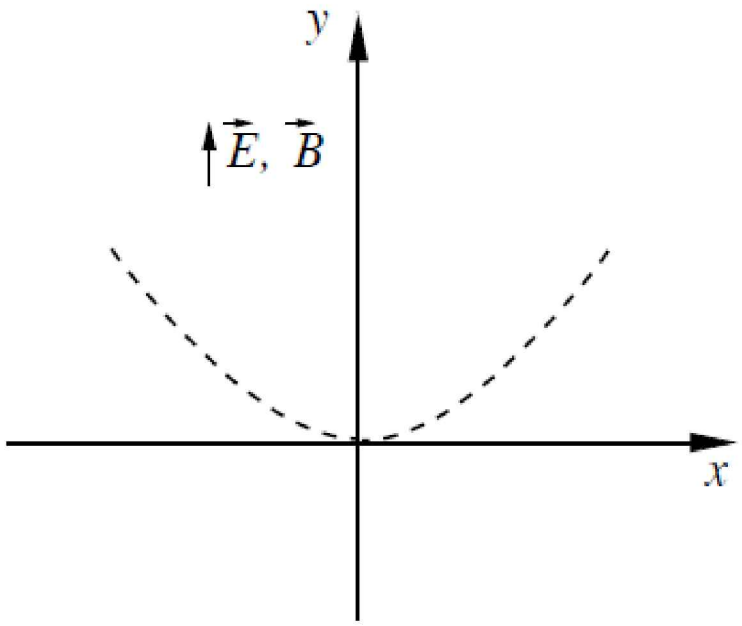


Figura 1.7: La parábola de Thomson. Con los campos eléctrico E y

magnético B tal y como se representan en la figura, un haz de electrones que atraviese el dispositivo según el eje perpendicular a la figura, al incidir en una pantalla, describe la curva a trazos.

Método del doblete de masas

Este método se basa en la medida de la diferencia de masa entre un núcleo de masa conocida y la del núcleo cuya masa, desconocida, se desea determinar. De hecho se suelen utilizar elementos compuestos. Así por ejemplo, supóngase que se desea determinar la masa del hidrógeno, partiendo del hecho que el carbono es la referencia. Se puede entonces medir diferencias de masas de compuestos (ionizados) con el mismo número de nucleones; por ejemplo la del nonano (C_9 H_{20}), un hidrocarburo alcano o parafina y la del naftaleno (C_{10} H_8), que es un sólido cristalino de color blanco; conocido como alcanfor de alquitrán. Para maximizar la resolución del espectroscopio, se ajusta a la masa aproximada de los dos compuestos (en este caso A = 128). El resultado de la medida experimental es:

$$\delta = 0{,}09390032(12)\text{u}$$

entonces dado que la diferencia entre las masas de los componentes se puede escribir:

$$\delta = M(C_9\,H_{20}) - M(C_{10}\,H_8) = 12M(^1\text{H}) - M(^{12}\text{C})$$

se llega a:

$$\mathcal{M}(^1\text{H}) = \frac{\mathcal{M}(^{12}\text{C})}{12} + \frac{\delta}{12} = 1{,}00782503(1)\,\text{u}$$

es decir, a partir del núcleo de referencia ^{12}C, que sirve para definir la unidad de masa masa atómica, se puede medir la masa del hidrógeno.

Otro ejemplo es el de la medida de la masa del nitrógeno. Para ello puede medirse la diferencia de masas entre el etileno (C_2 H_4) y el propio

nitrógeno, N_2, losdoscon $A = 28$, llegándose a:

$$M(^{14}\text{N}) = 14{,}00307396(2)\ \text{u}$$

Es instructivo verificar que este valor coincide con el de la tabla de defectos de masas atómicas del apéndice G. Se tiene $\Delta(^{14}\text{N}) = M(^{14}\text{N}) - 14u = 2863$ keV, es decir $M(^{14}\text{N}) = 14{,}003073$ u.

Medida de masas a través de reacciones nucleares

Sea la reacción $a + A \rightarrow b + B$. Elvalor Q de la reacción mide la energía disponible en principio en la reacción. Se define como la diferencia de masas entre el estado inicial y el final $Q = (M_{\text{inicial}} - M_{\text{final}})c^2$ es decir:

$$Q = (M_a + M_A - M_b - M_B)c^2 = T_b + T_B - T_a - T_A \qquad (1.28)$$

que es igual, por conservación de la energía, a la diferencia de las energías cinéticas entre el estado final y el inicial. Generalmente el blanco A estáenreposopor lo que en la anterior ecuación, $T_A = 0$. Si $Q > 0$, la reacción será exotérmica, pero si $Q < 0$ la reacción es endotérmica y no podrá tener lugar a menos que se supere el umbral; es decir que el proyectil tenga una energía cinética superior a un valor umbral que depende de Q.

Si θ es el ángulo de emisión de b (véase figura 1.8), al eliminar T_B (utilizando las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento $\vec{P}$), se cumple:

$$\boxed{Q = T_b(1 + M_b/M_B) - T_a(1 - M_a/M_B) - \frac{2}{M_B}\sqrt{T_a T_b M_a M_b}\cos(\theta)} \qquad (1.29)$$

de forma que, conocidos M_a, M_b y M_B, se puede determinar Q y por consiguiente M_A.

Este método es imprescindible para medir la masa de núclidos

inestables. Un ejemplo es el ^{12}N, cuyo semiperiodo es $t_{1/2}$ = 0,01 s. Puede producirse en la reacción p + ^{14}N → ^{3}H + ^{12}N. Conocido el valorde Q = −22,135 ± 0,001 MeV, y conocidas las otras masas, incluida la del tritio $M(^{3}\mathrm{H})$ = 3,016049 u, se obtiene:

$$M(^{12}\mathrm{N}) = M(^{1}\mathrm{H}) + M(^{14}\mathrm{N}) - M(^{3}\mathrm{H}) - Q/c^2 = 12{,}018613(1)\ \mathrm{u}$$

Medida de la masa del neutrón

Un caso interesante es la medida de la masa del neutrón. Al ser una partícula neutra, no puede utilizarse un espectrómetro de masas. Las dos técnicas siguientes utilizan la conservación de la energía en las reacciones nucleares:

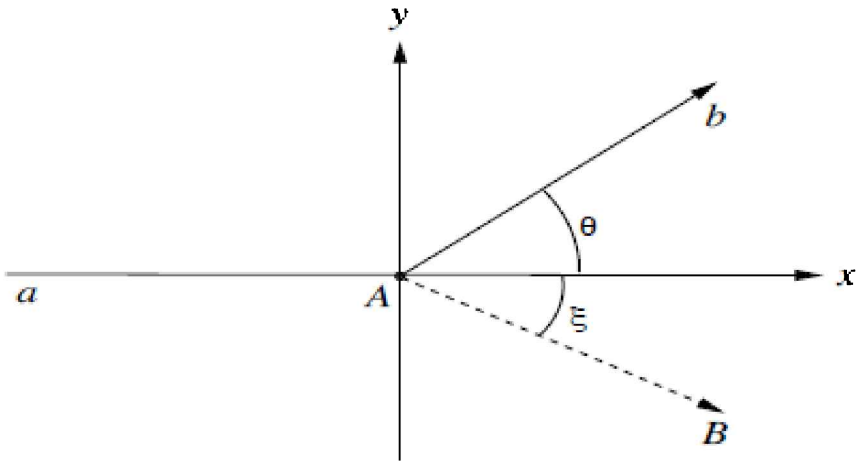


Figura 1.8: Reacción nuclear $a + A \rightarrow b + B$ (por ejemplo p + ^{14}N → ^{3}H + ^{12}N) en el sistema laboratorio.

- Captura neutrónica del protón: $^{1}_{1}\mathrm{H}(\mathrm{n},\gamma)^{2}_{1}\mathrm{H}$, reacción que también se utiliza para medir la energía de ligadura del deuterón.[5] Estos experimentos se suelen realizar en instalaciones que cuentan con fuentes de neutrones, como es el caso del laboratorio ILL de Grenoble. La conservación de la energía se expresa: $E_{\mathrm{n}} + \mathcal{M}(^{1}_{1}\mathrm{H})c^2 = T(^{2}_{1}\mathrm{H}) + \mathcal{M}(^{2}_{1}\mathrm{H})c^2 + E_{\gamma}$.

- Transmutación de $^{14}_{7}$N en $^{14}_{6}$C con n térmicos: n + $^{14}_{7}$N → p + $^{14}_{6}$C. La energía media de los n térmicos es T_n = 0,025 eV. Se mide T_p = 0,585 MeV, se determina el cociente $T_{14C}/T_p = m_p/M(^{14}\text{C})$ lo que da $M_C - M_N$ = 0,156 MeV, obteniéndose finalmente $\Delta m = m_n - M(^{1}_{1}\text{H})$ = 0,782 MeV, que por cierto, permitió medir por primera vez la masa del neutrino en la desintegración beta del neutrón, encontrándose que la masa del neutrino es compatible con 0.

Hoy se sabe que la masa del neutrón vale m_n = 1,0086649156(6) u.

1.3.3 Abundancia de núcleos

La abundancia de cada isótopo sobre la Tierra está directamente ligada a la nucleosíntesis (la frecuencia con la que cada nucleido fue originalmente producido) y a la estabilidad nuclear (la probabilidad de desintegración de cada nucleido). En la figura 1.9 puede verse la abundancia de los elementos en función de su número másico *A*.

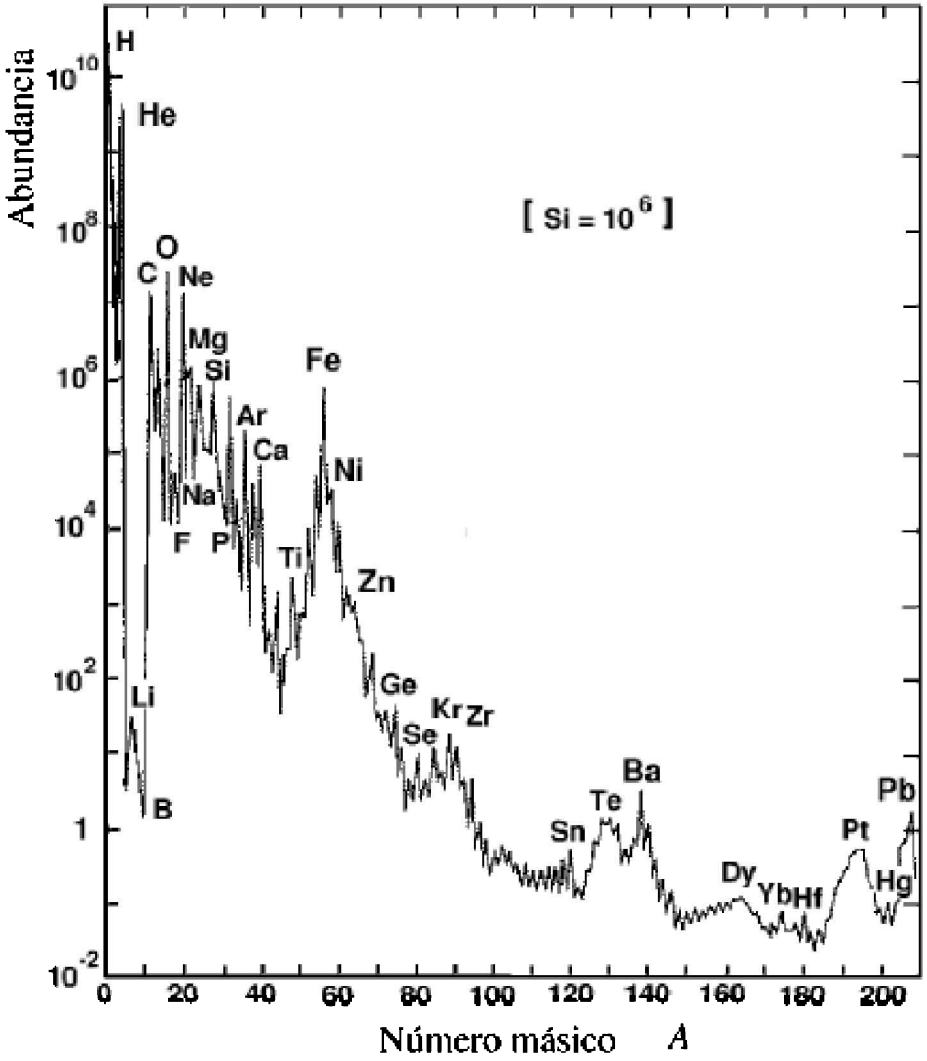


Figura 1.9: Abundancia de los elementos en la Tierra y en el sistema solar. Se ha tomado como referencia la abundancia del silicio igual a 10^6. La abundancia se ha medido en meteoritos por espectroscopía de masas.

Los elementos naturales aparecen cada uno con su abundancia isotópica correspondiente. La proporción de cada isótopo en un elemento dado se determina mediante medidas espectroscópicas; por ejemplo, la abundancia relativa de los seis isótopos estables del kripton ($_{36}$Kr) es, en %:

$A=$	78	80	82	83	84	86
%	0,356	2,27	11,6	11,5	57,0	17,3

con lo que la masa que aparece en la tabla periódica de los elementos (véase dicha tabla en el apéndice K) es $M(Kr)$ = 83, 8 u, debe de entenderse que se trata del valor medio de las masas de cada uno de los isótopos ponderado por su abundancia respectiva. Para consultar los valores de las masas de cada uno de los isótopos hay que recurrir a las tablas de masas atómicas (o tablas de los defectos de masa) de los elementos, como la que se encuentra en el apéndice G.

1.4 Energía de ligadura. Fórmula semiempírica de masas

1.4.1 Energía de ligadura

La masa de un núcleo (o la del átomo) es necesariamente inferior a la suma de las masas de sus constituyentes, porque parte de la masa ha sido utilizada como energía de ligadura. La energía de ligadura o enlace nuclear, $E_{\mathrm{L}}(Z, N)$, es la energía necesaria para disociar el núcleo en sus constituyentes:

$$E_{\mathrm{L}}(Z,N) = \left(Z\mathcal{M}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) + Nm_{\mathrm{n}} - \mathcal{M}(Z,N) \right) c^2 \qquad (1.30)$$

en donde $M(Z, N)$ representa la masa atómica del núcleo con Z protones y N neutrones. Por ello aparece la masa del hidrógeno en uno de los sumandos. La energía de ligadura también puede escribirse en función de los defectos de masa Δ:

$$E_{\mathrm{L}}(Z,N) = \left(Z\Delta_{\mathrm{H}} + N\Delta_{\mathrm{n}} - \Delta(Z,N) \right) c^2 \qquad (1.31)$$

con Δ_H = 7, 2890 MeV/c^2 y Δ_n = 8, 0713 MeV/c^2, como puede comprobarse por la definición de defecto de masa dada en (1.25).

La curva que representa la energía de enlace por nucleón (véase figura 1.10), $\varepsilon = E_L/A$, es muy instructiva. Tiene un máximo en 8,7 MeV para $A \approx 56$, en la zona del hierro, y va disminuyendo hasta 7,6 MeV para $A \sim 240$. El valor medio es $\overline{\varepsilon} \approx 8\ \mathbf{MeV}$. Muchas son las consecuencias que se derivan de una inspección de las propiedades estudiadas:

1) Hay saturación, $\varepsilon \sim$ constante, luego la fuerza es de corto alcance. Si fuese de largo alcance variaría como A^2. Pero no hay colapso, ya que el volumen aumenta linealmente con A y la densidad nuclear es constante con A, lo que quiere decir que hay una fuerte repulsión a muy corto alcance (< 0,5 fm).

2) La fuerza nuclear es fuerte.

3) La fuerza es atractiva y mayor que la culombiana. El valor medio de la energía de ligadura por nucleón es $\varepsilon \sim 8$ MeV, y mucho mayor que la repulsión electrostática, $E_c = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] e^2/d = \alpha\hbar c/(2\ \mathrm{fm}) \approx 0{,}7$ MeV.

4) El máximo en $A \sim 60$ clasifica los nucleidos en dos regiones:

$A < 60$ **en donde puede haber**	FUSIÓN $(Q_{fus} > 0)$
$A > 60$ **id. id.**	FISIÓN $(Q_{fis} > 0)$

5) La existencia del deuterón (estado ligado p-n), con espín $J = 1$, y la no existencia de otro estado nuclear ligado de dos nucleones (p-p o n-n, que por el principio de exclusión de Pauli deben ser estados con $J = 0$) permite concluir de inmediato que las fuerzas nucleares dependen del espín.

6) La diferencia de valores de ε en el caso de los núcleos espejo (véase la tabla 1.1) es muy similar y la pequeña discrepancia es prácticamente

igual a la diferencia de energía culombiana. Las fuerzas nucleares son independientes de la carga eléctrica. La consecuencia es que si se excluye la carga se cumple que las fuerzas protón-protón son iguales que las protón-neutrón y neutrón-neutrón. Se cumple, esquemáticamente, que las fuerzas pp = pn = nn. Esta observación dio lugar a la introducción del número cuántico isospín, basado en la simetría de carga (invariancia) del hamiltoniano de la interacción fuerte.

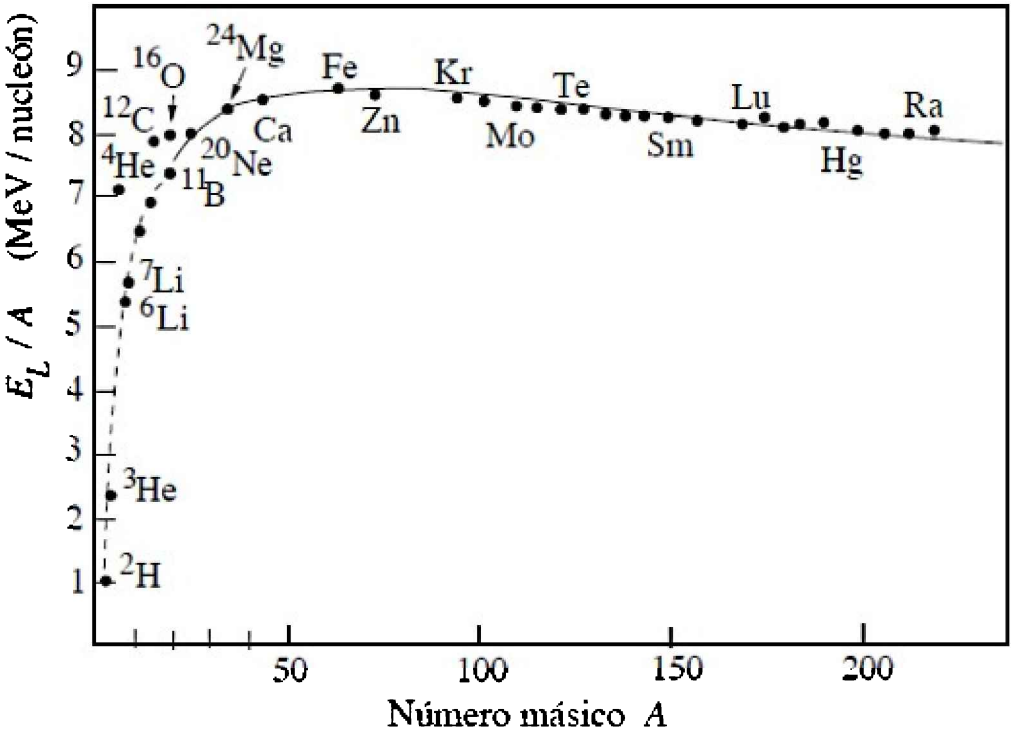


Figura 1.10: Variación de la energía de ligadura por nucleón, E_L/A, en MeV, en función del número másico A. La curva a partir de $A \sim 15$, sigue la fórmula de masas. ^{4}He, ^{12}C y ^{16}O tienen energías de ligadura superiores a lo esperado.

Tabla 1.1: Energías de ligadura total (E_L, en MeV) y por nucleón ($\varepsilon = E_L/A$, enMeV/nucleón) de núcleos espejo ligeros y estables.

Núcleo	$E_L(Z,N)$	ϵ	Núcleo	$E_L(Z,N)$	ϵ
$^{3}_{1}$H	8,49	2,83	$^{3}_{2}$He	7,73	2,58
$^{7}_{3}$Li	39,27	5,61	$^{7}_{4}$Li	37,63	5,38
$^{9}_{4}$Be	58,20	6,47	$^{9}_{5}$B	56,35	6,26
$^{11}_{5}$B	76,25	6,93	$^{11}_{6}$C	73,48	6,68
$^{13}_{6}$C	97,16	7,47	$^{13}_{7}$N	94,16	7,24
$^{15}_{7}$N	115,55	7,70	$^{15}_{8}$O	112,01	7,47
$^{17}_{8}$O	131,83	7,75	$^{17}_{9}$F	128,29	7,55
$^{19}_{9}$F	147,87	7,78	$^{19}_{10}$Ne	143,85	7,57

1.4.2 El valle de la estabilidad

La llamada *carta o plot de Segré* (véase figura 1.11) muestra, en el plano (*Z, N*), la presencia de núcleos que han sido estudiados, ya sean estables o no. La zona central sombreada corresponde a los nucleidos estables. Como puede observarse, siguen una trayectoria en la que $Z \simeq N$ para $A < 40$. A partir de $A \sim 40$, el cociente N/Z va aumentando progresivamente hasta tomar valores de $N/Z \sim 1{,}56$ (para los uránidos el número de neutrones es ~ 50 % mayor), o equivalentemente, $Z/A \sim 0{,}4$. Si se representase lamasa en el tercer eje, aparecería un valle, cuya línea de mínimos es la conocida línea o valle de estabilidad.

De la observación de este plot, de las tablas de nucleidos y de las curvas de abundancia de núcleos estables se deducen las siguientes propiedades;

1) El principio de exclusión de Pauli justifica el equilibrio numérico entre protones y neutrones ($Z/N \sim 1$ para $A < 40$, pero para núcleos más pesados, ($A > 40$) la tendencia es al aumento relativo del número de neutrones ($Z/A \sim 1/2{,}5$).

2) Hay muchos más núcleos estables de tipo par–par (véase la tabla 1.2). Esto implica que deben de existir fuerzas de apareamiento. En

particular los núcleos *clusters* de α (^{4}He, ^{8}Be, ^{12}C, ^{16}O) tienen valores grandesde la energía de ligadura ε.

Los cuatro núcleos impar–impar estables son: $^{2}_{1}$H, $^{6}_{3}$Li, $^{10}_{5}$B, $^{14}_{7}$N. Como se ve, muy ligeros. No existe ningún núcleo estable con $A = 5$ nucleones.

3) La curva de abundancia muestra gran número de núcleos estables en los números:

$$Z \text{ o } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Se llaman números mágicos (a veces se incluye también el 40). Existen también núcleos con números doblemente mágicos (Z y N), por ejemplo, ^{4}He, ^{16}O, ^{40}Ca, ^{208}Pb.

4) Más allá del plomo ($Z = 82$), la repulsión culombiana rompe la estabilidad nuclear y todos los núcleos son inestables bajo desintegración α.

Tabla 1.2: Los 274 núcleos estables clasificados según el número par o impar de nucleones.

A	$Z - N$	Número
par	par–par	165
impar	impar–par	50
impar	par–impar	55
par	impar–impar	4

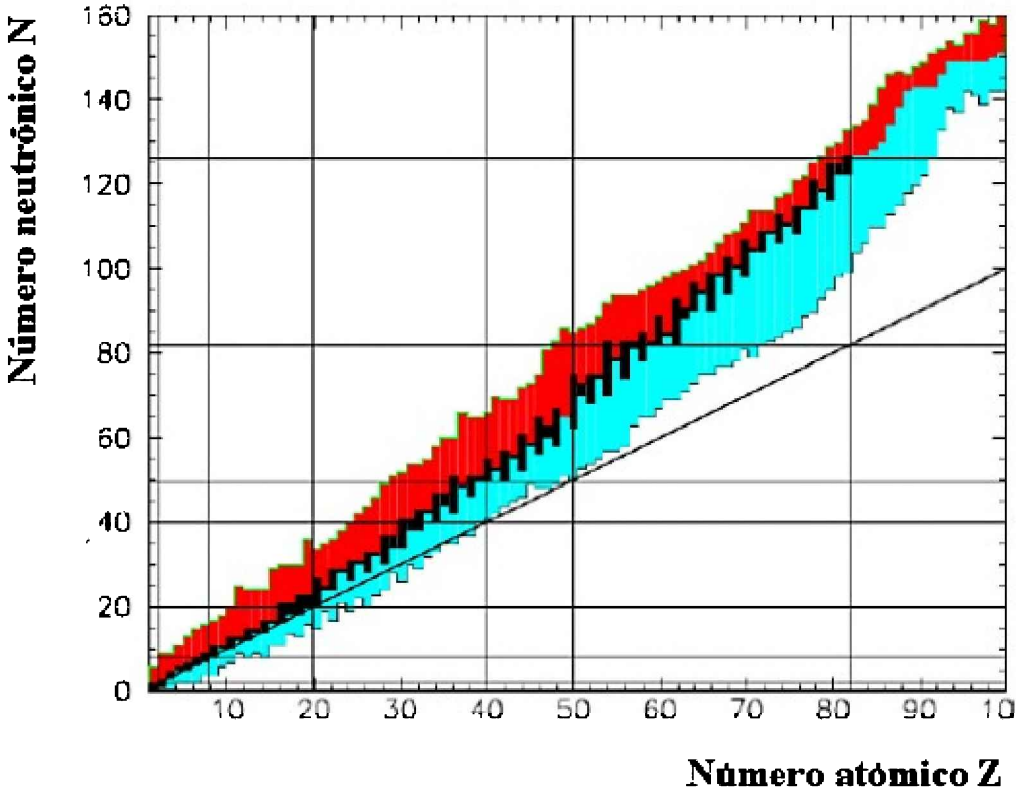


Figura 1.11: Carta de Segré. Los cuadrados negros representan el valle de la estabilidad. Las líneas en *Z* y *N* indican la posición de los números mágicos.

1.4.3 Energía de separación nucleónica

Se llama energía de separación neutrónica, S_n, a la energía necesaria para arrancar un neutrón de un núcleo. Este proceso puede describirse: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-1}_{Z}X +$ n; entendiendo que hay que suministrar energía al núcleo *X* inicial para arrancarle el neutrón. El valor de esta energía es:

$$S_{\mathrm{n}}(Z,N) = -\Big(\mathcal{M}(Z,N) - \mathcal{M}(Z,N-1) - m_{\mathrm{n}}\Big)c^2$$

En términos de valor *Q* de reacción $S_n = -Q_n$. También se puede escribir la energía de separación en función de las energías de ligadura quedando:

$$S_{\mathrm{n}}(Z,N) = E_{\mathrm{L}}(Z,N) - E_{\mathrm{L}}(Z,N-1) \qquad (1.32)$$

variando según los núcleos de 5 a 15 MeV. El valor de S_n es siempre mayor para N par; es consecuencia de las fuerzas de apareamiento.

La energía de separación protónica se define análogamente, $S_p = -Q_p$; es decir:

$$S_{\mathrm{p}}(Z,N) = -\left(\mathcal{M}(Z,N) - \mathcal{M}(Z-1,N) - \mathcal{M}(^1_1\mathrm{H})\right)c^2$$

que en función de las energías de ligadura queda:

$$S_{\mathrm{p}}(Z,N) = E_{\mathrm{L}}(Z,N) - E_{\mathrm{L}}(Z-1,N) \qquad (1.33)$$

variando según los núcleos de 1 a 14 MeV.

De la misma manera se puede definir $S_\alpha(Z, N)$, la energía de separación de una partícula α, e incluso de otros núcleos con mayor número de nucleones.

Hay picos en los valores de S_n y S_p para ciertos valores de N y Z que corresponden precisamente a los números mágicos. Estas energías son muy similares a las de ionización de los átomos. Reflejan la existencia de capas, puesto que toman valores elevados al pasar por ciertos números Z y/o N, que coinciden con los números mágicos vistos más arriba. Las energías de separación son también mucho mayores para los núcleos con N o Z par. Esto también confirma la existencia de fuerzas de apareamiento.

La fuerza de apareamiento puede determinarse para protones y neutrones separadamente. De hecho lo que se mide es el valor de la energía de apareamiento. Para protones esta energía vale $P_p = S_p(Z, N) - S_p(Z - 1, N)$ y, para neutrones, $P_n = S_n(Z, N) - S_n(Z, N - 1)$. El valor de las energías de apareamiento se encuentra alrededor de 3 MeV para núcleos ligeros y va disminuyendo siguiendo una dependencia en $A^{-1/2}$ hasta valer algo menos de 1 MeV para el plomo (véase la sección 3.3 del Capítulo 3 dedicado a los modelos nucleares, donde se presentan los

datos experimentales en la figura 3.2). La energía de apareamiento se suele parametrizar (siguiendo a Bohr, Mottelson; 1969):

$$P_{\mathrm{p}} \sim P_{\mathrm{n}} \sim \frac{11,2}{\sqrt{A}}\ \mathrm{MeV} \tag{1.34}$$

Otros autores utilizan dependencias con A diferentes a esta última.

1.4.4 Fórmula semiempírica de masas

Las conclusiones a las que se ha llegado sobre las propiedades globales de los núcleos, confirman que

i) existe saturación de las fuerzas nucleares ($E_{\mathrm{L}}/A \sim$ constante),

ii) la distancia media entre constituyentes es constante: $\overline{d} = 1,9$ fm; la densidad nuclear constante $\rho \sim (1/7)$ fm^{-3} y

iii) la fuerza que actúa entre ellos es de corto alcance.

Todas estas propiedades son las que sustentan los éxitos parciales del sencillo modelo nuclear de la gota líquida.

Para calcular las masas atómicas:

$$\mathcal{M}(Z,N) = Z\mathcal{M}(^1_1\mathrm{H}) + Nm_{\mathrm{n}} - E_{\mathrm{L}}(Z,N)/c^2 \tag{1.35}$$

Weisz¨acker propuso un método basado en este concepto de gota líquida, corregido por dos términos microscópicos debidos a la naturaleza cuántica del núcleo. En este modelo, se supone que el núcleo es como una gota incompresible, o sea, de densidad constante e independiente de A; cada nucleón estará ligado con la misma energía de ligadura. Habrá pues un término de ligadura proporcional a A (volumen). Los nucleones de la superficie, tienen menos energía de ligadura (término de tensión superficial nuclear). También habrá un término debido a la repulsión culombiana que disminuirá la energía de ligadura. Los dos términos de

naturaleza cuántica son el de asimetría, que explica porqué $Z \sim N$ y el de apareamiento (los núcleos par–par están más ligados). Con ello, la energía de ligadura nuclear queda:

$$E_l(Z.A) = \alpha_V A - \alpha_S A^{2/3} - \alpha_C Z(Z-1)A^{-1/3} - \alpha_A (A-2Z)^2 A^{-1} - \delta \quad (1.36)$$

conocida por el nombre de fórmula de Bethe-Weisz¨acker. Los coeficientes α_i, se determinan ajustando las energías de ligadura (o masas) de los núcleos estables. Los tres primeros términos representan las energías de ligadura de volumen, superficial y de repulsión culombiana. Los dos últimos términos, que como se ha dicho no derivan de las propiedades de la gota, se pueden justificar por:

a) el principio de exclusión de Pauli, que favorece $Z \approx N$. Se llama término de asimetría y se parametriza con el término α_A. En efecto, cuanto más diferentes son Z y N, más disminuye la energía de ligadura y el núcleo es más inestable. Si ΔE es el intervalo energético entre niveles nucleares en el pozo en el que están ligados los nucleones (uno para Z protones y otro para los N neutrones), puede justificarse que para aumentar el número de uno de ellos respecto al otro exige un aumento de energía que varía $\sim (N - Z)^2 \Delta E/8$. El factor A^{-1} de la fórmula (1.36), recuerda que en un pozo de potencial, el espaciamiento de niveles ΔE es inversamente proporcional al volumen del pozo.

b) la energía de apareamiento, ligada a la estabilidad de los núcleos par–par frente a impar–impar. Su valor es:

$$\delta = \begin{cases} -\alpha_p A^{-1/2} & \text{par–par} \\ 0 & \text{impar–par} \\ +\alpha_p A^{-1/2} & \text{impar–impar} \end{cases}$$

Los valores de los parámetros α_i que reproducen los valores de las masas de los núcleos estables pueden verse en la tabla 1.3.

No todos los autores parametrizan la energía de apareamiento según

$A^{-1/2}$, como puede verse, entre paréntesis, en la tabla anterior.

La fórmula de Bethe-Weisz¨acker (véase la figura 1.10) es válida para núcleos con número másico $A \geq 20$ yno puede explicar diferencias entre energías de ligadura de núcleos cercanos. Se limita a reproducir, de manera suave, la masa del más estable de los núcleos con el mismo número másico A. Para predecir masas alejadas del valle de estabilidad se usa la fórmula de Kelson–Garvey que se presenta a continuación.

Tabla 1.3: Parámetros α_i, en MeV, de la fórmula de masas obtenidos por varios autores y la referencia bibliográfica correspondiente.

α_V	α_S	α_C	α_A	α_p	autor	ref.
$15,8$	$18,3$	$0,70$	$23,2$	$11,2(A^{-1/2})$	*Fernow*	[19]
$15,5$	$16,8$	$0,72$	$23,0$	$34,0(A^{-3/4})$	*Krane*	[7]
$16,0$	$17,0$	$0,60$	$25,0$	$25,0(A^{-1})$	*Wong*	[9]

1.4.5 Fórmula de Kelson–Garvey

Basada en un modelo microscópico, en el que se supone que existen interacciones debidas a uno y dos constituyentes. Se postula que la energía de ligadura es de la forma:

$$E_L(Z,N) = aN + bZ + cN(N-1) + dZ(Z-1) + eZN$$

es decir, una suma de términos de un cuerpo (N y Z) y términos de dos cuerpos, proporcionales a los productos $Z(Z-1)$, $N(N-1)$ y ZN.

De aquí se llegaa la regla:

$$E_L(Z+1,N-1) + E_L(Z,N+1) + E_L(Z-1,N) - \\ -E_L(Z,N-1) - E_L(Z+1,N) - E_L(Z-1,N+1) = 0$$

obteniéndose predicciones con una precisión del orden de unos 100 keV.

1.5 Estabilidad nuclear. Parábola de masas

La inestabilidad nuclear se manifiesta por la desintegración espontánea del núcleo, dando origen a otro estado nuclear. El proceso físico de la desintegración es posible porque existen núcleos que tienen menor masa (debe cumplirse que el valor *Q* de la reacción sea positivo, $Q > 0$). Los procesos de desintegración pueden ser, α, β, γ, fisión y emisión de nucleón. La descripción detallada de estos procesos se encuentra en el Capítulo dedicado al estudio de las desintegraciones nucleares (tema 8 y siguientes); aquí se presenta una breve descripción esquemática de estos procesos:

- desintegración α, $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}L + {}^{4}\mathrm{He}$
- desintegración β^-, $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}M + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$

  β^+, $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}N + \mathrm{e}^+ + \overline{\nu}_\mathrm{e}$
- desintegración γ, $^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

  en donde el núcleo X^* se encuentra en un estado excitado, de mayor energía que la del estado *X*;
- fisión espontánea, por ejemplo $^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{90}_{35}\mathrm{Br} + {}^{145}_{57}\mathrm{La} + 3n$ cuya probabilidad es grande para núcleos con *A* elevado ($A > 250$).
- $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-1}_{Z-1}Y + \mathrm{p}$

  yemisión de nucleón, $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-1}_{Z}V + \mathrm{n}$ o también

En cada caso intervienen distintos tipos de fuerzas o interacciones. Más adelante se estudiarán con todo detalle los mecanismos de desintegración de los núcleos.

Se sabe, experimentalmente, que los núcleos estables cumplen la ley:

$$Z_{min} = \frac{A}{1,98 + 0,015A^{2/3}} \qquad (1.37)$$

en donde Z_{min} representa el número atómico del núcleo más estable con A nucleones. Puede justificarse si se tiene en cuenta que la fórmula semiempírica es una función parabólica $M = f(Z)$, la conocida parábola de masas, que al calcular el mínimo, $\partial M/\partial Z = 0$, da lugara:

$$Z_{min} = \frac{\left(m_n - \mathcal{M}(^1_1\mathrm{H})\right) + \alpha_C A^{-1/3} + 4\alpha_A}{2\alpha_C A^{-1/3} + 8\alpha_A A^{-1}} \approx \frac{A}{2 + \frac{\alpha_C}{2\alpha_A} A^{2/3}} \qquad (1.38)$$

Esta fórmula reproduce los valores observados del cociente Z/A tanto para núcleos ligeros $Z/A \sim 1/2$ como para los pesados ($A > 40$), $Z/A \sim 1/2, 5$. La fórmula de masas reproduce por lo tanto la línea de estabilidad de los núcleos en el plano Z, N. También podría utilizarse incluso para predecir masas en las llamadas *drip lines*, es decir, las líneas en el plano Z, N en las que $S_p = S_n = 0$, osea que los núcleos son tan inestables que se desintegran espontáneamente emitiendo un nucleón. Usando la fórmula de masas también podría calcularse el límite de estabilidad bajo desintegración alfa. Se obtiene $\varepsilon_\alpha = 7,07 + 7,7 \times 10^{-3}\, A$ MeV, lo que implica que a partir de $A = 151$ el valor de ε_α supera la energía de ligadura por nucleón $\varepsilon = E_L/A$ y puede tener lugar (energéticamente) la emisión espontánea de una partícula alfa.

Cuando se representan las parábolas de masa se llega a dos configuraciones según el número de nucleones. Si A es impar, sólo hay una parábola, mientras que para A par, existen dos parábolas separadas de 2δ, siendo δ el coeficiente que da la energía de apareamiento de la

fórmula de masas.

He aquí varios ejemplos:

$$A = 100 \qquad {}_{41}\mathrm{Nb},\ {}_{43}\mathrm{Tc},\ {}_{45}\mathrm{Rh},\ {}_{47}\mathrm{Ag}$$
$${}_{40}\mathrm{Zr},\ {}_{42}\mathrm{Mo},\ {}_{44}\mathrm{Ru},\ {}_{46}\mathrm{Pd}$$

$$A = 125 \qquad {}_{49}\mathrm{In},\ {}_{50}\mathrm{Sn},\ {}_{51}\mathrm{Sb},\ {}_{52}\mathrm{Te},\ {}_{53}\mathrm{I},\ {}_{54}\mathrm{Xe},\ {}_{55}\mathrm{Cs}$$

$$A = 128 \qquad {}_{49}\mathrm{In},\ {}_{51}\mathrm{Sb},\ {}_{53}\mathrm{I},\ {}_{55}\mathrm{Cs},\ {}_{57}\mathrm{La}$$
$${}_{50}\mathrm{Sn},\ {}_{52}\mathrm{Te},\ {}_{54}\mathrm{Xe},\ {}_{56}\mathrm{Ba}$$

estos dos últimos casos, representados en la figura 1.12. Sucederá que los núcleos con *Z* menor que el más estable (el de menor masa) se desintegrarán vía desintegración β^-, y losdemayor *Z,* vía desintegración β^+, procesos que continuarán hasta llegar precisamente al núcleo más estable de la parábola de masas. Este conjunto de núcleos estables frente a las desintegraciones β son los que forman el referido valle de la estabilidad.

La conclusión más importante es que para los núcleos con *A* par pueden darse dos fenómenos que no pueden darse para *A* impar;

1) un mismo núcleo puede desintegrarse de dos formas distintas, ejemplo:
$^{128}_{53}\mathrm{I} \longrightarrow {}^{128}_{52}\mathrm{Te}$ por β^+ o bien $^{128}_{53}\mathrm{I} \longrightarrow {}^{128}_{54}\mathrm{Xe}$ por β^-.
2) puede darse el fenómeno de desintegración *doble beta,* esdecir, porejemplo $^{128}_{52}\mathrm{Te} \longrightarrow {}^{128}_{54}\mathrm{Xe}$, conuncambiode $Z = 2$. Ésta es una desintegración de segundo orden; por lo tanto poco probable. La importancia de este proceso es que permite obtener información sobre la naturaleza del neutrino. Para ello, se investiga si existe desintegración doble β con o sin neutrinos, lo que implicaría que los neutrinos son de tipo Dirac o de tipo Majorana, respectivamente. Estos conceptos se amplían en la sección 10.7, donde se revisa la situación de la desintegración doble beta.

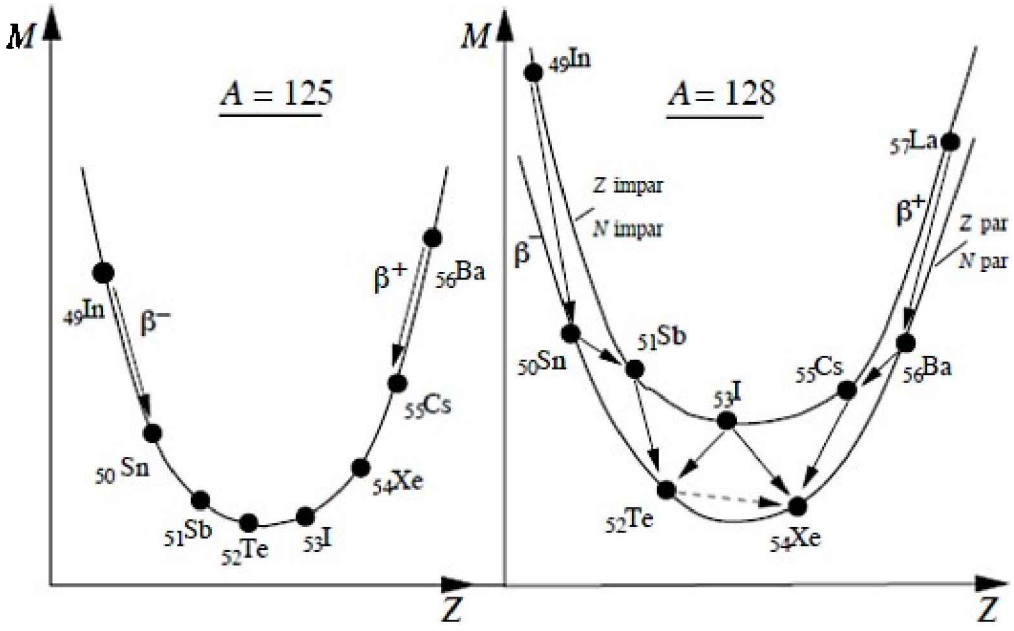


Figura 1.12: Parábola de masas para núcleos con A = 125 y A = 128. Nótese la posibilidad de la desintegración doble β del ^{128}Te al ^{128}Xe.

Ala vista de las dos parábolas para los núcleos con A par, se entiende por qué no existen casi núcleos estables de tipo impar–impar: siempre existen núcleos más estables de tipo par–par y con menor masa.

Para núcleos con A *par* suele haber 2 isóbaros estables y en ciertos casos hasta 3 (por ejemplo para los núcleos con A = 40, 96, 124, 130, 136, 176, 180).

Para núcleos con A *impar* sólo existe un núcleo estable, que no tendrá desintegración beta (ejemplo, el $^{101}_{44}$Ru); pero sucede que sila diferencia de masas es pequeña, la desintegración β es poco probable (ejemplos: $^{113}_{49}$In, Cd; $^{115}_{50}$Sn, In; $^{123}_{51}$Sb, Te).

Se verá más adelante también que para núcleos con Z elevado, la inestabilidad nuclear es debida a la fuerte repulsión culombiana y favorece la desintegración α; además, si $Z \geq 90$ explica la disminución de la energía de ligadura nuclear E_L con la deformación nuclear dando lugar a la fisión espontánea.

1.6 Espín, paridad, isospín y momentos nucleares

Se aborda a continuación la definición de los números cuánticos más utilizados en física nuclear. Su interés viene del hecho que caracterizan las propiedades de los núcleos. A veces, es posible definirlos en función de los números cuánticos de los nucleones constituyentes.

Desde el punto de vista cuántico, un núcleo es una estructura compleja de *A* nucleones, todos ellos interaccionando. Supónga se *H* el hamiltoniano del sistema:

$$H = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + \sum_{i<j=1}^{A} V(r_i, r_j) \qquad (1.39)$$

en donde m_i es la masa de los nucleones y se han incluido sólo las interacciones de dos nucleones entre sí. No se han tenido en cuenta interacciones más complejas de tres (o más) cuerpos. La ecuación de Schrödinger nuclear (no relativista) independiente del tiempo, que proporciona los estados estacionarios con energía E_k, se escribe entonces:

$$H\psi_k = E_k\psi_k \qquad (1.40)$$

siendo *k* el conjunto de números cuánticos que definen el estado. Existirán estados nucleares bien definidos y distintos, caracterizados cada uno de ellos por una energía E_k, en completa analogía con los niveles excitados de los átomos.

El estado de un núcleo, cuánticamente, vendrá dado por una función de ondas que dependerá de las coordenadas: espaciales $(\vec{r}_i)$, de espín $(\vec{s}_i)$ y de isospín $(\vec{t}_i)$ de los *A* nucleones. La ecuación de Schrödinger (1.40) sólo concierne a la función espacial. Los otros números cuánticos se sabe que existen y se introducen ad hoc. Como esas coordenadas pertenecen a espacios independientes, la función de ondas seráunproducto:

$$\Psi_k(q_1, q_2, \ldots, q_A) = \psi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A)\chi_J(1, 2, \ldots, A)\xi_T(1, 2, \ldots, A) \quad (1.41)$$

que, además, debe ser una función antisimétrica bajo el intercambio de dos nucleones, como postula el principio de simetrización en el caso de fermiones idénticos. Si además, por ejemplo, se supone un modelo de partícula individual, en un potencial central, podrán definirse estados para cada nucleón de manera independiente:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A) = \phi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2) \cdots \phi(\vec{r}_A) \quad (1.42)$$

que al igual que en el caso del átomo de hidrógeno serán funciones separables:

$$\phi(\vec{r}_i) = R_{n_i}(r_i)Y_{\ell_i m_i}(\theta_i, \varphi_i) \quad (1.43)$$

en una componente radial, R_n, y una componente angular; en este último caso representada por los armónicos esféricos, $Y_{\ell\ m}$. Los números cuánticos que definen el estado de cada nucleón, dado por (1.43), serán n, ℓ, m_ℓ el número cuántico principal, el momento angular orbital y la tercera componente de este último. Además, habrá que tener en cuenta el momento angular total j y su tercera componente m_j, que se obtienen a partir de $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ y $m_j = \ell \pm 1/2$, donde $\vec{s}$ es el espín del nucleón. Recuérdese que la ecuación de Schrödinger describe partículas sin espín, ya que es una ecuación no relativista.

1.6.1 Espín y paridad nucleares

Los núcleos, en tanto que sistemas cuánticos, tienen espín–paridad J^P bien definidos. Si además se supone que los nucleones que lo componen se mueven en un potencial central, tendrán un momento angular orbital $\vec{\ell}_i$; también habrá que tener en cuenta su espín (o sea, el momento angular intrínseco), $\vec{s}_i$, y por lo tanto el momento angular total de cada

nucleón será $\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i$. El espín nuclear será la suma:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{A} \vec{j}_i \tag{1.44}$$

Se cumple por lo tanto que si *A* es par, $\vec{J}$ es entero, y si *A* es impar, $\vec{J}$ es semientero.

Todos los estados nucleares (incluyendo el estado fundamental) tienen un momento angular finito. Para especificarlo, se utiliza un vector cuantizado $\vec{J}$, que tiene por módulo:

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar \tag{1.45}$$

en donde *J* es el denominado espín nuclear y es un buen número cuántico; es decir, es un número que se conserva en todos los procesos nucleares. Según el principio de incertidumbre, *J* es inobservable, pero su componente según un eje de cuantización puede medirse, dando $m_J\hbar$, en donde m_J puede tomar uno de los $2J + 1$ valores comprendidos en el intervalo $J \geq m_J \geq -J$.

La paridad *P*, es un operadorque transforma la función de ondas (espacial) de un núcleo:

$$\mathcal{P}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...) = \psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, ...), \tag{1.46}$$

siendo $\vec{r}_i$ las coordenadas espaciales de los nucleones. Tiene dos valores propios: ±1 ya que $P^2 = I$, es la identidad. Es extremadamente difícil de determinar la paridad de un núcleo a partir de las paridades de los constituyentes. Pero puede obtenerse a partir de las reacciones nucleares en las que intervenga el núcleo, ya que la paridad es un número cuántico que se conserva en las interacciones fuertes (conmuta con el hamiltoniano, $[P, H] = 0$). La paridad también se conserva en las interacciones electromagnéticas.

Como el movimiento de un nucleón en un potencial queda caracterizado por un armónico esférico $Y_{\ell\ m}$, la paridad debida al movimiento orbital del nucleón valdrá $P = (-1)^{\ell}$ ya que:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = (-1)^{\ell} Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) \qquad (1.47)$$

que es la operación equivalente a la reflexión espacial: $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$.

Las partículas y núcleos tienen, además, paridad intrínseca. Se toma por convenio que la paridad intrínseca del protón y la del neutrón es $P = + 1$. La paridad de un núcleo (intrínseca) es consecuencia, pues, de las paridades espaciales de todos los nucleones que lo componen. Habitualmente, la paridad suele ser representada sólo por el signo ±.

Los núcleos par–par tienen $J^P = 0^+$, consecuencia de las fuerzas de apareamiento entre nucleones idénticos. Para los núcleos con A impar, el modelo extremo de partícula individual postula que el espín $\vec{J}$ del núcleo es debido al nucleón no apareado, con lo que $\vec{J} = \vec{J}$, siendo $\vec{J}$ el momento angular total del nucleón no apareado.

1.6.2 Isospín nuclear

La independencia de carga, responsable de la simetría de carga de la fuerza nuclear para pp y nn, que se deriva, entre otros, de las propiedades de los núcleos espejo, permite dotar a los nucleones de un nuevo número cuántico llamado isospín o también espín isotópico. Se considera al protón y al neutrón como si fuesen un mismo objeto: el nucleón. El nucleón tiene isospín total $t_N = 1/2$ y sus proyecciones son el protón p $\equiv$ $t_3 = + 1/2$ y el neutrón n $\equiv$ $t_3 = -1/2$. Las operaciones con estados de isospín cumplen las mismas reglas que las operaciones con el espín. Obedecen al mismo grupo de simetría SU(2). Así por ejemplo, el sistema *N–N* podrá formar un estado triplete ($T = 1$) o singlete ($T = 0$) de isospín. Cada nucleido tendrá un espín isotópico $\vec{J}$, con lo cual, la tercera componente T_3 es un operador que tiene valor propio distinto para cada

uno de los $2T$ +1 estados de carga del mismo sistema. La interacción nuclear (el hamiltoniano) dependerá solamente del isospín total $\vec{T}$, consecuencia dinámica de la invariancia bajo rotaciones en el espacio de isospín. Para los núcleos se cumple que:

$$|\vec{T}| \geq \frac{|Z-N|}{2} \qquad \text{y} \qquad T_3 = \frac{1}{2}(Z-N). \tag{1.48}$$

y evidentemente el valor máximo cumple $T_{\text{máx}} = \frac{A}{2}$. Ejemplos de multipletes de isospín son: el triplete (T = 1) de A = 10 ($_4$Be, $_5$B, $_6$C), o el doblete (T = 1/2) de A = 7 ($_3$Li, $_4$Be).

El isospín refleja los estados de carga del sistema. La relación entre el ordinal de carga Q y la tercera componente del isospín viene dada por la fórmula de Gell-Mann-Nishijima, que fue inicialmente propuesta para las partículas elementales. En el caso de núcleos con A nucleones se tiene que:

$$\boxed{Q = T_3 + \frac{A}{2}} \tag{1.49}$$

que también es válida para los nucleones simplemente escribiendo A = 1. En física de partículas A se sustituye por la hipercarga $Y = B + S$, suma de dos cargas: B, el número bariónico, que vale $B = A = 1$ para los nucleones y S la extrañeza, que vale S = 0 para el protón y el neutrón.

1.6.3 Momentos electromagnéticos nucleares

Los momentos electromagnéticos (carga, momento dipolar, etc.) informan sobre la distribución de carga y magnetismo nuclear originado por el movimiento de los constituyentes nucleares en el campo nuclear. Son importantes porque determinan el comportamiento del núcleo (sistema de cargas y espines) en presencia de un campo eléctrico y/o

magnético. Se describe a continuación el momento dipolar magnético.

Momento dipolar magnético

Supónga se por ejemplo un protón (con carga eléctrica *e*) moviéndose describiendo un círculo de radio *r*. Clásicamente su momento dipolar magnético se define $\vec{\mu} = i\vec{S}$, siendo $S = \pi r^2$ la superficie inscrita en el círculo descrito por dicho protón. Introduciendo el momento angular $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$, se verifica que $|\vec{\mu}_{\mathrm{P}}| = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{e}{2m}|\vec{\ell}|$, siendo *m* la masa del protón. O sea, el momento dipolar magnético debido al movimiento orbital se puede escribir $\vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2m}\vec{\ell}$. Cuánticamente es inmediato generalizar el momento dipolar magnético orbital, puesto que se define de la misma manera; por lo tanto es un operador proporcional al operador momento angular orbital. Las funciones propias del operador momento angular orbital $\hat{\ell}$ y su proyección $\hat{\ell}_z$ son los armónicos esféricos $Y_{\ell,m}$; es decir, se cumple:

$$\hat{\ell}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell,m} \qquad \text{y} \qquad \hat{\ell}_z Y_{\ell,m} = m\hbar Y_{\ell,m}$$

con lo que la unidad apropiada para medir los momentos dipolares magnéticos es el magnetón nuclear $\mu_{\mathrm{N}} = \frac{e}{2m}\hbar$. El siguiente paso es extender el concepto de momento dipolar al espín; se habla entonces de momento dipolar magnético de espín, o intrínseco, ya que se refiere a una característica *intŕinseca* de la partícula: su espín. Por convenio, al realizar los cálculos en la definición de momento dipolar se utiliza el operador $\hat{\ell}_z$ o $\hat{s}_z$, es decir la tercera componente. Además, de los (2*s* + 1) valores posibles de la tercera componente el cálculo se realiza tomando el estado de máximo valor de la tercera componente. Por ejemplo, en el caso del protón, se utiliza $s_z = +1/2$.

El momento dipolar magnético de los constituyentes del átomo, se calcula sumando el momento dipolar orbital (debido al movimiento del

nucleón) y el momento dipolar intrínseco (de espín): $\vec{\mu} = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$.

Los momentos magnéticos dipolares para los nucleones se definen:

$$\vec{\mu}_\ell = g_\ell \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{\ell} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mu}_s = g_s \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{s} \qquad (1.50)$$

Más concretamente, en la tabla 1.4 aparecen los momentos dipolares magnéticos de los constituyentes del átomo. El factor g_s es el llamado factor g de espín, que simplemente da la relación entre momento magnético y espín.[6] Generalizando, g_ℓ es el factor g orbital. Se observa que el neutrón no tiene momento magnético orbital ya que se trata de una partícula con carga eléctrica nula.

Tabla 1.4: Definición y valor del momento dipolar magnético de los constituyentes del átomo.

	$\vec{\mu}$	g_ℓ	g_s
e	$-g_\ell \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{\ell} - g_s^{(e)} \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{s}_e$	1	2,00232
n	$g_s^{(n)} \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{s}_n$	0	$-3,826$
p	$g_\ell \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{\ell} + g_s^{(p)} \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{s}_p$	1	$+5,586$

En la tabla 1.4 el valor numérico de los magnetones (atómico y nuclear), como ya se ha visto, es:

$$\mu_B = e\hbar/2m_e = 5,787 \times 10^{-11}\ \text{MeV/T}$$

$$\mu_N = e\hbar/2m_p = 3,152 \times 10^{-14}\ \text{MeV/T}$$

Los momentos magnéticos intrínsecos (debidos al espín) son pues, $\mu_e = -\mu_B$; para el electrón, y $\mu_p = +2,79\ \mu_N$, $\mu_n = -1,91\ \mu_N$; para los

nucleones. Elmodelo de quarks de los nucleones, permite entender la diferencia entre estos valores; en efecto, en la sección 17.5.4 del Capítulo dedicado al modelo de quarks de los hadrones, se justifica que $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2\mu_d}{3\mu_d} = -2/3$, donde μ_d es el momento dipolar magnético del quark d. El valor experimentales −1,91/2,79 = −0,685, o sea, una buena predicción.

Según prescribe la mecánica cuántica, el momento dipolar magnético intrínseco es el valor esperado de μ_{S_z} en el estado con proyección máxima de espín, o sea en el caso de nucleones, el valor esperado del operador μ_{S_z} en el estado $|s, m_s> = |1/2, +1/2>$.

Los núcleos tendrán momento dipolar magnético:

$$\boxed{\vec{\mu}_J = g_J \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{J}} \qquad (1.51)$$

siendo g_J el factor g del núcleo. Recuérdese que en modelos sencillos de partícula individual puede explicarse $\vec{J}$ como suma de los momentos angulares $\vec{J}_i$ de los A nucleones o de un reducido número de los mismos.

Las medidas experimentales, realizadas por estructura hiperfina, espectroscopía de microondas o por resonancia magnética nuclear (NMR) dan, para los núcleos, momentos dipolares comprendidos entre $-2\mu_N$ y $+ 6\mu_N$.

Momento cuadrupolar eléctrico

Sea una distribución de carga $\rho(r, \theta, \phi)$ que ocupa un volumen τ, situada en un campo eléctrico E no uniforme (según el eje z) que deriva de un potencial cuya forma será, desarrollando en serie:

$$V = V_0 + (\mathcal{E}_z)_0 \; z + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}\right)_0 (3z^2 - r^2) + \ldots$$

siendo $(E_z)_0$ la derivada en el origen del potencial: $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$. Laenergía *U*, debida a la interacción de la distribución de carga con el campo exterior será:

$$U = \int \rho V d\tau = V_0 q + (\mathcal{E}_z) d_z + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\right) eQ + \ldots$$

con las definiciones clásicas y sus equivalentes cuánticas siguientes:

	clásica	cuántica
carga	$q = \int \rho d\tau$	$= Ze$
momento dipolar eléctrico	$d_z = \int \rho z d\tau$	$= \sum_i \int \psi^* q_i z_i \psi d\tau$
momento cuadrupolar	$eQ = \int \rho(3z^2 - r^2) d\tau$	$= \sum_i \int \psi^* q_i (3z_i^2 - r_i^2) \psi d\tau$

En las definiciones cuánticas, las sumas se extienden sobre las cargas q_i (protones) y la función de ondas ψ vendrá dada por el modelo que se utilice.

El menor de los momentos multipolares eléctricos (exceptuando el monopolo; es decir, la carga eléctrica) es el momento dipolar eléctrico. Para los núcleos y las partículas, el momento dipolar eléctrico debe ser nulo, ya que no puede existir asimetría de cargas arriba–abajo. El siguiente momento es el momento cuadrupolar eléctrico; el cual informa de las desviaciones a la estructura esférica de cargas. En efecto, clásicamente el momento cuadrupolar eléctrico se define:

$$eQ_0 = \int_\tau \rho_{ch}(\vec{r})(3z^2 - r^2) d\tau \qquad (1.52)$$

en donde ρ depende de $\vec{r}$.

Cuánticamente, ρ viene dada por la amplitud de probabilidad $\rho = Ze|\psi|^2 = Ze\psi^*\psi$. Entonces, debe calcularse el valor esperado:

$$\langle Q_0 \rangle = Z(3\langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle) = Z\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle r^2 Y_{20}(\theta, \varphi)\rangle \qquad (1.53)$$

donde debe entenderse que el valor esperado del operador r^2Y_{20} se calcula en el estado cuántico dado por la función de ondas ψ. Este valor de Q_0 se denomina momento cuadrupolar intrínseco, porque se toma como eje *z*, el de simetría del núcleo. Puede comprobarse que si $Q_0 = 0$, el núcleo es esférico, puesto que $\langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$ con lo cual $3\langle z^2 \rangle = \langle r^2 \rangle$;si $Q_0 > 0$, o sea $3\langle z^2 \rangle > \langle r^2 \rangle$, entonces es *prolato*, es decir, ovalado, con forma de balón de rugby y si $Q_0 > 0$ entonces es *oblato*, osea, achatado.[7]

Los núcleos con números mágicos (o doblemente mágicos) tienen $Q_0 = 0$. De hecho si el espín del núcleo es $J < 1$ entonces $Q_0 = 0$.

Sin embargo, el eje del espín nuclear (Oz') que coincide con el eje de simetría del núcleo y permite definir el momento cuadrupolar intrínseco Q_0, no coincide con el eje fijo en el espacio (Oz), en el que se calcula y se mide en el laboratorio el momento cuadrupolar Q_J. Se demuestra que para un núcleo de espín J el momento cuadrupolar Q_J está relacionado con el intrínseco por la relación:

$$Q_J = -\frac{2J-1}{2(J+1)}Q_0 \qquad (1.54)$$

Se ve que sólo puede tomar valores $Q_J \neq 0$ si el espín nuclear es $J \geq 1$.

El momento dipolar eléctrico d_z tiene unidades de carga por distancia y para núcleos y partículas se suele medir en $e \cdot$ fm, siendo e la carga del electrón. No se han encontrado valores no nulos de d_z. El momento cuadrupolar eléctrico tiene unidades de carga por superficie y se suele medir en $e \cdot$ barns o $e \cdot$ fm^2 (barn = 10^{-28} m^2 = 100 fm^2).

Experimentalmente, el momento cuadrupolar de los núcleos toma valores comprendidos entre −2 y 6 barns como se enseña en la figura 1.13. Esta figura muestra claramente que los núcleos que tienen grandes valores de Q se encuentran en la zona de los lantánidos y los actínidos, indicando que son núcleos altamente deformados y generalmente ovalados. Por otra parte los núcleos que se encuentran en el vecindario de los números mágicos, son prácticamente esféricos ($Q \approx 0$). Se verá que estos resultados no son fácilmente explicables por el modelo de capas.

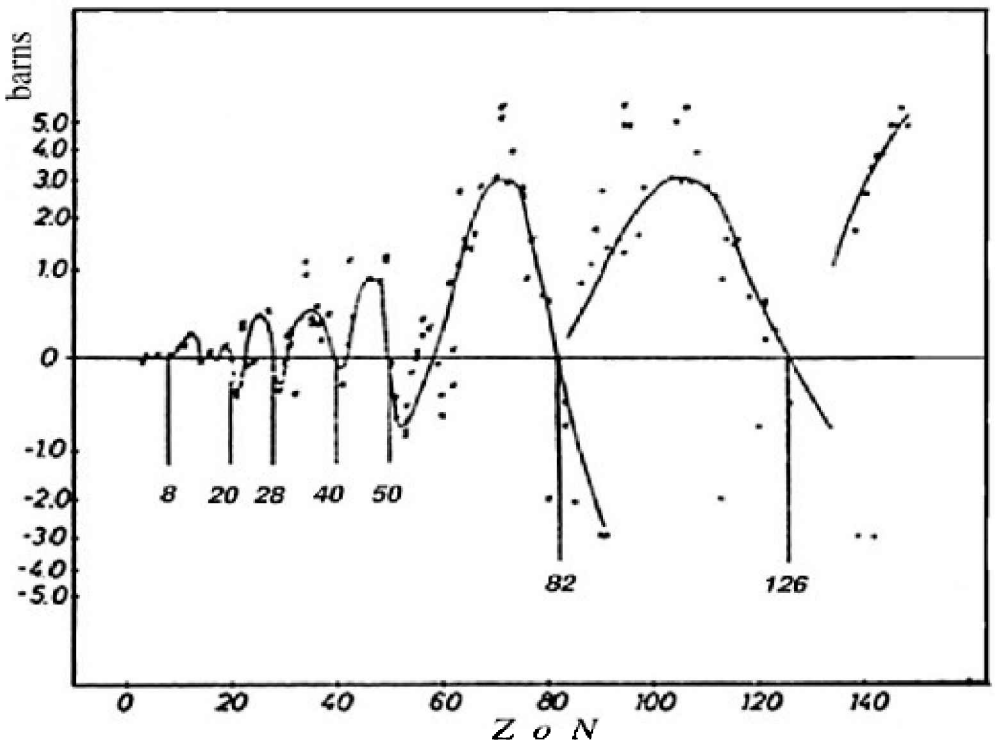


Figura 1.13: Momentos cuadrupolares eléctricos de los núcleos (en barns) en función del número atómico Z o neutrónico N. Las líneas verticales señalan la posición de los números mágicos, en donde el valor de Q se anula, indicando formas esféricas.

Momento cuadrupolar eléctrico y forma elipsoidal

Es frecuente identificar a los núcleos deformados con una forma

elipsoidal o esferoide. Sea un elipsoide, con semiejes (*a*, *a*, *b*), donde *b* es el semieje mayor; si el foco positivo está en la coordenada *z* = *c*, la excentricidad se define como $\epsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$. La excentricidad mide la deformación respecto a una esfera, para la que $\varepsilon = 0$. En física nuclear se introduce el radio medio del esferoide como $R_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, y por lo tanto llamando $\Delta R_0 = b - a$, se define el *parámetro de deformación* cuadrupolar:

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\frac{\Delta R_0}{R_0} \simeq 1{,}06\frac{\Delta R_0}{R_0}$$

Se demuestra que el momento cuadrupolar, en primera aproximación, es:

$$eQ_0 = \frac{2}{5}eZ(b^2 - a^2) = \frac{4}{5}eZR_0^2\frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{3}{\sqrt{5\pi}}ZR_0^2\delta \qquad (1.55)$$

Para un núcleo esférico, $\delta = 0$. Se observa experimentalmente que para los lantánidos ($A \approx 150 - 190$) y para los actínidos ($A > 220$), la deformación toma valores: $\delta \in [0{,}1;\ 0{,}2]$. Se trata pues de núcleos muy desviados de la forma esférica, por lo que se les denominan núcleos *deformados*. Por ejemplo, el $^{178}_{72}\mathrm{Hf}$ es el núcleo que tiene mayor momento cuadrupolar, $Q = +6$ barns, lo que implica que $\delta = 22\%$, mientras que para el deuterón ($Q = 0{,}002859$ barns) se obtiene $\delta = 4\%$.

1.7 Estructura cuántica de niveles energéticos nucleares E_n

En la sección 1.6 se ha descrito la función de ondas nuclear como una estructura compleja de *A* nucleones, todos ellos interaccionando, de forma que la ecuación de Schrödinger nuclear (no relativista) tomaría la forma:

$$H\Psi_k = E_k\Psi_k \tag{1.56}$$

siendo Ψ_k la función de ondas del estado. Existirán estados nucleares bien definidos y distintos, caracterizados cada uno de ellos por una energía E_k, en completa analogía con los niveles excitados de los átomos.

Entre estos niveles destaca el estado fundamental, el de menor energía, que es el más estable y mejor conocido. Los niveles nucleares de mayor energía que la del estado fundamental, llamados estados excitados podrán desexcitarse emitiendo fotones, al igual que en el caso de los átomos. Este es un proceso electromagnético que se denomina desintegración γ. Una forma de estudiar estos niveles nucleares excitados, que se obtienen en estados finales de reacciones nucleares o como resultado de otras desintegraciones nucleares, es por espectroscopía γ nuclear.

Un ejemplo de estructura de niveles nucleares, que además ilustra las propiedades de los núcleos espejo es el del $^{17}_{8}$O y $^{17}_{9}$F (véase figura 1.14). Obsérvese la similaridad entre las estructuras de sus niveles energéticos, consecuencia de la invariancia de carga de la interacción nuclear; por ello, los multipletes de isospín de núcleos se denominan estados isóbaros análogos (IAS, del inglés, *Isobar Analogue States*).

En fin, la conclusión final es que hay que recurrir a modelos con ideas totalmente opuestas a las del modelo de la gota líquida visto anteriormente, como por ejemplo el modelo de capas, para poder explicar propiedades tales como el espín, la paridad, los momentos multipolares electromagnéticos, etc. Todo ello es consecuencia de la enorme complejidad del núcleo atómico.

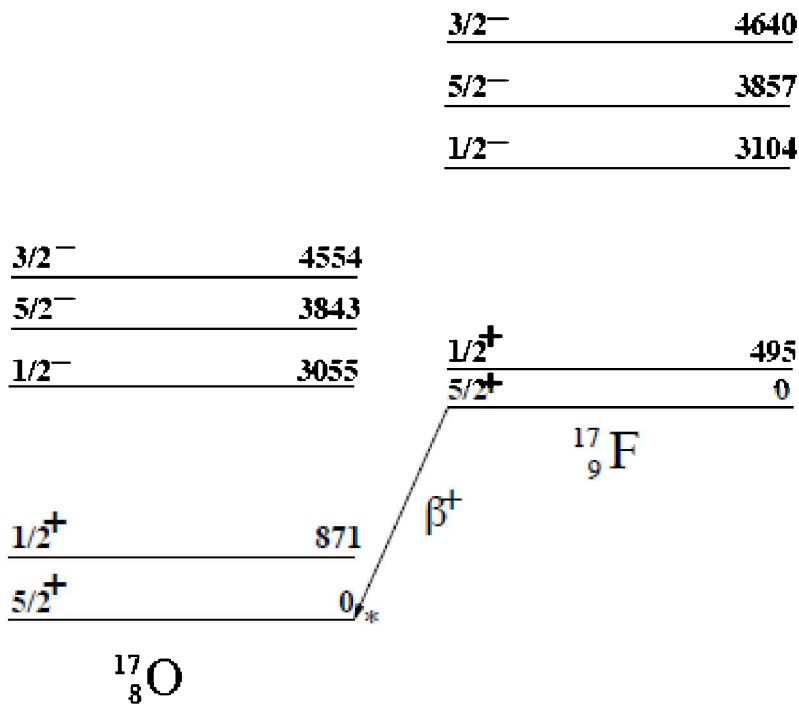


Figura 1.14: Esquema de niveles nucleares de los dos núcleos espejo ^{17}O y ^{17}F, que forman un doblete de isospín (T = 1/2). El valor de la energía de cada nivel se suele representar a la derecha y las unidades suelen ser keV. A la izquierda de cada nivel aparecen los números cuánticos de espín–paridad (J^P). La diferencia de masas entre estados fundamentales es $M(^{17}\text{F}) - M(^{17}\text{O})$ = 2,76 MeV. El ^{17}O es estable (en este texto, se imprime un asterisco * a la derecha del nivel para identificar a los estables) y el ^{17}F es inestable β^+ con $t_{1/2}$ = 64, 49 s.

1.8 Problemas

1.1 Trayectorias en un campo magnético

Iones de litio de carga unidad liberados en un ánodo caliente son acelerados mediante una diferencia de potencial de 400 V aplicada entre ánodo y cátodo. Posteriormente se les hace pasar por un orificio practicado en el cátodo para entrar en un campo magnético uniforme y perpendicular a la dirección del movimiento de 8×10^{-2} T, siendo los radios de lasórbitas de 8,83

y 9,54 cm, respectivamente. Calcúlense los números másicos de los isótopos de litio. al es la resolución del dispositivo?

1.2 Energía de ligadura de núcleos

La medida de la diferencia de las energías de ligadura entre núcleos isóbaros espejo se emplea para obtener evidencia de la independencia de carga de la interacción nuclear (es decir, las fuerzas protón–protón, protón– neutrón y neutrón-neutrón son aproximadamente iguales). Se pide:

a) Utilizando como datos las masas atómicas del par (^{15}O, ^{15}N) calcular la diferencia entre sus energías de ligadura. Calcular también la diferencia en la energía de ligadura por nucleón para el par de isóbaros espejo (^{23}Na, ^{23}Mg). Explicar la diferencia.

b) Suponiendo que dicha diferencia se debe exclusivamente a la diferencia de las energías de Coulomb, encontrar el valor de los radios nucleares de ambos núcleos.

1.3 Energía en la desintegración beta

Conocidas las masas (atómicas, en unidades de masa atómica, uma o u) del hidrógeno (1,0078), del deuterio (2,0141) y del helio (4,0026), y sabiendo que los valores *Q* de reacción correspondientes a las reacciones nucleares:

$$^{31}\mathrm{P(d,\alpha)^{29}Si} \qquad ^{29}\mathrm{Si(d,p)^{30}Si} \qquad ^{30}\mathrm{Si(d,p)^{31}Si}$$

son, respectivamente, 8,158, 8,388 y 4,364 MeV, calcular la energía máxima de la desintegración β^- del ^{31}Si.

1.4 Fórmula semiempírica de la masa

A partir de la expresión para la energía de ligadura nuclear *B*(*A*, *Z*) empleada en la fórmula semiempírica de la masa (1.36) de Weizs¨acker se pide:

a) Determinar el número atómico del núcleo más estable para un número másico dado.

b) Estudiar la estabilidad del ^{235}U frente a la emisión de un

protón, un neutrón y una partícula α y encontrar la energía de las partículas α emitidas de forma espontánea. Compárese el resultado de esta predicción con el valor experimental.

c) Calcular el valor del número másico a partir del cual el proceso de desintegración α resulta energéticamente favorable.

d) Averiguar si el nucleido radiactivo ^{138}Xe es un emisor β^- ó β^+.

Datos: α_V = 15,8 MeV, α_S = 18,3 MeV, α_C = 0,7 MeV, α_A = 23,2 MeV, α_P = 11,2 MeV, m_p = 1,0073 u, m_n = 1,0087 u, m_α = 4,0015 u y 1 u = 931,5 MeV/c^2.

1.5 Energías de separación nucleónica

Partiendo de los valores de las energías de separación S_n y S_p que se dan en la tabla 1.5, se pide:

a) Obtener conclusiones acerca de las energías de ligadura del último protón o neutrón en los pares de núcleos espejo (^{17}O, ^{17}F) y (^{41}Ca, ^{41}Sc), intentando establecer un comportamiento general o sistemático.

b) Comparar las separaciones energéticas de los nucleones en los núcleos con igual número de protones o neutrones (ejemplos: S_n para ^{16}O y ^{17}F, S_p para ^{16}O y ^{17}O).

c) Utilizando la sistemática anterior construir una tabla de valores de S_n y S_p correspondiente a los núcleos ^{56}Ni, ^{57}Ni y ^{57}Cu.

Tabla 1.5: Defectos de masa y energías de separación de varios núcleos.

Núcleo	Δ (MeV)	S_n (MeV)	S_p (MeV)
^{16}O	−4,737	15,66	12,13
^{17}O	−0,810	4,14	13,78
^{17}F	1,952	16,81	0,60
^{40}Ca	−34,047	15,64	8,33
^{41}Ca	−35,138	8,36	8,89
^{41}Sc	−28,644	16,19	1,09
^{208}Pb	−21,759	7,37	8,01
^{209}Pb	−17,624	3,94	8,15
^{209}Bi	−18,268	7,46	3,80

1.6 Momento cuadrupolar

a) Determinar la expresión clásica del momento cuadrupolar eléctrico de un núcleo. Obtener también la expresión cuántica correspondiente.

b) Comprobar que el momento cuadrupolar eléctrico para una esfera de carga uniforme y radio R es nulo.

c) Obtener una expresión para el momento cuadrupolar eléctrico de un núcleo pesado suponiendo una densidad de carga uniforme descrita por un esferoide homogéneo de semieje mayor a y menor b. Demostrar que, para excentricidades pequeñas, el momento cuadrupolar puede también escribirse como:

$$Q = \frac{4}{5} Z R_0^2 \delta$$

con R_0 el radio promedio del núcleo y δ un parámetro de deformación.

d) Estimar el tamaño y deformación del lutecio ^{176} Lu y protactinio ^{233} Pa si sus momentos cuadrupolares son Q = + 4,2 by Q = −3 b, respectivamente. Tomar para la densidad nuclear el valor ρ = 0,17 fm^{-3}.

1.7 Energía culombiana

Calcular el valor del cociente entre las energías de Coulomb nucleares obtenidas suponiendo que la carga eléctrica del núcleo Ze se distribuye de forma homogénea en todo el volumen de una esfera de radio R o sólo sobre la superficie de la misma.

1.8 Magnetón nuclear

a) El magnetón nuclear se define como $\mu_N = (e\hbar)/(2m_p)$, con m_p la masa del protón. Calcular el valor de μ_N en unidades de MeV/T.

b) Calcular el momento dipolar magnético del protón si se le supone considerado como una esfera de carga uniforme de radio R = 1,5 fm que gira en torno a su eje con velocidad angular w. Comparar con su expresión cuántica. **c)** Repetir el cálculo anterior pero suponiendo ahora que toda su carga está distribuida de forma uniforme sobre su superficie.

1.9 Energía culombiana

La sección eficaz diferencial para la dispersión el ástica de electrones reltivistas de energía $E \gg m_e c^2$ por un potencial electrostático $\phi(\vec{r})$ viene dada, en la aproximación de Born y sin tener en cuenta el espín del electrón por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\hbar c}\right)^4 \left[e \int \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\,\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}\right]^2$$

con $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ la transferencia de momento.

a) Calcular la sección eficaz diferencial para el potencial de Coulomb apantallado $\phi(\vec{r}) = \beta e^{-\mu r}/r$, con $\beta = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} eZ$ y μ una constante. Comprobar que si $\mu \to 0$ se obtiene la sección eficaz diferencial Rutherford $(d\sigma/d\Omega)_R$.

b) Demostrar que si se representa al núcleo por una distribución contínua de carga $\rho(\vec{r}) = eZf(\vec{r})$ con $\int f(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1$, la sección eficaz diferencial se escribe ahora como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} \left[\int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\,\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}\right]^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} [F(\vec{q})]^2$$

donde $F(\vec{q})$ es el factor de forma nuclear.

c) Obtener una expresión para el radio cuadrático medio nuclear, $\langle r^2 \rangle$, en términos del factor de forma para $q^2 \rightarrow 0$.

1.10 Factor de forma nuclear

a) Obtener una expresión para el factor de forma y el radio cuadrático medio de un núcleo pesado descrito por una distribución esférica uniforme de carga dada por $\rho(r) = 3/(4\pi R^3)$ con R el radio.

b) Demostrar que a partir de una distribución de carga exponencial para el protón de la forma $\rho(r) = \rho_0 \exp(-M_v r)$, el factor de forma que se obtiene corresponde a la denominada fórmula del dipolo $G(q^2) = [1 + q^2/M_v^2]^{-2}$. Comprobar que para $M_v = 0{,}84$ GeV el radio cuadrático medio del protón es 0,8 fm.

1.11 Estructura nuclear

Se denominan estados isóbaros análogos (*IAS*, de sus siglas en inglés, *Isobar Analogue States*) a aquellos estados de isóbaros diferentes, miembros de un mismo multiplete de isospín, con propiedades de espín, paridad y espaciado energético muy similares entre sí. La figura 1.15 muestra algunos de los niveles energéticos del conjunto de isóbaros ^{33}P, ^{33}S, ^{33}Cl y ^{33}Ar. Se pide:

a) Identificar los estados que pertenezcan a los multipletes de isospín más bajos.

b) Estimar la energía del estado excitado más bajo con $T = 3/2$ en el ^{33}S y compararla con el resultado experimental.

c) Estimar también la energía del estado fundamental del ^{33}Ar con respecto a la del ^{33}S.

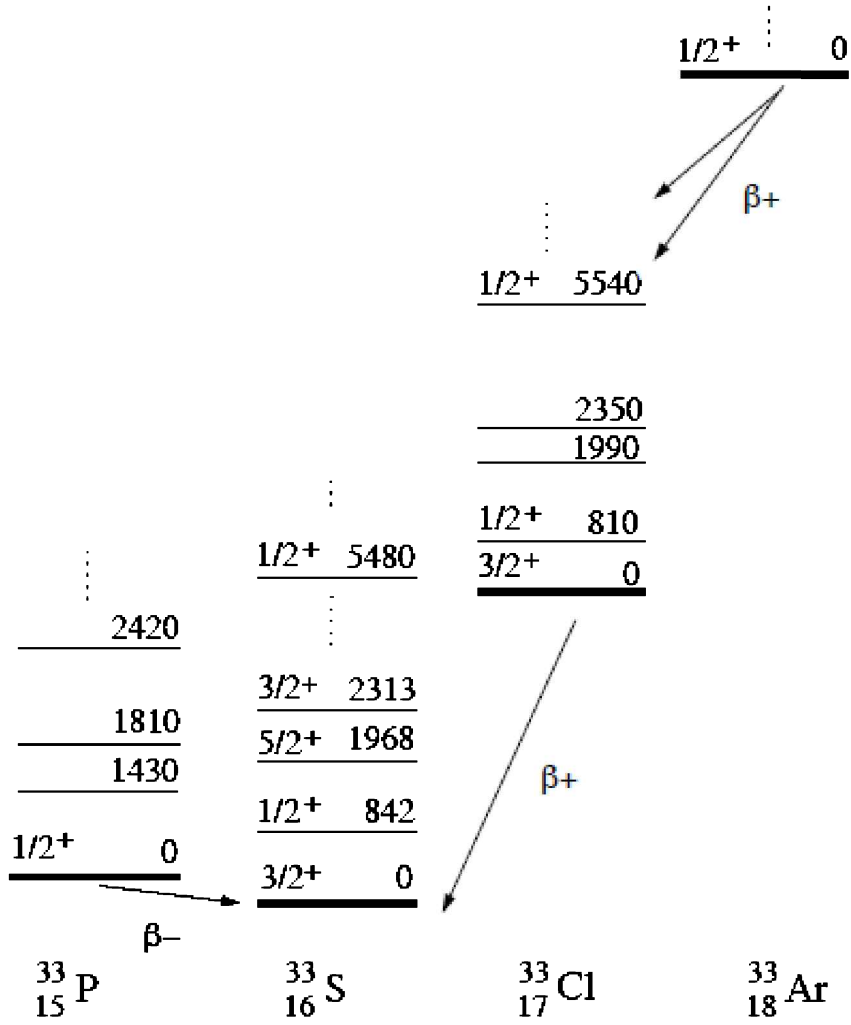


Figura 1.15: Diagrama de energías para los isóbaros con A = 33.

1.12 Isospín nuclear

Demostrar que la energía de los estados isóbaros análogos miembros de un multiplete de isospín puede escribirse como:

$$Mc^2 = a + bT_3 + cT_3^2$$

con a, b y c coeficientes constantes. Obtener una expresión para estos coeficientes y establecer la condición sobre el isospín para

poder obtenerlos experimentalmente.

---

[1]La sección eficaz se describe con detalle en la sección 5.2 del Capítulo 5, dedicado al estudio de las interacciones de las partículas con la materia.

[2]J. Chadwick, *Nature*, 129 (1932) 312.

[3]H. F. Ehrenberg *et al.*, *Phys. Rev.*, 113 (1959) 666.

[4]Una compilación de datos y referencias puede verse en C. W. de Jager *et al.*, *Atomic Data and Nuclear Tables*, **14** (1974) 479 y en la misma revista, **36** (1987) 495.

[5]E. G. Kessler *et al.*, *Phys. Lett.*, A255 (1999) 221.

[6]El llamado *factor giromagnético*, γ, es el factor de proporcionalidad entre el momento dipolar y elmomento angular ($\mu = \gamma j \hbar$). El factor g tiene en cuenta que el momento magnético se mide en magnetones ($\mu = g\mu_B j$ para el electrón y $\mu = g\mu_N j$ para los nucleones.)

[7]En este texto se utilizan los dos anglicismos *prolato* y *oblato*, envezdeovalado yachatado, que son los equivalentes en castellano. Estos últimos son los que deberían de utilizarse.

2. La fuerza nuclear: El deuterón. Interacción N–N

El deuterio, descubierto por Urey[1] en 1932, es uno de los isótopos del hidrógeno, cuya abundancia isotópica es $1{,}5\times10^{-4}$. El otro isótopo del hidrógeno es el tritio, inestable, con $t_{1/2}(^3\mathrm{H}) = 12{,}32$ a˜nos. El hidrógeno y sus dos isótopos tienen un papel importante en física nuclear. Los núcleos respectivos son conocidos por un nombre distinto: protón, deuterón y tritón para el $^1\mathrm{H}$, $^2\mathrm{H}$ y $^3\mathrm{H}$, respectivamente.

En este Capítulo se aborda el estudio del deuterón, sistema p-n más elemental ligado por la fuerza nuclear. Tiene mucha importancia porque informa sobre las propiedades de dicha fuerza. El Capítulo también aborda la descripción de las reacciones *N–N*, que ayudará a completar el estudio de la fuerza nuclear.

Para la física nuclear, los constituyentes de los núcleos son el protón y el neutrón, que pertenecen a la familia de los hadrones.[2] También se sabe que los hadrones están compuestos por entes más fundamentales llamados quarks. El modelo de quarks, explica las propiedades del protón y del neutrón como entes compuestos por tres quarks (estados *qqq*).

La interacción fuerte fundamental es la que tiene lugar entre quarks y se explica por el intercambio de gluones (de espín 1). Esta interacción es descrita por la cromodinámica cuántica (teoría QCD), nombre que recuerda que el origen de la fuerza fuerte es una propiedad de los quarks bautizada con el nombre de color. Esta fuerza aumenta con la distancia y

confina a los quarks dentro de los hadrones. La interacción entre nucleones es una interacción a muy peque˜na distancia (algunos fm) y se explica por el intercambio de mesones (estados qq). Se cree que es una manifestación a gran distancia de la fuerza entre quarks (igual que las fuerzas de Van der Waals, que explican la formación de las moléculas por la interacción a gran distancia entre átomos).

2.1 El deuterón, propiedades y números cuánticos

El deuterón es un sistema ligado (p, n), único sistema estable formado por dos nucleones, cuya masa es[3] m_d = 1875,612762(75) MeV/c^2 y la energía de ligadura E_L = 2,22456612 (48) MeV, que puede obtenerse, por ejemplo, mediante tres métodos distintos:[4]

1. Por doblete de masas. En efecto, se toman, por ejemplo, dos compuestos con A = 84 (el ciclohexano: C_6 H_{12} y el hexadeuterobenceno: C_6 D_6)y se mide la diferencia de sus masas $M(C_6\ H_{12}) - M(C_6D_6)$; también podría utilizarse otro doblete: $M(C_5D_{12}) - M(C_6D_6)$. El resultado es:

$$E_L = [\mathcal{M}(^1\mathrm{H}) + M_n - \mathcal{M}(^2\mathrm{H})]c^2 = 2,22463(5)\ \mathrm{MeV} \qquad (2.1)$$

2. Por captura radiativa, llamada así a la emisión de fotones siguiendo a la captura de un neutrón térmico (cuya energía es despreciable, ya que vale 0,025 eV); ^{1}H(n, γ)^{2}H. Se mide la energía del fotón emitido, que resulta ser igual a la energía de ligadura del deuterón.

3. Por foto-disociación, reacción inversa a la anterior, $\gamma + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^1\mathrm{H} +$ n. La energía del fotón necesaria para romper el deuterón es precisamente igual a la energía de ligadura.

Los números cuánticos del deuterón son: espín–paridad $J^P = 1^+$, isospín $T = 0$. Como siempre, la paridad (+) da el comportamiento de la función de ondas espacial $|d\rangle$ bajo una reflexión espacial respecto al origen. Como el deuterón es un sistema compuesto por un protón y un

neutrón (con espín $\vec{s}_{\mathrm{p}}$ y $\vec{s}_{\mathrm{n}}$ respectivamente) moviéndose con un momento angular orbital $\vec{L}$, sus números cuánticos podrán construirse como sigue;

- su momento angular total o espín será $\vec{J} = \vec{s}_{\mathrm{p}} + \vec{s}_{\mathrm{n}} + \vec{L}$,
- su paridad vendrá dada por $P(\mathrm{d}) = P(\mathrm{p}) \times P(\mathrm{n}) \times P(L)$.

El valor de $P(\mathrm{p}) = P(\mathrm{n}) = +$, por convenio (los nucleones pertenecen al octete $J^P = 1/2^+$ de SU(3) *de sabor* de quarks) y $P(L)$ es la paridad debida al movimiento orbital, ligada al comportamiento de los armónicos esféricos:

$$Y_{LM}(\theta, \phi) \longrightarrow Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$$

o sea, $P(L) = (-1)^L$; por lo que, como la paridad del deuterón $P_{\mathrm{d}} = +$,

entonces el momento angular orbital L debe ser par. Esto implica que sólo se tienen dos posibilidades, y el deuterón será mezcla de los dos estados:

$L = 0$ (onda S): estado $^3S_1$ y $L = 2$ (onda D): estado $^3D_1$.

La notación utilizada para los estados es la que se sigue en espectroscopía: $^{2s\,+\,1}L_J$, siendo L la denominación de la onda que corresponde al valor del momento angular orbital, según la secuencia *S*, *P*, *D*, …, para $L = 0,1,2, \ldots$

Por supuesto, el espín $J = 1$ es un buen número cuántico, es decir, se conserva; sin embargo, los dos valores del momento angular orbital $L = 0,2$ (que se denominan ondas *S* y *D*) son posibles y el deuterón puede encontrarse en cualquiera de los dos estados de momento angular orbital. La dinámica de las fuerzas nucleares será la que dará la probabilidad de encontrar al deuterón en cada uno de estos estados.

El tama˜no del deuterón ha sido medido (su radio de masa),

obteniéndose, $R_d = \sqrt{r^2} = 1{,}975\ (3)$ fm. Su radio de carga es ligeramente mayor: R_{ch} = 2,130 (10) fm.

Sus momentos electromagnéticos han sido determinados. El momento dipolar magnético, μ_d = 0,8574382284 (94) μ_N y el cuadrupolar eléctrico, Q_d = 0,2859 (3) fm^2 (medido por Bishop *et al.*, 1979). Estos valores implican que el deuterón es una mezcla de estados $^3S_1$ (96 %) y $^3D_1$ (4 %) como se demostrarámás adelante.

Un sistema de dos nucleones tipo pp o nn es un sistema de fermiones (son partículas de espín 1/2) indistinguibles cuánticamente (para ampliar estos conceptos consúltese la sección 16.4). Por lo tanto, como en el caso de sistemas de electrones, su función de ondas debe ser totalmente antisimétrica si se intercambian los fermiones (es el contenido del principio de exclusión de Pauli.) Pero, si además se tiene en cuenta el isospín, entonces cualquier sistema nucleón– nucleón, como el caso np, también obedece al mismo principio de exclusión. El isospín del sistema *N–N* puede tomar, en principio, los valores T = 0,1 (ya que $t_p = t_n = 1/2$). Pero por los argumentos de simetría expuestos, si se tiene en cuenta el isospín, la función de ondas del deuterón:

$$|\mathrm{d}\rangle = |\phi(\vec{r})\rangle_L |\chi\rangle_J |\psi\rangle_T$$

debe ser totalmente antisimétrica bajo intercambio de los dos nucleones, ya que se trata de dos nucleones idénticos. La función espacial tiene la simetría del momento angular L (en el caso del deuterón, como L es par, es simétrica) y la función triplete de espín (porque $J_d = 1$) es simétrica. Por lo tanto, la función $|\psi\rangle_T$ de isospín debe ser antisimétrica, o sea, singlete:

$$|T = 0, T_0 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1/2, 1/2\rangle_1 |1/2, -1/2\rangle_2 - |1/2, 1/2\rangle_2 |1/2, -1/2\rangle_1\right\}$$

en donde los nucleones se han representado por la notación $|t, t_0\rangle$ que representa estados con isospín bien definido. Además, si fuera triplete, existirían los estados ligados (p, p) y (n, n). Por todo ello, el deuterón

tiene isospín $T_d = 0$, es decir, es un singlete de isospín.

En cuanto a la función de ondas de espín $|\chi\rangle_J$, que suele escribirse $|\chi_J = |J, M\rangle$, será simétrica bajo intercambio de los dos nucleones. Los valores propios del operador espín $J^2|J, M\rangle = J(J+1)\hbar^2|J, M\rangle$ y de su tercera componente $J_z|J, M\rangle = M\hbar|J, M\rangle$. El espín de los nucleones es 1/2; ello quiere decir que el operador espín $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ siendo $\vec{\sigma}$ las matrices 2 × 2 de Pauli (véase la sección 16.4). Por lo tanto, los valores propios del espín en estados de nucleones serán $s^2|s, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s, m_s\rangle$ y $s_z|s, m_s\rangle = m_s\hbar|s, m_s\rangle$; numéricamente $s^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$. Es frecuente usar el operador espín $\vec{s}$ o la matriz de Pauli $\vec{\sigma}$; la relación entre ambos es $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. A veces se omite la constante $\hbar$, que es la unidad de espín.

En conclusión, las magnitudes más importantes del deuterón, pueden verse en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Valores experimentales de magnitudes físicas del deuterón.

Masa (M_d)	1875,612762(75)	MeV
Energía de ligadura (E_L)	2,22456612(48)	MeV
Momento dipolar magnético (μ_d)	0,8574382284(94)	μ_N
Momento cuadrupolar eléctrico (Q_d)	0,2859(3)	fm^2
radio de carga (r_{ch})	2,130(10)	fm
radio de materia (r_m)	1,975(3)	fm

2.2 Función de ondas del deuterón

El deuterón es un estado cuántico formado por un protón y un neutrón con espín–paridad bien definidos ($J^P = 1^+$), pero es una mezcla de dos

estados con momento angular distinto (L = 0,2, es decir, onda S y onda D). Así pues la función de ondas se podrá escribir como una suma:

$$|\psi_d\rangle = a_S|^3S_1\rangle + a_D|^3D_1\rangle \qquad \text{con} \qquad a_S^2 + a_D^2 = 1 \qquad (2.2)$$

y esta función de ondas se obtendrá al resolver la ecuación de Schrödinger con el potencial que representa la interacción neutrón–protón. Un potencial central $V_c(r)$, que sólo depende del módulo de la distancia entre el protón y el neutrón es una simplificación que sólo puede dar lugar a la componente S. En efecto, un potencial central posee, por definición, simetría esférica y por lo tanto refleja propiedades de sistemas que tienen espín cero. Para que pueda dar lugar a una componente descrita por una onda D, se debería incluir en el potencial, al menos, un término *tensorial* del tipo $S_{12}(r)$, como se justificará más adelante a través de la expresión (2.15).

En coordenadas polares, las funciones de onda $^3S_1$ y $^3D_1$ del deuterón vienen dadas por el producto de una función radial $R_L(r)$, donde r es el módulo de la distancia entre el protón y el neutrón y una función de ondas dependiente del momento angular L y del espín S del sistema, de la forma

$$\mathcal{Y}^M_{JLS}(\theta,\phi) = \sum_{m_L,m_S} C(J,M|L,m_L;S,m_S)|L,m_L\rangle|S,m_S\rangle$$

que indica cómo los momentos angulares L y S se acoplan para dar el espín J = 1 del deuterón. C es el coeficiente de Clebsch–Gordan correspondiente.

La parte de la función de ondas que depende de L viene dada por los armónicos esféricos $|L,m_L\rangle = Y_{L,m_L}(\theta,\phi)$, mientras que la de espín, $|S, m_S\rangle$ para las tres proyecciones m_S = 1,0, −1 se puede escribir en función de los estados de espín de los nucleones:

$$|S,1\rangle = \alpha(1)\alpha(2)$$

$$|S,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)]$$

$$|S,-1\rangle = \beta(1)\beta(2)$$

siendo $\alpha = |1/2, +1/2\rangle$ y $\beta = |1/2, -1/2\rangle$, los dos estados de espín 1/2.

La condición de normalización de la parte radial es, sencillamente:

$$\int_0^\infty R_{\mathrm{L}}^*(r) R_{\mathrm{L}}(r) r^2 dr = 1 \qquad (2.3)$$

yanálogamente, las funciones angulares y de espín están debidamente normalizadas:

$$\langle L, m_{\mathrm{L}} | L', m'_{\mathrm{L}} \rangle = \delta_{L,L'} \delta_{m_{\mathrm{L}}, m'_{\mathrm{L}}} \qquad \text{y} \qquad \langle S, m_{\mathrm{S}} | S, m'_{\mathrm{S}} \rangle = \delta_{m_{\mathrm{S}}, m'_{\mathrm{S}}}$$

2.2.1 Función de ondas del estado $|^3S_1\rangle$ (onda *S*)

Tomando el eje *z* en la dirección de *J*, y limitándose a la componente $M = 1$ se tiene:

$$|^3S_1\rangle = \frac{u(r)}{r}\mathcal{Y}^1_{101} = \frac{u(r)}{r}Y_{00}\alpha(1)\alpha(2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{u(r)}{r}\alpha(1)\alpha(2) \qquad (2.4)$$

en donde $u(r)$ es la función de onda radial reducida, cuya definición es $u(r) = R_n(r)r$; $\alpha(i)$ da cuenta del estado $s_z = +1/2$ del protón ($i = 1$) y $s_z = +1/2$ del neutrón ($i = 2$), de forma que su acoplamiento (producto) da el valor esperado $S = 1$ del deuterón. El armónico esférico Y_{00} es una constante, lo que avala la isotropía del estado $|^3S_1\rangle$.

2.2.2 Función de ondas del estado $|^3D_1\rangle$ (onda *D*)

La expresión para la onda *D* es más compleja puesto que hay tres maneras de acoplar $L = 2$ con $S = 1$ para dar $J = 1$. Como en el caso anterior sólo se considera la proyección del espín del deuterón correspondiente a $M = 1$:

$$
\begin{aligned}
|^3D_1\rangle &= \frac{v(r)}{r}\mathcal{Y}^1_{121} \\
&= \frac{v(r)}{r}\sum_{m_L} C(1,1|2,m_L;1,1-m_L)Y_{L,m_L}(\theta,\phi)\chi_{1,1-m_L} \\
&= \frac{v(r)}{r}\left[\sqrt{\frac{1}{10}}Y_{2,0}\chi_{1,1} - \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{2,1}\chi_{1,0} + \sqrt{\frac{6}{10}}Y_{2,2}\chi_{1,-1}\right]
\end{aligned}
$$

siendo ahora $v(r)$ la función de onda radial reducida para la onda *D*. Queda finalmente:

$$
\begin{aligned}
|^3D_1\rangle = \frac{v(r)}{r} \Bigg[& \frac{1}{\sqrt{32\pi}}(3\cos^2\theta - 1)\alpha(1)\alpha(2) \\
& + \frac{3}{\sqrt{32\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}(\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)) \\
& + \frac{3}{\sqrt{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}\beta(1)\beta(2)\Bigg]
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

donde se han utizado, de nuevo, las funciones $\alpha(i)$ y $\beta(i)$ que describen el estado de espín $s_z = +1/2$ y $s_z = -1/2$ del nucleón, respectivamente, de forma que al acoplarse con el armónico esférico correspondiente, se reproduce el valor esperado $S = 1$ del deuterón. Existen funciones análogas para los estados con tercera componente $M = 0, -1$; pero con la función $M = +1$ es suficiente pues es con ella con la que se realizarán los cálculos en los parágrafos siguientes.

La normalización de la función de ondas del de uterón exige que se

cumpla
$\langle \psi_{\mathrm{d}} | \psi_{\mathrm{d}} \rangle = 1$, **es decir** $a_S^2 \langle {}^3S_1 | {}^3S_1 \rangle + a_D^2 \langle {}^3D_1 | {}^3D_1 \rangle = 1$,
quedando:

$$\langle {}^3S_1 | {}^3S_1 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{u^2(r)}{r^2} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

análogamente para $^3D_1$, lo que conduce a:

$$\langle \psi_{\mathrm{d}} | \psi_{\mathrm{d}} \rangle = a_S^2 \langle {}^3S_1 | {}^3S_1 \rangle + a_D^2 \langle {}^3D_1 | {}^3D_1 \rangle = 1$$

que es simplemente la normalización anunciada en (2.2).

2.2.3 Tamaño característico del deuterón

En las funciones radiales $u(r)$ y $v(r)$ introducidas anteriormente, interviene r cuyo significado es la distancia de separación entre el protón y el neutrón; al tratarse de dos partículas con masa casi igual, la posición del protón viene dada por $\vec{r}/2$ y la del neutrón por $-\vec{r}/2$, de forma que el tamaño característico (radio) del deuterón vendrá dado por el valor cuadrático medio del radio:

$$r_{\mathrm{d}} = \frac{1}{4} \int_0^\infty [u^2(r) + v^2(r)] r^2 dr \qquad (2.6)$$

2.2.4 Momento dipolar magnético del deuterón

Tomando como hipótesis que el momento dipolar magnético del deuterón, μ_{d}, es la suma del de sus constituyentes:

$$\mu_{\mathrm{p}} = 2,79271(2)\,\mu_N \qquad \mathbf{y} \qquad \mu_{\mathrm{n}} = -1,91315(7)\,\mu_N$$

el resultado es 0,87956(7) μ_N, es decir, ligeramente mayor que el valor medido para el deuterón:

$$\mu_{\mathrm{d}} = 0,8574382284(94)\,\mu_N \tag{2.7}$$

Esto quiere decir que una simple superposición de los dos momentos magnéticos de los constituyentes no explica el valor experimental. En otras palabras, como se demostrará más adelante, el deuterón no es un estado puro en onda *S*(momento angular orbital entre constituyentes *L* = 0).

En efecto, el momento dipolar magnético, en función del momento dipolar magnético de los constituyentes es:

$$\vec{\mu}_{\mathrm{d}} = \left(g_s^{(\mathrm{p})} \vec{s}_{\mathrm{p}} + g_s^{(\mathrm{n})} \vec{s}_{\mathrm{n}} + \frac{1}{2}\vec{L} \right) \frac{\mu_N}{\hbar} \tag{2.8}$$

en donde $\vec{L}$ es el momento angular del deuterón ($L = 2\vec{\ell}_{\mathrm{p}}$, siendo ℓ_{p} el momento angular del protón respecto al centro de masas, ya que las masas del protón y neutrón son prácticamente iguales). Se puede, por lo tanto, reescribir la expresión anterior (2.8) de la forma:

$$\vec{\mu}_{\mathrm{d}} = \frac{\mu_N}{2\hbar} \left\{ \left(g_s^{(\mathrm{p})} + g_s^{(\mathrm{n})} \right) \vec{S} + \left(g_s^{(\mathrm{p})} - g_s^{(\mathrm{n})} \right) \left(\vec{s}_{\mathrm{p}} - \vec{s}_{\mathrm{n}} \right) + \vec{L} \right\} \tag{2.9}$$

en donde $\vec{S} = \vec{s}_{\mathrm{p}} + \vec{s}_{\mathrm{n}}$ y $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. En estaúltima expresión, el término $(\vec{s}_{\mathrm{p}} - \vec{s}_{\mathrm{n}})$ se anula; no puede contribuir ya que el deuterón es un estado triplete de espín (*S* = 1) y el término $(\vec{s}_{\mathrm{p}} - \vec{s}_{\mathrm{n}})$ podría conectar el estado *S* = 1 con *S* = 0 y esteúltimo, el singlete de espín, no existe.[5]

El valor teórico del momento magnético del deuterón se obtiene calculando el valor esperado:

$$\mu_{\mathrm{d}} = \langle \psi_{\mathrm{d}} \mid \hat{\mu}_0 \mid \psi_{\mathrm{d}} \rangle \tag{2.10}$$

de la tercera componente del operador momento magnético $\vec{\mu}$, pero calculada entre estados con momento angular y espín bien definidos; es decir, en el caso del deuterón se utilizará el estado $|J = 1, M = J\rangle$, de proyección de espín $M = +1$ máxima. Así pues al sustituir la función de ondas del deuterón, vista en (2.2), en esta última expresión, aparecerán dos sumandos:

$$\mu_d = a_S^2\langle {}^3S_1|\mu_0|{}^3S_1\rangle + a_D^2\langle {}^3D_1|\mu_0|{}^3D_1\rangle = a_S^2\,\mu_d({}^3S_1) + a_D^2\,\mu_d({}^3D_1) \quad (2.11)$$

uno con las funciones correspondientes al estado $|{}^3S_1\rangle$ visto en (2.4) y otro con las funciones que representan el estado $|{}^3D_1\rangle$ visto en (2.5). Los valores esperados que aparecen en la anterior expresión pueden resolverse aplicando el teorema de Landé:

$$\langle JM|\hat{\mu}_0|JM\rangle = \frac{1}{J(J+1)}\langle JM|(\vec{\mu}\cdot\vec{J})\hat{J}_0|JM\rangle \qquad (2.12)$$

donde $\hat{J}_0$ es la tercera componente del operador $\vec{J}$: $J_0|JM\rangle = M\hbar|JM\rangle$, quedando:

$$\mu_d = \frac{M}{J(J+1)}\langle JM|\frac{\mu_N}{2\hbar}\left\{(g_s^{(p)} + g_s^{(n)})\vec{S}\cdot\vec{J} + \vec{L}\cdot\vec{J}\right\}|JM\rangle \qquad (2.13)$$

En el cálculo aparecen los productos $\langle\vec{S}\cdot\vec{J}\rangle$ y $\langle\vec{L}\cdot\vec{J}\rangle$, que se calculan recordando que $\vec{J} = (\vec{L} + \vec{S})$, de donde se puede despejar el valor del producto buscado a partir de las expresiones de $(\vec{J} - \vec{L})^2 = \vec{J}^2 + \vec{L}^2 - 2\vec{J}\cdot\vec{L}$ y de $(\vec{J} - \vec{S})^2 = \vec{J}^2 + \vec{S}^2 - 2\vec{J}\cdot\vec{S}$. Para estados de momento angular bien definido, los valores propios del operador J^2 $|JM = J(J + 1)\hbar^2|JM\rangle$, con lo que es fácil verificar que para cada onda posible,

$$(1)\ \mu_{\mathrm{d}}(^3S_1) = \frac{1}{2}(g_s^{(\mathrm{p})} + g_s^{(\mathrm{n})})\mu_N = \mu_{\mathrm{p}} + \mu_{\mathrm{n}} = 0,880\,\mu_N$$

$$(2)\ \mu_{\mathrm{d}}(^3D_1) = \frac{1}{4}\left\{3 - (g_s^{(\mathrm{p})} + g_s^{(\mathrm{n})})\right\}\mu_N = 0,310\,\mu_N$$

con lo que para explicar el valor experimental del momento dipolar visto en (2.7), $\mu_{\mathrm{d}} = 0{,}857\mu_N$, se encuentra la mezcla de ondas posibles en las proporciones: $a_{\mathrm{S}}^2 = 0,96$ y $a_{\mathrm{D}}^2 = 0,04$ adelantadas.

2.2.5 Momento cuadrupolar eléctrico del deuterón

Se sabe que Q_{d} = 2,859(3) *mb*. Los nucleones son partículas con simetría de carga esférica: $Q_{\mathrm{p}} = Q_{\mathrm{n}} = 0$, lo que obliga a que para obtener un momento cuadrupolar no nulo exista una componente con $L \neq 0$ ya que si el deuterón fuese un estado puro en onda $S(L = 0)$ sería esférico. Por definición:

$$\hat{Q}_0 = (3z^2 - r^2) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \phi)$$

que, en caso de ser no nulo, implica que los números cuánticos del sistema cumplen $J \geq 1$ y $L \geq 1$. En el caso del deuterón hay que tener en cuenta el significado de *r* como se ha presentado en el parágrafo 2.2.3, así pues en este caso, el momento cuadrupolar eléctrico se define $\hat{Q}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{4}\hat{Q}_0$.

Utilizando el mismo modelo mezcla de onda *S* y onda *D* para el deuterón según la expresión vista en (2.2) anteriormente, se obtiene:

$$Q_{\mathrm{d}} = a_{\mathrm{S}}^2\langle\, ^3S_1|\hat{Q}_{\mathrm{d}}|^3S_1\rangle + a_{\mathrm{D}}^2\langle\, ^3D_1|\hat{Q}_{\mathrm{d}}|^3D_1\rangle + 2a_{\mathrm{S}}a_{\mathrm{D}}\langle\, ^3S_1|\hat{Q}_{\mathrm{d}}|^3D_1\rangle \quad (2.14)$$

que es una suma de tres términos. Para calcularlo, se necesita conocer explícitamente la expresión de los estados $|^3S_1\rangle$ y $|^3D_1\rangle$ con *J, L* y *S* bien

definidos, que se han visto más arriba. El primer elemento de matriz del momento cuadrupolar Q_d en la ecuación (2.14), se anula ya que para estados con momento angular L = 0, el momento cuadrupolar Q = 0. El segundo, debe contener la suma de términos posibles para un valor de L dado, o sea, como L = 2, los valores posibles de la tercera componente son m_L = 2,1,0, quedando:

$$Q_d(^3D_1) = \frac{6}{10}\langle 22|Q_0|22\rangle + \frac{3}{10}\langle 21|Q_0|21\rangle + \frac{1}{10}\langle 20|Q_0|20\rangle$$

$$= -\frac{1}{20}\langle r^2\rangle_D$$

puesto que las integrales $\langle 22|Y_{20}|22\rangle = -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$, $\langle 21|Y_{20}|21\rangle = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$, y $\langle 20|Y_{20}|20\rangle = +\frac{1}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$. Si se incluye además el tercer término de la expresión (2.14) resulta:

$$Q_d = \frac{\sqrt{2}}{10}a_S a_D\langle r^2\rangle_{SD} - \frac{1}{20}a_D^2\langle r^2\rangle_D$$

La integral

$$\langle r^2\rangle_D = \int_0^\infty R_D^*(r)r^2R_D(r)\cdot r^2dr = \int_0^\infty v^2(r)\cdot r^2dr,$$

puede estimarse tomando el valor cuadrático medio de r, según la expresión (2.6) como el cuadrado del radio del deuterón, $\frac{1}{4}\langle r^2\rangle_D \approx R_d^2$, obteniéndose:

$$Q_d(^3D_1) = -0,77\ \mathrm{fm}^2.$$

La conclusión es que sólo con el término a_D^2 (onda D pura) no puede explicarse el valor experimental del momento cuadrupolar eléctrico Q_d

del deuterón. Esto era de suponer una vez visto el resultado obtenido con el momento magnético dipolar.

El tercer término, que conecta estados onda *S* con onda *D*, es no nulo porque el operador momento cuadrupolar eléctrico transporta $L = 2$. En este caso, aparece $\langle r^2 \rangle_{SD} = \int_0^\infty u(r)v(r) \cdot r^2 dr$, un poco más complicado de calcular, pero permite acotar a_D^2 entre 0,04 y 0,07. Para que exista este tipo de mezcla, es necesario que el hamiltoniano, que no conmuta con L^2, conecte estados *S* y *D*, o sea $\langle {}^3S_1|H|{}^3D_1\rangle \neq 0$, lo que se consigue con un potencial que contenga un término tensorial:

$$S_{12} = \frac{3}{r^2}(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \qquad (2.15)$$

Esta forma del potencial puede explicarse como la interacción de dos dipolos magnéticos, o lo que es lo mismo, una interacción espín–espín de los nucleones. En efecto, en electrodinámica clásica el potencial creado por un dipolo magnético $\mu_1$se expresa:

$$\vec{\mathcal{B}}_1(\vec{r}) = \frac{1}{r^3}\left[\frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\mu}_1\right] \qquad (2.16)$$

de forma que en presencia de otro dipolo magnético, μ_2, la interacción es de la forma: $-\vec{\mu}_2 \cdot \vec{\mathcal{B}}_1$. Un potencial tensorial como el de la expresión (2.15) depende de la orientación, $V(\vec{r})$, y cumple las leyes de simetría de la interacción fuerte: conservación de la paridad y de la inversión temporal.

El momento cuadrupolar no nulo del deuterón pone de manifiesto la necesidad de fuerzas tensoriales en la interacción *N–N*. Estas fuerzas favorecen que el espín y el vector posición que une el protón y el neutrón estén alineados $(\vec{s} \parallel \vec{r})$; por ello resulta que el deuterón es un núcleo *prolato* (en forma de aceituna). (Véase el ejemplo de la figura 2.1).

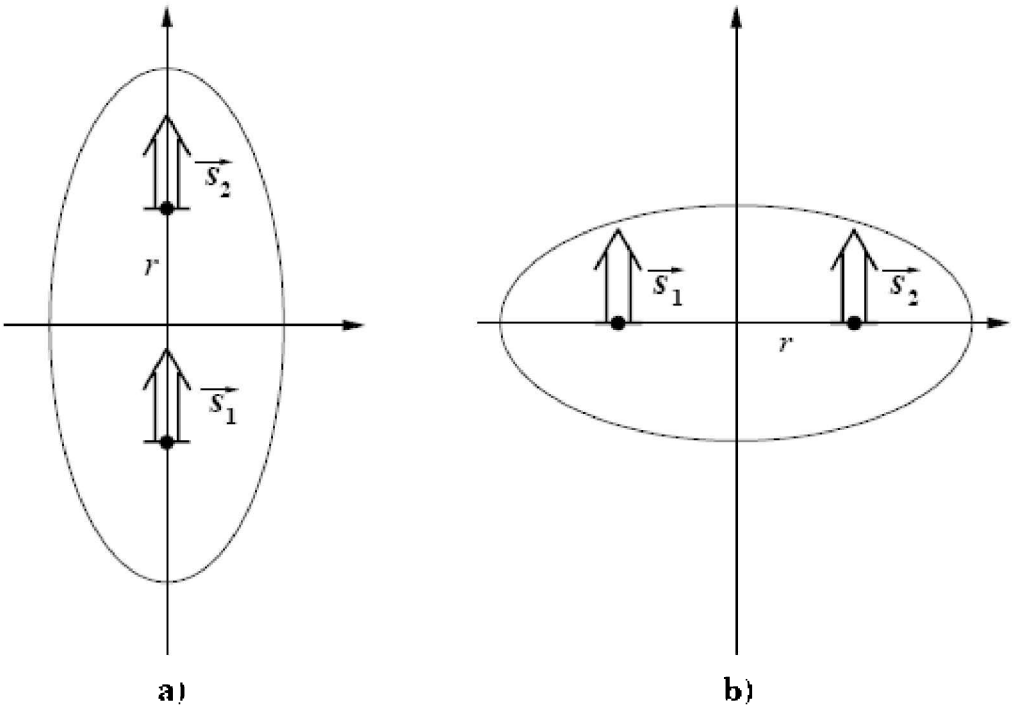


Figura 2.1: **a)** Explicación de la deformación *prolata* debida a una fuerza tensorial en la que el espín $(\vec{s}_i)$ es paralelo al vector que une los nucleones, como en el caso del deuterón o **b)** la fuerza es perpendicular y el núcleo sufriría una deformación tipo *oblato*.

Uno de los modelos que explican la necesidad de un término como S_{12} es el modelo de intercambio de un pión, propuesto inicialmente por Yukawa. Por consiguiente, el potencial *N*–*N* no puede ser descrito únicamente por términos centrales. La naturaleza de la fuerza nuclear es mucho más compleja que la de las fuerzas electromagnéticas y gravitatorias.

2.2.6 Función de ondas radial del deuterón

Se tomará el potencial más sencillo para describir la fuerza *N*–*N*: un pozo cuadrado de profundidad $-V_0$ y de alcance R_0 (véase la figura 2.2).

Evidentemente se trata de una aproximación puesto que este pozo tiene simetría esférica por definición y por lo tanto describe fuerzas centrales, lo que no corresponde a las fuerzas presentes en el deuterón, como se acaba de ver, en el que es necesario introducir fuerzas tensoriales (además de las centrales). El deuterón se supone

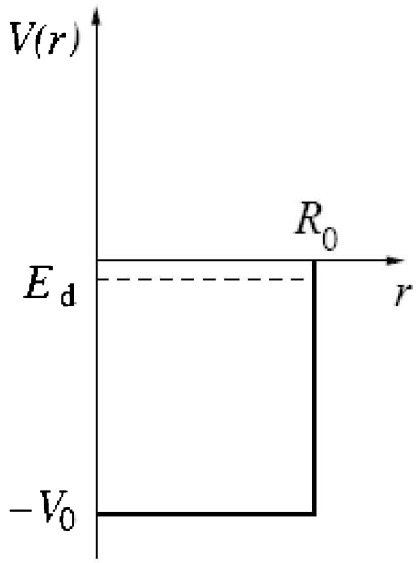


Figura 2.2: Sencillo pozo de potencial para explicar el deuterón.

un sistema cuántico no relativista; las masas de sus constituyentes son mucho mayores que las energías de ligadura. Por lo tanto, se aplicará la ecuación de Schrödinger. Al tratarse de un potencial central la solución ψ podrá escribirse de la forma:

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

siendo $R_{n\ell}$ solución de la ecuación radial:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2R_{n\ell}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_{n\ell}}{dr}\right)+\left[V(r)+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right]R_{n\ell}=ER_{n\ell}$$

que para el estado fundamental ($\ell = 0$), y tras el cambio $u(r) = rR_{n\ell}(r)$

queda:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)+\Big[V(r)-E\Big]u(r)=0} \tag{2.17}$$

siendo $\mu \simeq M_p/2$, la masa reducida del sistema.

Al tomar en consideración, para $V(r)$, la forma concreta del potencial de la figura 2.2, las soluciones de la ecuación de Schrödinger son:

$$\begin{aligned} r<R_0 \quad &\rightarrow \quad u(r)=A\sin(k_1 r)+B\cos(k_1 r) \\ r>R_0 \quad &\rightarrow \quad u(r)=Ce^{-k_2 r}+De^{k_2 r} \end{aligned} \tag{2.18}$$

quedando únicamente los términos con coeficientes A y C, para que $R(r)$ sea finita en $r = 0$ y se anule cuando $r \rightarrow \infty$. Se cumple:

$$\begin{aligned} \hbar k_1 &= \sqrt{2\mu(V_0+E_d)} \\ \hbar k_2 &= \sqrt{-2\mu E_d} \end{aligned} \tag{2.19}$$

en donde la energía de ligadura del deuterón $E_d = -2{,}225$ MeV, se toma negativa, para recordar que se trata de un estado ligado.

La condición de continuidad de la función de ondas $u(r)$ y su derivada, $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=R_0}$, ambas en R_0, conduce a:

$$\boxed{k_1 \cot(k_1 R_0) = -k_2} \tag{2.20}$$

ecuación trascendental que relaciona V_0 y R_0. Si se admite que $k_2 \ll k_1$, consecuencia de la pequeña energía de ligadura del deuterón, esta ecuación puede aproximarse: cot $\alpha \approx 0$, lo que implica que $k_1 R_0 \approx \frac{\pi}{2}$,

con lo que se logra la relación aproximada entre V_0 y R_0que se buscaba:

$$V_0 R_0^2 \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} = 100\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}^2$$

Tomando R_0 = 1, 975 fm, como valor del radio del deuterón, se tiene V_0 ≈ 30 MeV, profundidad del pozo nuclear. Podrá decirse que el valor ${}^3V_0$ ≈ 30 MeV, corresponde al estado triplete de espín. No existe estado singlete de espín ligado con este potencial (potencial estimado para el singlete de espín ${}^1V_0 \sim 200$ MeV). Está claro pues que la fuerza nuclear depende del espín.

La función de ondas $u(r)$, representada en la figura 2.3, dará la probabilidad de encontrar el nucleón a una distancia r del centro de masas:

$$P(r) = \frac{1}{4} \int r^2 |u(r)|^2 dr$$

Se puede calcular el valor medio de r, que puede aproximarse a la distancia que reduce en un factor $1/e$ la función de ondas vista en la ecuación (2.18), lo que representa la distancia media entre los nucleones (doble del radio):

$$\langle r \rangle \sim \frac{1}{k_2} \approx\ 4,3\ \mathrm{fm}$$

Este valor indica que los nucleones en el deuterón están bastante alejados en promedio, lo que era de esperar, debido a la pequeña energía de ligadura E_d y la profundidad del pozo V_0 encontrada.

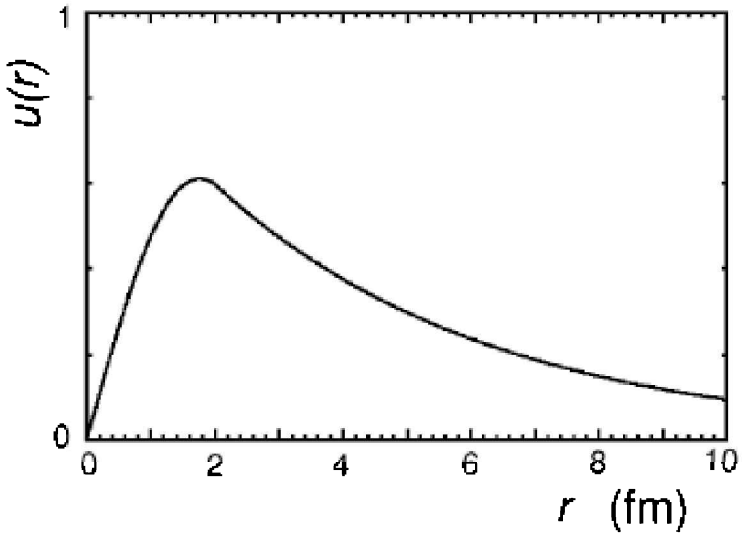


Figura 2.3: Función de ondas radial del deuterón.

2.3 Difusión *N–N*. Desfasajes

El sistema *N–N* ha sido ampliamente estudiado en los laboratorios de investigación de física nuclear. El método se basa en el análisis de colisiones pp, np (las fuentes de proyectiles n suelen obtenerse: en las líneas experimentales de los reactores nucleares o en un acelerador de partículas a través de la reacción ^{7}Li(p, n)^{7} Be, en la que se aceleran protones que inciden en ^{7}Li y se producen neutrones secundarios), que se completa con el estudio de colisiones pd y nd. En estos últimos el problema es que debe sustraerse la colisión no deseada (por ejemplo si se quiere estudiar pn utilizando pd, se sustraerá el ruido de fondo debido a pp).

2.3.1 Desarrollo en ondas parciales

La diferencia entre la presencia de un potencial o no, al resolver la ecuación de Schrödinger, se suele parametrizar introduciendo un

desfasaje, δ, en la onda que describe a la partícula; este desfasaje da la diferencia de fase entre la onda difundida y la onda antes de la difusión. Por ejemplo, la solución de la ecuación radial (2.17) en ausencia de potencial es de la forma $u \sim \sin(kr)$, siendo $p = \hbar k$ el momento de la partícula (onda), y si el potencial es no nulo, pero para valores de r grandes, cuando ya no se siente el potencial se tendría $u \sim \sin(kr + \delta)$. Luego el desfasaje informa sobre:

- la forma e intensidad del potencial y
- la dependencia con la energía de la sección eficaz.

Con ello se llega a una expresión para la sección eficaz de difusión:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell(k) \qquad (2.21)$$

que depende de los desfasajes δ_ℓ de cada una de las ondas ℓ que intervienen en la difusión. A baja energía (T < 20 MeV), el tratamiento de los desfasajes es muy interesante porque si un potencial tiene alcance R_0, el momento angular orbital de la difusión está limitado por:

$$\ell \leq \frac{|\vec{p}| \cdot R_0}{\hbar}$$

con lo que para la difusión p + p, si el momento $p \leq$100 MeV/c sólo interviene $\ell = 0$, la onda *s*, dando lugar a:

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0} \qquad (2.22)$$

luego existe una relación directa entre la sección eficaz de colisión a baja energía y el desfasaje δ_0.

2.3.2 Relación entre desfasaje y potencial *V*

Las soluciones de la ecuación radial de Schrödinger para la difusión por un pozo cuadrado:

$$\begin{aligned} r < R_0 \quad &\rightarrow \quad u_1(r) = \quad A\sin(k_1 r) \\ r > R_0 \quad &\rightarrow \quad u_2(r) = \quad C\sin(k_2 r + \delta) \end{aligned} \tag{2.23}$$

en donde se observa que la interacción produce un desfasaje δ ($\delta > 0$ si el potencial es atractivo). Se cumple:

$$\begin{aligned} \hbar k_1 \quad &= \sqrt{2\mu(V_0 + E)} \\ \hbar k_2 \quad &= \sqrt{2\mu E} \end{aligned}$$

y $E > 0$, por supuesto, ya que ahora el proyectil tiene energía positiva. Como se ve, se ha considerado que el nucleón incidente tiene una energía cinética dada por la ecuación no relativista, $E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2\mu}$.

Para el límite de energía nula ($E = 0$), la solución de la ecuación de ondas sería $u_2(r) = B + Dr$.

En el caso en el que hubiesen estados ligados porque V_0 es suficientemente profundo, se tendría $u_2(r) = Ce^{-k_2 r}$, o sea, lo visto en el caso del deuterón. La ecuación que relaciona V_0 y R_0 con E, aplicando de nuevo la condición de continuidad en R_0, es:

$$\boxed{k_2 \cot(k_2 R_0 + \delta) = k_1 \cot(k_1 R_0)} \tag{2.24}$$

de donde se puede obtener el desfasaje δ.

2.3.3 Aproximación de alcance efectivo

En el límite de energía nula $E \to 0$, suele utilizarse la parametrización de alcance efectivo:

$$\boxed{\sigma \to 4\pi a^2} \tag{2.25}$$

siendo a la longitud de difusión, que podría definirse como:

$$a = \lim_{k \to 0} \frac{\sin \delta_0}{k}$$

por simple inspección de la fórmula (2.22) anterior y al igual que antes, $\hbar^2 k^2 = 2\mu E$. El significado físico de la longitud de difusión a, aunque tiene dimensiones de longitud, no tiene nada que ver con una longitud sino que se trata de un parámetro que es proporcional a la intensidad de la interacción.

Si se normaliza $u_2(0) = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} u_2(r) &= 1 - \frac{r}{a} \quad ; \quad k_2 = 0 \\ u_2(r) &= \frac{\sin(k_2 r + \delta_0)}{\sin \delta_0} \quad ; \quad k_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

La dependencia de δ_0 con la energía la da el alcance efectivo, R_0, que se obtiene al igualar en R_0 las expresiones vistas en (2.26):

$$\boxed{k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} R_0 k^2} \tag{2.27}$$

con lo que los parámetros a, longitud de difusión y R_0, alcance efectivo, caracterizan el potencial nuclear.

La expresión completa para la sección eficaz de colisión que se predice utilizando la ecuación de Schrödinger es:

$$\sigma = 4\pi a^2 \left[\left(1 - \frac{aR_0 k^2}{2} \right)^2 + a^2 k^2 \right]^{-1} \qquad (2.28)$$

que para el límite $k \to 0$ (energía nula) se reduce a (2.25).

Los parámetros obtenidos en los experimentos de difusión *N–N* se dan en la tabla 2.2.

Los desfasajes son conocidos para el conjunto de números cuánticos que puede darse en el sistema *N–N* y que conviene recordar.

(a) Para el sistema pp o nn. Se trata de un estado puro de isospín $T = 1$ (llamado isovector); el principio de simetrización da lugar a las dos posibilidades siguientes,

$$\begin{cases} \textbf{si } S = 0 \Longrightarrow L \textbf{ par } ({}^1S_0,\ {}^1D_2); \\ \textbf{si } S = 1 \Longrightarrow L \textbf{ impar } ({}^3P_0,\ {}^3P_1,\ {}^3P_2). \end{cases}$$

(b) Para el sistema np, si se supone el caso $T = 1$, isovector, se tendrán los mismos estados que en el caso anterior.

(c) Para el sistema np, pero el isoscalar, o sea isospín $T = 0$; por el principio de simetrización se tendrán ahora las posibilidades,

$$\begin{cases} \textbf{si } S = 0 \Longrightarrow L \textbf{ impar } ({}^1P_1); \\ \textbf{si } S = 1 \Longrightarrow L \textbf{ par } ({}^3S_1,\ {}^3D_1,\ {}^3D_2,\ {}^3D_3). \end{cases}$$

Tabla 2.2: Promedio experimental del alcance efectivo (R_0) y longitud de difusión (a) para el sistema *N–N*, en experimentos de difusión a baja energía.

		$S=0, T=1$		$S=1, T=0$	
pp	a	$-17,1 \pm 0,2$	fm	–	
	R_0	2,794±0,015	fm	–	
nn	a	$-16,6 \pm 0,6$	fm	–	
	R_0	2,84±0,03	fm	–	
np	a	$-23,715 \pm 0,015$	fm	$5,423 \pm 0,005$	fm
	R_0	2,73±0,03	fm	$1,73 \pm 0,02$	fm

De los datos de la tabla 2.2 anterior para el sistema pp y el sistema nn se observa que los valores de a y de R_0 son similares; se deduce de ello una propiedad de la fuerza nuclear: la simetría de carga. Para que exista independencia de carga, el parámetro a debería ser igual en todas las combinaciones de carga, incluido el caso de np. Pero la diferencia que existe en el valor de a para los datos del estado np se explica en el modelo de Yukawa, que se verá a continuación, porque existe un proceso, el intercambio de piones cargados $\pi^{\pm}$, que sólo puede darse en interacciones np, al contrario que el intercambio del π^0 que se da en todas las interacciones entre nucleones: nn, pp y np (la masa del $\pi^{\pm}$ es mayor que la del π^0; δm_{π} = 4,6 MeV). O sea, a pesar de esta pequeña diferencia, se puede admitir que efectivamente existe independencia de carga. Sin embargo, no debe olvidarse que el principio de exclusión de Pauli introduce diferencias en los sistemas de nucleones idénticos (pp y nn), que en el estado de menor energía deben formar un estado con espín S = 0 ya que no pueden acoplarse los dos con el mismo espín. En el sistema np, al no ser idénticos, se pueden dar los dos estados S = 0 y S = 1; este último es el deuterón. La interacción np con S = 0 es la misma que la existente entre dos nucleones idénticos. Se encuentra que, en el interior de un núcleo, la fuerza media entre neutrón y protón es mayor que entre dos nucleones idénticos.

La figura 2.4 muestra la recopilación de las medidas de varios

desfasajes para los distintos estados de la interacción elástica protón–protón a energías por debajo de 350 MeV. Los desfasajes de la difusión neutrón–protón correspondientes a esos mismos estados son prácticamente idénticos. El análisis de los datos presentados en dicha figura utilizando el potencial $N - N$ conocido como *CD-Bonn*, reproduce muy satisfactoriamente todas las medidas de desfasajes (véase las curvas continuas).

Se puede comprobar que si $a > 0$ existe estado ligado (el deuterón). Cuantitativamente, para el deuterón se tiene una variante de la expresión (2.27), concretamente:

$$k_2 = \frac{1}{a_t} + \frac{1}{2} R_{0_t} k_2^2$$

y como k_2, según la definición vista en (2.19), vale k_2 = 0,2316 fm^{-1}, da lugar a los valores del triplete de espín a_t = 5,423 fm y R_{0_t} = 1,73 fm que aparecen en la tabla 2.2.

Pero en las reacciones nucleón–nucleón a baja energía, el análisis de los resultados muestra que hay repulsión. De aquí se deduce la existencia de un *hard-core* en los nucleones que los hace impenetrables. Deberá reflejarse en el potencial. En efecto, si se resuelve la ecuación radial de Schrödinger, vista en (2.17), para un potencial $V = \infty$ si $r < a$, o sea una fuerza repulsiva, se obtiene:

$$\delta_0 = -ka$$

es decir, un desfasaje negativo. Por el contrario, si se tratase de una fuerza atractiva, se obtendría un desfasaje positivo. En la figura 2.4 se observa en particular que las medidas de los desfasajes correspondientes al estado $^1S_0$ muestran que a una energía cinética del protón incidente de 250 MeV/c (k = 1,7 fm^{-1}), cambia de positivo a negativo; ello implica que la fuerza pasa de atractiva a repulsiva. La distancia a la que este

fenómeno tiene lugar corresponde a un cambio de $L = 0$ de la onda $^1S_0$ a $L = 1$, es decir (como $L = R_c \times p$), $R_c \approx 0{,}6$ fm. Este es el tamaño del *core* impenetrable del nucleón. La fuerza nuclear se hace repulsiva e impide que los nucleones puedan penetrar uno dentro del otro más allá de R_c.

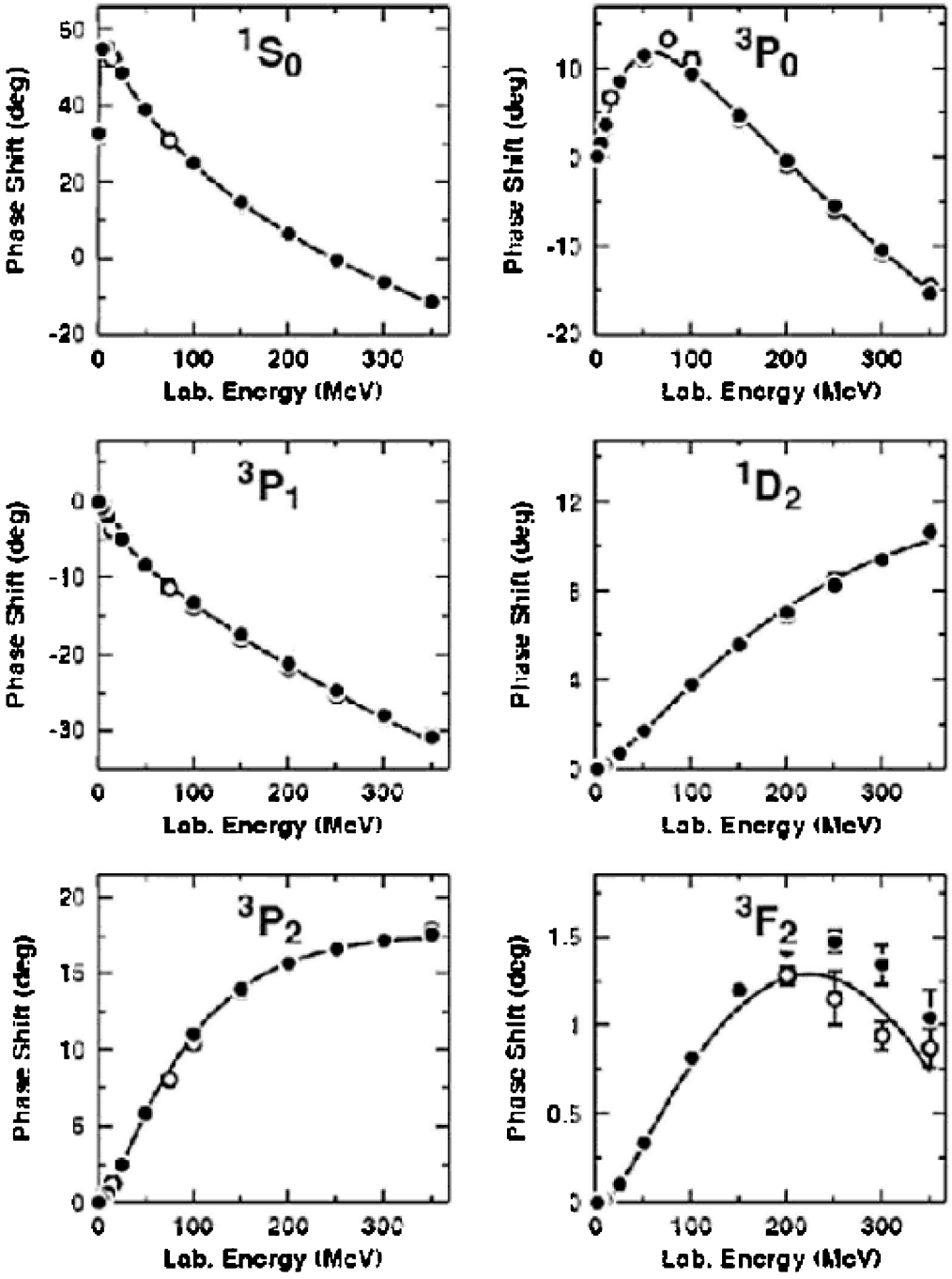


Figura 2.4: Desfasajes en la colisión protón–protón a baja energía, ajustados por R. Machleidt, Phys. Rev. C63 (2001) 24001, utilizando el potencial $N - N$ conocido como *CD-Bonn*.

2.3.4 Sección eficaz elástica n + p

La figura 2.5 muestra la curva experimental de la sección eficaz de difusión n+p para energías del neutrón $T_n < 10$ MeV.

La predicción utilizando la fórmula vista en (2.28), sustituyendo los valores de a_t = 5,4 fm, para baja energía, da 4 barn en vez de los 20 barn de la figura 2.5. La explicación es que no sólo existe una interacción en estado triplete. La sección eficaz debe ser una suma:

$$\sigma(E) = \frac{1}{4}(3\sigma_t + \sigma_s) \tag{2.29}$$

de dos términos; uno correspondiente al estado triplete, y el otro al singlete, ponderados según el número de proyecciones de espín posibles en cada caso. La generalización es inmediata; se utiliza la expresión (2.28) vista anteriormente, pero sumando dos términos, uno para la interacción singlete y otro para la triplete. Con esta última expresión es fácil verificar que σ_s = 68 barn, lo que es compatible con la longitud de difusión $a_s = -23,7$ fm encontrada para el estado singlete que se ha visto en la tabla 2.2.

Los valores de las secciones eficaces n + p medidos a baja energía (ℓ = 0), permiten determinar el valor de la profundidad del pozo V_0 y de su radio R_0, tanto en el caso singlete como el triplete. Se observa que la teoría no depende crucialmente de las profundidades y de los radios de los potenciales. Para potenciales cuadrados se obtiene:

$$\begin{aligned} V_{0t} &\approx 38,5 \text{ MeV} \quad & R_o^t &\approx 1,7 \text{ fm} \\ V_{0s} &\approx 14,3 \text{ MeV} \quad & R_0^s &\approx 2,5 \text{ fm} \end{aligned} \tag{2.30}$$

En conclusión, la aproximación del alcance efectivo, explica razonablemente bien los resultados de la difusión n + p a baja energía.

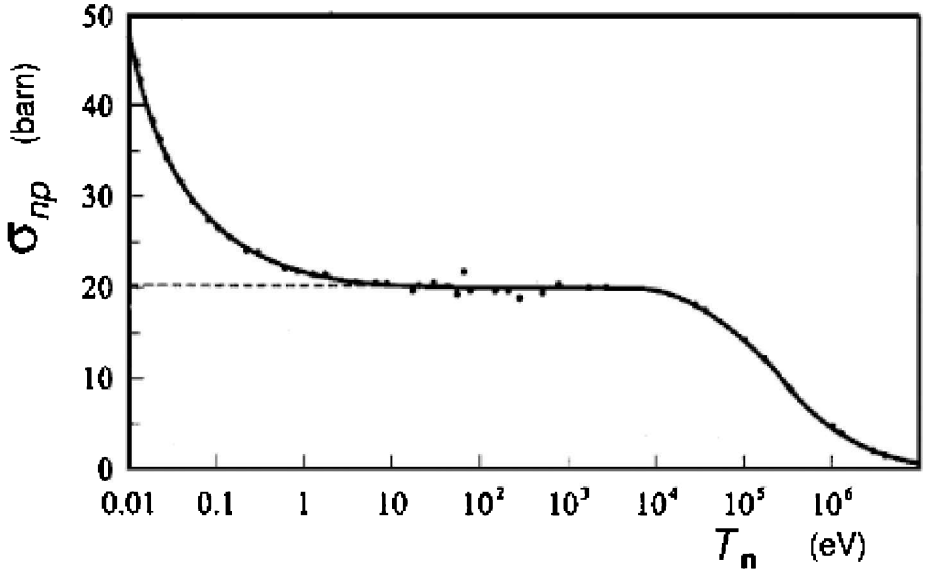


Figura 2.5: Curva de sección eficaz de difusión n + p en función de la energía cinética del neutrón, en eV.

2.4 Potencial de Yukawa

Clásicamente una interacción (a distancia) entre dos partículas es debida a la acción del potencial creado por una sobre la otra.

H. Yukawa (en el año 1934, premiado con el Nobel de Física en 1949) utilizó la idea cuántica de que la interacción es debida al intercambio del cuanto del campo (un bosón) entre ellas. El diagrama que describe esta idea puede verse en la figura 2.6, llamado habitualmente diagrama de Feynman. Así, Yukawa introdujo la idea de que la interacción nuclear es mediada por el intercambio de una partícula que fue bautizada *mesón*, porque su masa es intermedia entre la del electrón y el protón, como se justifica más adelante.

Sólo se intercambian bosones, ya que para intercambiar fermiones[6] habría que intercambiar también el correspondiente antifermión y cumplir el principio de exclusión de Pauli.

Estas ideas dieron lugar al modelo llamado OPEP (*one pion exchange*

potential); modelo de intercambio de un pión, cuya expresión se verá más adelante en el parágrafo 2.5.1.

La masa del mesón intercambiado está relacionada con el alcance de la fuerza. En efecto, en los modelos de intercambio, el principio de incertidumbre permite el intercambio de una partícula de masa *m*, o sea equivalente a una incertidumbre energética $\Delta E = mc^2$, siempre que el tiempo que dura el proceso cumpla:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar \qquad \longrightarrow \qquad R = \frac{\hbar}{mc} \tag{2.31}$$

ya que $R = c\Delta t$, puesto que se supone que se propaga como máximo a la velocidad de la luz en el vacío. Se dice que la partícula intercambiada es virtual, ya que su energía y su momento no cumplen la conocida relación de Einstein $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ (lo que equivale a decir que la partícula intercambiada no está en su capa másica), y no es detectable ya que no es una partícula libre; no se trata de una partícula real. A todos los efectos, se supone que la partícula intercambiada es puntual: no tiene estructura.

Para calcular el potencial de intercambio de un bosón hay que recurrir a la teoría cuántica de campos relativista. Pero haciendo una sencilla analogía con la electrodinámica, puede encontrarse una expresión para dicho potencial.

El potencial electrostático creado por una carga *q* en el origen cumple la conocida ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V_c(\vec{r}) = -\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] 4\pi q \delta(\vec{r}) \tag{2.32}$$

que tiene por solución el conocido potencial de Coulomb:

$$V_c(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] \frac{q}{r} \tag{2.33}$$

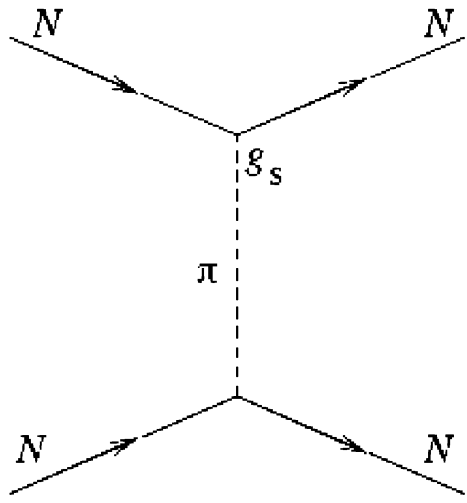


Figura 2.6: Diagrama de intercambio de un pión de Yukawa.

Al cuantificar el campo electromagnético, aparecen los cuantos del campo llamados fotones, cuya fuente es la carga eléctrica. Es bien conocido que la fuerza electromagnética tiene alcance infinito y los fotones, cuantos del campo, tienen masa nula.

Supóngase ahora el caso del campo nuclear, cuyo cuanto tiene masa *m* y es el responsable de la fuerza de atracción entre nucleones. El cuanto debe ser un bosón, emitido y absorbido por una fuente caracterizada por una constante de acoplamiento g_s. Esta constante es un parámetro que representa la intensidad de la interacción. Análogamente al caso electrostático, la mejor ecuación relativista para el potencial creado por una fuente en el origen es la ecuación relativista de Klein-Gordon:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(\vec{r}) - g_s\delta(\vec{r}) \qquad (2.34)$$

válida para partículas de masa *m* y espín *s* = 0. Tiene por solución el potencial de Yukawa:

$$\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r} \qquad (2.35)$$

que suele escribirse también $\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-r/r_0}}{r}$ siendo $r_0 = \hbar/mc$. Se observa que si el cuanto del campo tiene una masa *m*, la intensidad del campo se reduce en 1 /*e* a una distancia $r_0 = \frac{\hbar}{mc}$. O sea, r_0 mide el *alcance* de una fuerza mediada por un bosón de masa *m*.

El pión, $m_\pi\pm$ = 139,57 MeV/c^2, descubierto en 1947 por Lattes, Occhialini, Muirhead y Powell, da para el alcance $r_0 \sim 1,4$ fm, representando muy bien la parte de mayor alcance de la fuerza nuclear. Los piones cargados, junto con el pión neutro ($m_\pi 0$ = 134, 97 MeV/c^2), con vidas medias $\tau_\pi\pm$ = 26 ns y $\tau_\pi 0 = 8,4\times10^{-17}$ s, forman un triplete de isospín (lo que asegura la independencia de carga de la interacción nuclear) y son mesones pseudoescalares ($J^P = 0^-$).

Para estimar el valor numérico de la intensidad de la fuerza nuclear, g_s, pueden utilizarse los parámetros del deuterón $R \sim 2$ fm y $V_0 \sim 30$ MeV, sustituyéndolos en la ecuación (2.35), resultando:

$\frac{g_s^2}{4\pi} \sim 200\ \text{MeV}\cdot\text{fm}$ **o sea, adimensionalmente:** $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \sim 1$

que puede compararse al valor de la constante de acoplamiento, adimensional, que mide la intensidad de la interacción electromagnética, la llamada constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137$. Así se comprende el origen de la denominación de fuerza fuerte.

2.5 Potencial *N–N*

Los numerosos estudios de las propiedades de la interacción *N–N*, ya

sea a partir del estudio del estado ligado o de los estados de difusión, han conducido a la formalización de varias expresiones, fenomenológicas, del potencial *N–N*.

Se ha visto que es atractivo; se sabe que existe saturación (las fuerzas nucleares son de corto alcance, fenómeno distinto al del potencial gravitatorio $V = G_N \frac{M}{r}$, en el que un cohete ¡es más fácil que escape de la Luna que de la Tierra!, mientras que cuesta casi lo mismo arrancar un neutrón del hierro que del plomo) con una energía de ligadura media $\varepsilon \sim 8$ MeV y aproximadamente constante. No tiene análogo clásico. Su dependencia con la distancia *r* viene descrita por el potencial de Yukawa (para distancias superiores a $\sim$ 1 fm). Las reacciones nucleares demuestran que tiene un *core* impenetrable (repulsivo), que puede explicarse por la estructura en quarks al aplicarles el principio de exclusión de Pauli. Con ello, una buena aproximación al potencial *N–N* a baja energía es el de la figura 2.7. Si $p^2/2m < V_0$, pueden formarse estados ligados. Si no, sólo habrá difusión. La diferencia entre el potencial creado por un n y un p vendrá dada por la existencia en este último caso de una barrera culombiana, que no se ha dibujado en la figura 2.7.

La dependencia con el espín viene dada, por ejemplo, por los números cuánticos del deuterón ($J^P = 1^+$) y por las diferencias singlete–triplete en la difusión np a baja energía ($\ell = 0$), vistas en (2.30).

También es necesaria una fuerza tensorial, que explique el momento cuadrupolar eléctrico $Q_d \neq 0$ del deuterón.

A gran distancia ($r > 2$ fm), el potencial puede ser explicado por el inter-cambio de un pión. Para $1 < r < 2$ fm, son necesarios bosones más pesados que el π, por ejemplo: ρ, ω, o incluso dos piones. El *core* repulsivo puede describirse mediante un pozo infinito ($V = \infty$, para $r <$ 0,5 fm); también puede obtenerse mediante el intercambio de muchos piones o de mesones muy pesados.

El potencial *N–N* más general, conteniendo las propiedades descritas, propuesto por Okubo y Marshak, contiene 12 términos. Los 6 primeros

son:

$$
\begin{aligned}
V(r) = V_c(r) + \quad & V_s(r)\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \\
& V_{LS}(r)\vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + \\
& V_T(r)S_{12} + \\
& V_Q(r)\{(\vec{s}_1 \cdot \vec{L})(\vec{s}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{s}_2 \cdot \vec{L})(\vec{s}_1 \cdot \vec{L})\} + \\
& V_{\mathrm{PP}}(r)\{(\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p})\}
\end{aligned}
$$

a los que hay que añadir los correspondientes 6 términos dependientes del isospín:

$$V_\tau(r)\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + V_{s\tau}(r)(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \ldots$$

La notación es $\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2; \vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, en donde $\vec{\ell}_i$ y $\vec{s}_i$ son el momento angular orbital y el espín del nucleón *i*. Además, habría que tener en cuenta que los términos con espín (por ejemplo, $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ van divididos por $\hbar^2$, $\hbar^4$, etc, para que la suma de términos sea dimensionalmente correcta.

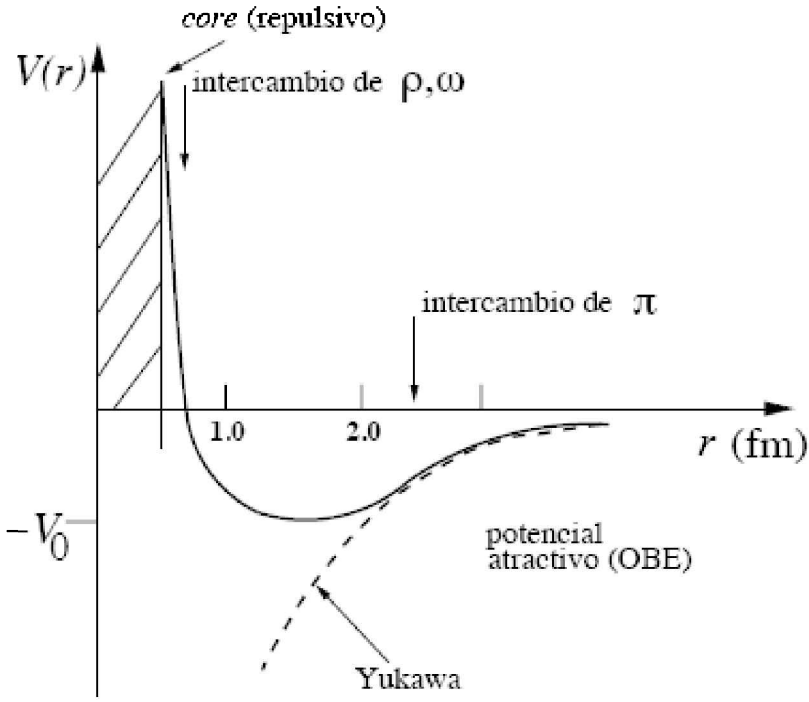


Figura 2.7: Potencial fenomenológico nuclear. En línea de trazos se observa el potencial de Yukawa, que efectivamente permite describir el comportamiento a grandes distancias de la fuerza nuclear. OBE significa *one boson exchange*.

La dependencia en espín aparece al calcular el valor esperado de $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$que para el estado triplete (S = 1) da $\hbar^2/4$ y la fuerza es atractiva, mientras que para S = 0 vale $-3\hbar^2/4$, siendo repulsiva. Lo mismo sucede con los términos de isospín. Además de esta dependencia con el espín de la fuerza entre nucleones, existe otra que depende de la orientación del espín total de los dos nucleones $\vec{S}$ el posible momento angular orbital $\vec{L}$ de su movimiento relativo. Estas fuerzas se conocen con el nombre de *espín–órbita* y son proporcionales al producto $\vec{S} \cdot \vec{L}$. Esta fuerza es atractiva si los vectores $\vec{S}$ y $\vec{L}$ son paralelos y repulsiva en el caso contrario. Este tipo de interacción tiene un gran protagonismo en el modelo de capas nuclear, como se verámás adelante.

Los dos primeros términos de la fórmula de Okubo-Marshak

representan fuerzas centrales. El término de interacción espín–órbita, V_{LS}, también lo es. El término tensorial $V_T(r)$, puede mezclar ondas $S(L = 0)$ y $D(L = 2)$; por lo tanto no es central. Los otros términos introducen dependencias respecto al momento.

Se conocen actualmente varios modelos que describen bastante bien la difusión *N–N*: entre ellos son de destacar el modelo de París[7] y el de Bonn,[8] que son las ciudades donde se encuentran los grupos de investigación que los han elaborado. Se diferencian en el tratamiento matemático del *core* y del efecto de la resonancia $N\pi$, la conocida $\Delta(1232)$ y del antinucleón $\bar{N}$ en los núcleos. En efecto, siguiendo las ideas de Yukawa, puede considerarse el núcleo envuelto de una nube de piones virtuales que pueden interaccionar con los nucleones. Incluso puede darse la existencia de antinucleones en procesos de creación de pares nucleón–antinucleón. Estos procesos, de existencia efímera, pueden influir en las propiedades del núcleo.

2.5.1 Potencial OPEP

La generalización del potencial de Yukawa dio origen al modelo OPEP, que conduce a una expresión analítica para el potencial *N–N*, aunque también con ingredientes fenomenológicos. Una expresión del potencial OPEP frecuentemente utilizada es:

$$V(r) = \frac{g_\pi^2}{12} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{M_p}\right)^2 (2\vec{\tau}^2 - 3)\left\{(2\vec{S}^2 - 3) + S_{12}\left[1 + \frac{3R}{r} + \frac{3R^2}{r^2}\right]\right\}\frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

en donde g_π es la constante de acoplamiento que mide la intensidad de la interacción fuerte entre dos nucleones, $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ es el operador de isospín, $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ el de espín y $S_{12} = \left[3\frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right]$ el término tensorial, justificado por las propiedades del deuterón. El

alcance R es un parámetro cuyo valor está comprendido entre 1,4 y 2,0 fm.

Para entender los efectos del término tensorial, S_{12}, en el modelo OPEP es útil introducir el operador helicidad:[9]

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r}$$

que da la proyección del espín en el eje que une a los dos nucleones. Los valores propios de λ son: 0 si $S = 0$ y ±1,0 si $S = 1$, mientras que los valores propios de S^2 serán 0 si $S = 0$ y 2 si $S = 1$, ya que los estados propios pueden elegirse de la forma $|S, \lambda\rangle$ y, como es habitual, los valores propios son $\lambda|S, \lambda\rangle = \lambda\hbar|S, \lambda\rangle$ y $S^2|S, \lambda\rangle = S(S+1)\hbar^2|S, \lambda\rangle$. Con ello, se puede demostrar que la relación entre los operadores S_{12}, λ y S es:

$$S_{12} = 6\lambda^2 - 2S^2$$

lo que implica que si el sistema *NN* se acopla con espín 0 (estado singlete de espín) el valor propio de S_{12} es cero (la interacción tensorial se anula) y si el sistema *NN* está en estado triplete ($S = 1$) entonces $S_{12} = -4$ para $\lambda = 0$ y $S_{12} = 2$ para $\lambda = \pm 1$, lo que es lo mismo que escribir:

$$S_{12}^2 = 6 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 - 2S_{12}$$

Con estas consideraciones, puede comprobarse que el modelo OPEP predice para la interacción np:

1 Si $S = 0$ (singletedeespínytripletedeisospín):

$$V_{\mathrm{np}}^{S=0}(r) = -\frac{g_\pi^2}{4} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{M_\mathrm{p}}\right)^2 \frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

que es un potencial atractivo.

2 Si $S = 1$ (triplete de espín y singlete de isospín) entonces aparecen

dos posibles soluciones

(*a*) con $\lambda = \pm 1$ que implica que $S_{12} = 2$, con lo que:

$$V_{\mathrm{np}}^{S=1,\lambda=\pm 1}(r) = -\frac{3g_\pi^2}{4} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{M_\mathrm{p}}\right)^2 \left[1 + \frac{2R}{r} + \frac{2R^2}{r^2}\right] \frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

más atractivo que el potencial $V_{\mathrm{np}}^{S=0}(r)$. Este es el responsable de la existencia del deuterón y el valor de la helicidad confirma que es *prolato* ($\lambda = \pm 1$;véase la figura 2.1).

(*b*) con $\lambda = 0$, que conduce a $S_{12} = -4$ y da lugar a un potencial repulsivo:

$$V_{\mathrm{np}}^{S=1,\lambda=0}(r) = +\frac{3g_\pi^2}{4} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{M_\mathrm{p}}\right)^2 \left[1 + \frac{4R}{r} + \frac{4R^2}{r^2}\right] \frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

Una forma de entender la dependencia con el espín (J) y el isospín (T) en el modelo OPEP es a través del intercambio de un mesón; por ejemplo puede tratarse de un pseudoescalar ($J^P = 0^-$) o de un vector ($J^P = 1^-$). Buenos ejemplos son el π(pseudoescalar y triplete de isospín, $T = 1$) y el ω (vector y singlete de isospín, $T = 0$),[10] respectivamente.

2.6 Problemas

2.1 Radio del deuterón

El deuterón está formado por la unión de un protón y un neutrón que interaccionan con una fuerza atractiva que deriva de un potencial $V(r)$. La experiencia muestra que cuando el deuterón se encuentra en su estado fundamental, la energía de ligadura tiene un valor absoluto de 2,225 MeV. Por otra parte, se puede admitir en primera aproximación, que la energía de interacción $V(r)$ está representada por un pozo cuadrado más un *core* (potencial

infinito repulsivo) tal que $V(r) = \infty$ para $0 < r < c$, $V(r) = -V_0$ para $c \leq r \leq c + R_0$ y $V(r) = 0$ para $r > c + R_0$ (véase la figura 2.8). Si se supone que las masas del protón y neutrón son iguales (tomar $m_p = 938{,}3$ MeV/c^2)se pide:

a) Admitiendo que el estado fundamental tiene simetría esférica, determinar la función de ondas correspondiente.

b) Establecer las condiciones de existencia de estados ligados asícomoel espectro de valores propios de energía. Calcular también el valor mínimo del potencial para que haya un sólo estado ligado. A partir de estos resultados calcular el potencial del deuterón si su radio es $R_0 = 1{,}9$ fm. ¿Es posible la existencia de un estado excitado para el deuterón en onda S?

c) Calcular la fracción de tiempo durante el cual los dos nucleones que constituyen el deuterón se encuentran dentro o fuera del alcance de la interacción.

d) Calcular el radio cuadrático medio del deuterón si el radio del *core* es de $c = 0{,}4$ fm.

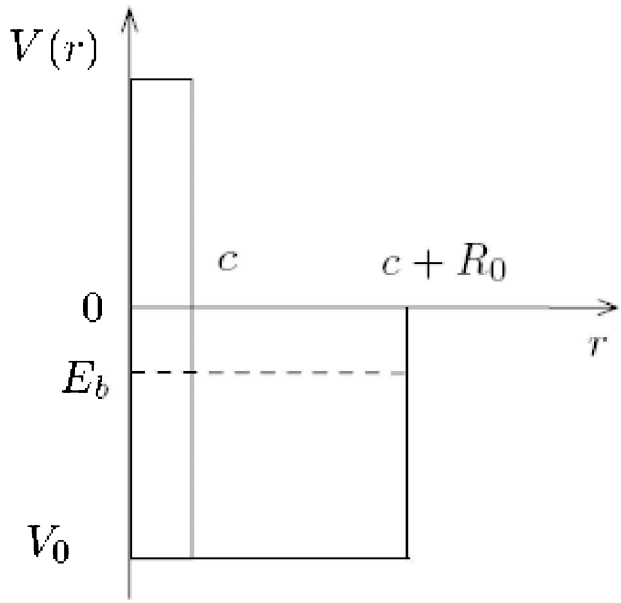


Figura 2.8: Potencial de pozo cuadrado más *core* infinito repulsivo

empleado para representar el deuterón.

2.2 Números cuánticos del deuterón

El estado fundamental del deuterón representa el único estado ligado entre dos nucleones que existe en la naturaleza con $J = 1$, paridad bien definida y energía de ligadura de −2,22 MeV. A partir sólo de estas consideraciones se pide:

a) Establecer los posibles estados y combinaciones lineales de estados que pueden contribuir al estado fundamental del deuterón. Emplear la notación espectroscópica usual, $^{2S+1}L_J$, donde las letras *S*, *P* y *D* corresponden al momento angular $L = 0,1,2$, respectivamente, el índice superior indica la multiplicidad de espín del estado $2S + 1$ (es decir, 1 para el estado singlete y 3 para el triplete) y el índice inferior (en este caso, siempre igual a la unidad) representa el momento angular total *J*.

b) Deducir un argumento para demostrar la dependencia con el espín de la interacción del deuterón y mostrar porqué el operador $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$, con $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli, introduce el resultado esperado. ¿Porqué no se emplean para ello otros operadores también escalares como $\sigma_{1z} + \sigma_{2z}$ o $\sigma_{1z}\sigma_{2z}$? ¿Cuál de estos operadores podría usarse para conseguir una distinción total entre protón y neutrón?

c) Mostrar cómo interpretar los resultados anteriores en términos del isospín.

2.3 Función de ondas del deuterón

La función de ondas para un sistema de dos partículas en un esquema de acoplamiento *LS* puede escribirse como:

$$|JM_J\rangle_{LS} \equiv \mathcal{Y}_{JLS}^{M_J} =$$

$$= \sum_{M_L} C(LSJ|M_L, M_J - M_L, M_J)\phi(l_1 l_2|L, M_L)\chi(s_1 s_2|S, M_J - M_L)$$

donde:

$$\varphi(l_1 l_2|L.M_L) \equiv Y_L^{M_L}(1,2) =$$
$$= \sum_{m_{l_1}} C(l_1 l_2 L|m_{l_1}.M_L - m_{l_1}, M_L) Y_{l_1}^{m_{l_1}}(1) Y_{l_2}^{M_L - m_{l_1}}(2)$$
$$\chi(s_1 s_2|S.M_S) \equiv \chi_S^{M_S}(1.2) =$$
$$= \sum_{m_{s_1}} C(s_1 s_2 S|m_{s_1}.M_S - m_{s_1}.M_S) \chi_{s1}^{m_{s_1}}(1) \chi_{s2}^{M_S - m_{s_1}}(2)$$

a) Escribir la función de ondas para un estado de dos partículas (neutrón y protón) situadas ambas en la subcapa 1*p* y con momento angular total $J = 0$.

b) Escribir las funciones de onda completas para representar los posibles estados del deuterón.

c) A partir del resultado obtenido en el apartado anterior calcular el momento dipolar magnético del deuterón.

d) Calcular igualmente el momento cuadrupolar eléctrico del deuterón.

2.4 Interacción singlete y triplete

El potencial del deuterón incluye un término no central que depende del espín del tipo:

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1 \vec{r}_1)(\vec{\sigma}_2 \vec{r}_2)}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$$

a) Demostrar que el operador S_{12} puede escribirse también como:

$$S_{12} = \frac{6(\vec{S}\vec{r})^2}{\hbar^2 r^2} - \frac{2S^2}{\hbar^2}$$

b) Demostrar que si los dos nucleones se encuentran en un estado singlete de espín se cumple que $S_{12}\chi_0^0 = 0$.

c) Comprobar igualmente que si su estado es triplete se cumple

que:

$$(S_{12}-2)(S_{12}+4)\chi_1^{Ms}=0$$

d) Demostrar que el promedio para todos los ángulos del operador S_{12} es nulo, es decir, $\int S_{12}d\Omega=0$.

2.5 Ecuación radial del deuterón

Considerar un potencial para el deuterón dado por:

$$V(r)=V_{\mathrm{C}}(r)+V_{\mathrm{T}}(r)S_{12}$$

donde $V_{\mathrm{C}}(r)$ es un término central que sólo depende de la posición mientras que $V_{\mathrm{T}}(r)S_{12}$ representa un término tensorial no central que depende del espín (ver Problema 2.4). Se pide:

a) Demostrar que:

$$S_{12}\mathcal{Y}_{101}^{M_J}=\sqrt{8}\mathcal{Y}_{121}^{M_J}$$
$$S_{12}\mathcal{Y}_{121}^{M_J}=\sqrt{8}\mathcal{Y}_{101}^{M_J}-2\mathcal{Y}_{121}^{M_J}$$

donde $\mathcal{Y}_{JLS}^{M_J}$ son las funciones de onda espín–ángulo.

b) Obtener las ecuaciones radiales de Schrödinger para los estados *S* y *D*.

2.6 Momento dipolar magnético del deuterón

Calcular el momento dipolar magnético del deuterón mediante el uso del teorema de la proyección (fórmula de Landé) y compararlo con el resultado experimental (μ_{d} = 0,857348 μ_{N}). Expresar el resultado en términos de los momentos magnéticos intrínsecos del protón (μ_{p} = 2,79 μ_{N}) y del neutrón (μ_{n} = −1,91 μ_{N}). ¿Qué conclusiones pueden extraerse?

2.7 Difusión n–p

Considérese la difusión de neutrones de baja energía (onda *S*) por protones. Sea θ el ángulo de difusión de los neutrones en el

sistema laboratorio y T_n la energía cinética de los neutrones incidentes.

a) Demostrar que el retroceso de los protones tiene lugar con un ángulo $\varphi = \pi/2 - \theta$ con respecto a la dirección de los neutrones incidentes.

b) Demostrar que $T'_n = T_n \cos^2\theta$ y $T'_p = T_n \sin^2\theta$, donde T' es la energía cinética después de la difusión.

c) Demostrar que las secciones eficaces en el laboratorio (*LAB*) y en centro de masas (*CM*)están relacionadas por la expresión:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LAB} = 4\cos\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}$$

d) Dado que la difusión no depende de la dirección en el sistema centro de masas, demostrar que en el sistema laboratorio $d\sigma/dT'_p = \sigma/T_n$, donde σ es la sección eficaz total. Este resultado demuestra que el número de protones de retroceso que se observa con energía $T'_p (0 \leq T'_p \leq T_n)$ es independiente de T'_p.

e) Obtener la distribución angular de los protones en el laboratorio.

2.8 Sección eficaz n–p

Resolver la ecuación de Schrödinger para el potencial del Problema 2.1 (figura 2.8) y la dispersión en onda *S* protón–neutrón. Se pide, además:

a) Encontrar una expresión que relacione el desfasaje en onda *S* y la sección eficaz con los parámetros del potencial en la aproximación de energías incidentes muy pequeñas.

b) Empleando los resultados del Problema 2.1 demostrar también que la sección eficaz se puede expresar en función de la energía de ligadura del deuterón E_b como:

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2}{m_\mathrm{p}} \frac{1}{E + E_b}$$

2.9 Sección eficaz total n–p

a) Demostrar que la sección eficaz total de dispersión (n, p) en centro de masas puede escribirse, en el límite de bajas energías, como:

$$\sigma = 4\pi a^2 \left\{ 1 - k^2 \left[a(a - R) + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right] \right\}$$

con a la longitud de dispersión, $k^2 = (m_\mathrm{p}E)^{1/2}/\hbar$, $k_0 = (m_\mathrm{p}V_0)^{1/2}/\hbar$ y V_0 y R la profundidad y el alcance de la interacción, respectivamente.

b) Calcular el valor de la sección eficaz total de difusión (n, p) para neutrones de E = 120 keV suponiendo una difusión triplete pura y comparar el resultado con el valor experimental de 11,7 b. Suponer para el potencial responsable de dicha interacción un valor de V_0 = 36 MeV con un alcance de R = 2 fm (pozo rectangular para el deuterón).

c) La medida experimental de la sección eficaz de dispersión neutrón– protón no coherente a bajas energías, junto a la de dispersión coherente de neutrones por hidrógeno molecular, ha permitido conocer las correspondientes longitudes de difusión triplete, a_t = 5,38 ± 0,02 fm, y singlete, a_s = −23,69 ± 0,05 fm. Se pide:

- Explicar el significado físico del valor negativo para la longitud de dispersión singlete.
- Estimar la energía de ligadura y profundidad del potencial correspondiente a la interacción singlete si se supone la misma anchura para los dos tipos de interacción, triplete y singlete.

2.10 Sección eficaz diferencial n–p

En el estudio de una hipotética difusión elástica entre dos partículas neutras (se consideran así al objeto de excluir la contribución Coulombiana) la masa reducida del sistema es de 3,5 u (unidades de masa atómica) y la energía en centro de masas 4,8 MeV. Las secciones eficaces elementales, para ángulos de difusión de 0° y 90° (en centro de masas) son de 27,3 y 7,41 mb/strad, respectivamente. Admitiendo que en este proceso sólo contribuyen significativamente las ondas parciales *S* y *P*, calcular el valor de la sección eficaz diferencial que cabe esperar para un ángulo de difusión de 180°.

2.11 Captura radiativa

Considerar la reacción de captura radiativa neutrón–protón para dar lugar a un deuterón y un fotón de acuerdo con el proceso:

$$\mathrm{n} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \gamma$$

Se pide:

a) Calcular la energía del fotón emitido si la captura se produce en reposo e indicar si el retroceso del deuterón es importante o no.

b) Estimar, desde un punto de vista semiclásico, la energía que debe tener el neutrón incidente sobre un protón en reposo para que la captura radiativa en la dispersión (n, p) transcurra en onda $P(l = 1)$, es decir, aparezca la interacción triplete.

c) Caracterizar la multipolaridad dominante del proceso.

d) Suponer ahora que los nucleones iniciales no están polarizados y que la energía cinética en centro de masas es muy pequeña (térmica). Demostrar que el proceso de captura a bajas energías transcurre desde un estado singlete de espín y no desde un estado triplete.

Datos: $m_{\mathrm{p}} = 1{,}00783$ u, $m_{\mathrm{n}} = 1{,}00867$ u, $m_{\mathrm{d}} = 2{,}01410$ u y el radio del deuterón es $r_{\mathrm{d}} = 2 \times 10^{-13}$ cm.

[1]H. C. Urey, F. G. Brickwedde and G. M. Murphy, *Phys. Rev.*, 39 (1932) 164(L).

[2]El nombre de hadrón viene del griego *hadros*, que significa *fuerte*, aludiendo a que son partículas que sienten la interacción fuerte.

[3]La masa atómica del deuterio es $M(^2\mathrm{H}) = 2.0141018\ u = 1876,\ 124\ \mathrm{MeV/c^2}$.

[4]Véase por ejemplo M. Garçon and J. W. Van Orden; *Adv. Nucl. Phys.* **26** (2001) 293.

[5]En efecto, los dos estados, el triplete y el singlete de espín tienen en común la tercera componente $S_z = 0$. El triplete tiene dos proyecciones más: $S_z = \pm 1$

[6]Las partículas se clasifican en fermiones y bosones, según su espín. Véase la Sección 15.3.

[7]M. Lacombe *et al.*, *Phys. Rev.*, **C21** (1980) 861.

[8]R. Machleidt *et al.*, *Phys. Rep.* **149** (1987) 1.

[9]Esta definición no es exactamente la de la helicidad de una partícula que se da en (16.70), pero es equivalente en el caso de un sistema de dos nucleones.

[10]Las propiedades de éstos y otros mesones, se estudian en física de partículas, en la Sección 17.4.

3. Modelos nucleares. Modelos colectivos y modelo de capas

3.1 Introducción

El estudio de la estructura nuclear es imposible de abordar de manera exacta. A baja energía ($\leq$ 2 MeV) los núcleos pueden considerarse como sistemas cuánticos formados por muchos nucleones que, además, interaccionan entre sí a través de un potencial *N–N* muy complejo. Para resolver el problema de la estructura nuclear, habría que plantear un conjunto de ecuaciones acopladas describiendo interacciones mutuas de los *A* nucleones. Incluso no es evidente que sólo existan interacciones a 2 cuerpos.

A alta energía, sobre todo para explicar las reacciones entre iones pesados, se suelen utilizar métodos derivados de la mecánica estadística (ecuación de estado).

De lo estudiado anteriormente se sabe que existen núcleos con número atómico Z = 1,2, …, 111 y N = 0,1, …, 161. El radio nuclear es $R(A) = r_0 A^{1/3}$ con $r_0 \approx$ 1,2 fm, con lo que los radios nucleares son $R \leq$ 7,5 fm. Ello es una consecuencia de la incompresibilidad de la materia, o lo que es lo mismo, la densidad nuclear o si se quiere, la densidad nucleónica, $\rho = A/V$ = 0,14 nucleones/fm^3, es constante e independiente de *A*. Estas características nucleares son consecuencia de la interacción *N–N*, fuertemente repulsiva a pequeñas distancias (< 0,6 fm) y atractiva a gran

distancia (~ 2 fm), pero a partir de ahí, la intensidad de la fuerza nuclear va disminuyendo exponencialmente, haciéndose despreciable a distancias de varias decenas de fm.

La energía de ligadura del nucleón menos ligado vale $\varepsilon \sim 8$ MeV y su energía cinética, que predice el modelo del gas de Fermi, $T \sim 33$ MeV. Esto equivale a un momento bastante elevado $p_F \sim 250$ MeV/c, llamado el momento de Fermi, que implica que los nucleones no están en reposo dentro de los núcleos, sino que se mueven con velocidad muy elevada:

$$v = \sqrt{2T/m} = c\sqrt{2T/mc^2} \approx 0{,}3\, c \tag{3.1}$$

es decir un 30 % de la velocidad de la luz en el vacío. Es efectivamente grande y deberían existir efectos relativistas. Por otra parte, dado que la masa de un nucleón es $mc^2 \approx 938$ MeV/c^2, y su energía media de ligadura relativamente mucho más pequeña que esta masa, se podrá abordar su estudio con una teoría no relativista.

Sin embargo, la longitud de onda de De Broglie asociada:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar c}{mc^2\beta} \approx 4{,}5 \text{ fm} \tag{3.2}$$

del orden del radio nuclear, con lo que los efectos cuánticos sí serán importantes. En cualquier caso, la ecuación básica que describirá los estados propios nucleares será la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{3.3}$$

Pero el problema será encontrar la expresión del hamiltoniano $\hat{H}$.

Existen dos vías para tratar el problema; se trata de dos tipos de modelos nucleares, que intentan explicar y predecir un conjunto de propiedades. Se suelen clasificar en modelos

- microscópicos. En estos modelos microscópicos, la estructura nuclear se describe en función de los grados de libertad de los

nucleones constituyentes. La función de ondas del sistema serádelaforma $\Psi(q_1, q_2, \ldots, q_A)$, en donde q_i representa la posición $\vec{r}_i$, el espín s_i y el isospín τ_i del nucleón i. Con esto, el hamiltoniano se construye sumando las energías cinéticas de los A nucleones e incluyendo términos basados en interacciones de dos nucleones a través de un potencial de 2 cuerpos:

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{A} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i,j) \qquad (3.4)$$

La forma del potencial nucleón–nucleón, $V(i, j)$, no viene dada por ninguna teoría; es fenomenológico y en general depende del problema que se quiere resolver. El verdadero reto es que la ecuación de Schrödinger, en los casos $A \geq 4$ es engorrosa de resolver. Así, el enfoque que suele darse es el de las interacciones efectivas, en las que un nucleón interacciona con un potencial medio nuclear. Este es el concepto que da lugar a la idea de modelos de partícula individual, más fácil de abordar y que ha logrado muchoséxitos en el marco del modelo de capas.

- macroscópicos o colectivos. Los grados de libertad son ahora las coordenadas colectivas, como $R = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{A} r_i$, centro de masas del núcleo, y $Q_{20} = \sum_{i=1}^{A} r_i^2 Y_{2\mu}(\Omega_i)$, momento cuadrupolar, que como puede apreciarse se escriben en función de coordenadas microscópicas (de los constituyentes) y por lo tanto pueden relacionarse ambos enfoques. El hamiltoniano también será función de propiedades colectivas (M, R, V).

Históricamente, se desarrollaron dos modelos con ideas

semiclásicas representando a cada uno de los tipos de modelos que se acaban de describir (uno colectivo: el modelo de la gota líquida y otro de partícula individual: el modelo del gas de Fermi), y además tuvieron muchoéxito los modelos mecánico–cuánticos de los dos tipos; colectivos: los modelos rotacional y vibracional y el modelo de partícula individual conocido como modelo de capas. Todos ellos serán estudiados en lo que sigue.

3.2 Modelos semiclásicos

Los modelos semiclásicos tratan de explicar propiedades globales de los núcleos. Existen dos modelos muy populares que explican algunas propiedades nucleares y que representan a cada una de las vías utilizadas para clasificar los modelos nucleares, el modelo de la gota líquida, que es un modelo colectivo (macroscópico) y el modelo del gas de Fermi, que es un modelo de partícula individual (microscópico) que considera a los nucleones en un pozo de potencial nuclear, pero que recurre a conceptos de la mecánica estadística. Efectivamente, la idea básica en la que se apoyan los modelos de tipo macroscópico es la de describir el núcleo como un fluido, es decir, sólo interesa el movimiento colectivo de los nucleones, mientras que los modelos microscópicos pretenden describir los estados individuales de los nucleones en el potencial nuclear.

3.2.1 Modelo de la gota líquida

El modelo de la gota líquida supone el núcleo como un fluido incompresible. Ya se ha visto en (1.36) una de sus predicciones más destacadas: la fórmula semiempírica de masas. Resumiendo:

1 Da cuenta de los términos dominantes de las energías de ligadura $E_{\mathrm{L}}(Z, N)$ nucleares:

$$E_L/A \sim \alpha_V - \alpha_S A^{-1/3} - \alpha_C Z(Z-1)A^{-4/3}$$

vista en (1.36). Incluidos los términos de simetría y de apareamiento, esta expresión describe las energías de ligadura total de los núcleos con una precisión de ±10 MeV.

2 También predice el número atómico Z del núcleo más estable con número másico A:

$$Z_{min} = A/(2 + 0{,}015A^{2/3})$$

que es el mínimo de la parábola de masas, o sea, es el valor de Z que va describiendo la posición del valle de la estabilidad β en función de A.

3 E incluso explica el tamaño nuclear $R = r_0 A^{1/3}$, debido a la incompresibilidad del fluido de A nucleones.

3.2.2 Modelo del gas de Fermi

El estado fundamental de los núcleos puede ser descrito como un gas de Fermi degenerado.

Al igual que en átomos con N_e electrones, en el caso de los núcleos, se sabe que los nucleones (p, n), separadamente, obedecen el principio de simetrización de Pauli, o sea deben cumplir la estadística de Fermi-Dirac. Se supone que los nucleones están confinados en un volumen espacial V y están ligados por una fuerza que se puede representar por un sencillo pozo de potencial como el de la figura 3.1. Los protones y neutrones sienten diferentes potenciales, ya que los protones, tienen además carga eléctrica, lo que modifica el potencial fuera del núcleo (curva a trazos en la figura), que sigue la forma del potencial Coulomb.

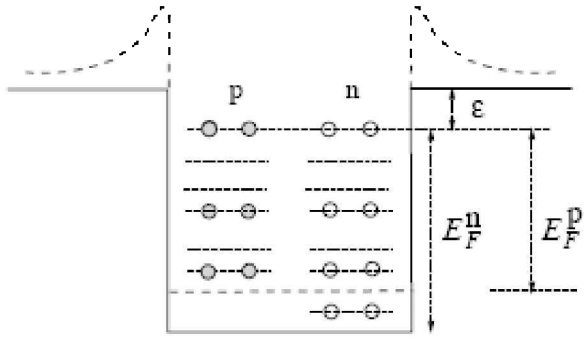


Figura 3.1: Pozo nuclear en el modelo del gas de Fermi.

Para $N, Z \gg 1$ se tiene un número de estados en el espacio fásico $\frac{VV_p}{\hbar^3} = \frac{2}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar} \right)^3$. Separadamente, dado que los nucleones tienen espín 1/2, se podría escribir:

$$N = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}\left(p_{F,n}\right)^3 \quad \text{y} \quad Z = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}\left(p_{F,p}\right)^3$$

A la temperatura $T = 0$, todos los estados están ocupados hasta el llamado momento de Fermi, que es el momento máximo que puede tener un nucleón. Si se supone un núcleo con $Z = N = A/2$, en el que $p_{F,n} = p_{F,p} = p_F$, se tendrá:

$$\boxed{p_F = \frac{\hbar}{r_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}} \qquad (3.5)$$

independiente de A, resultando $p_F \approx 250$ MeV/c; o sea, $E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33$ MeV. Por lo tanto, como se sabe que los nucleones tienen una energía de ligadura media $\varepsilon \sim 8$ MeV, este modelo predice que están confinados en un pozo nuclear de profundidad $V_0 = E_F + \varepsilon \approx 40$

MeV.

Que los nucleones se mueven con p_F en el interior de los núcleos, se ha comprobado experimentalmente al estudiar las colisiones $e^- + N$.

Como el gas de Fermi se aplica a fermiones idénticos, la energía E_F representa la energía del estado de mayor energía ocupado cumpliendo el principio de exclusión. La energía media de un nucleón es:

$$\overline{E} = \frac{\int_0^{p_F} E p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} E_F \qquad (3.6)$$

El modelo del gas de Fermi permite justificar el término de asimetría que se incluye en la fórmula semiempírica de masas (1.36) y se parametriza con el término que contiene a_A. En efecto, si se tienen en cuenta, separadamente, la energía media de protones y neutrones:

$$\overline{E} = \frac{3}{5} \frac{N E_{F,n} + Z E_{F,p}}{A}$$

La energía total de los A nucleones será:

$$E_{tot} = \frac{3}{5} \left(E_{tot}^Z + E_{tot}^N \right) = \frac{3}{5} \left(Z E_{F,p} + (A - Z) E_{F,n} \right)$$

Si se calcula el exceso de energía ΔE de estos A nucleones respecto al caso en el que $Z = N = A/2$, se tiene:

$$\Delta E = E_{tot}^Z + E_{tot}^N - 2E_{tot}^{A/2}$$

entonces, llamando $\eta = \frac{A/2 - Z}{A/2}$, se cumple que $N = (A/2)(1 + \eta)$ y $Z = (A/2)(1 - \eta)$, con lo que reteniendo sólo términos cuadráticos en el desarrollo, se obtiene:

$$\Delta E \approx \frac{1}{3} E_{\mathrm{F}} \frac{(Z-N)^2}{A} \tag{3.7}$$

término que tiene el mismo comportamiento que el de asimetría.

Sin embargo, hay muchas propiedades nucleares inexplicables por estos modelos, por ejemplo, la estructura de niveles energéticos o los espines y paridades de los estados nucleares, la existencia de números mágicos: núcleos con gran estabilidad y muy abundantes, los momentos eléctrico y magnético, etc. Para ello se han utilizado ideas atómicas, debido a las innumerables evidencias de una estructura nuclear en la que los nucleones llenan los estados cuánticos previstos, dando origen a las conocidas *capas*.

3.3 Propiedades colectivas de los núcleos par–par

El estado fundamental de los núcleos par–par tiene siempre $J^P = 0^+$, debido a las fuerzas de apareamiento de nucleones, cuya energía de ligadura del par o energía de apareamiento es:

$$P_{\mathrm{n}} \sim P_{\mathrm{p}} \sim \frac{11{,}2}{\sqrt{A}}\ \mathrm{MeV} \tag{3.8}$$

y va de unos 3 MeV para núcleos ligeros hasta 0,75 MeV para $A = 220$ (véase la figura 3.2).

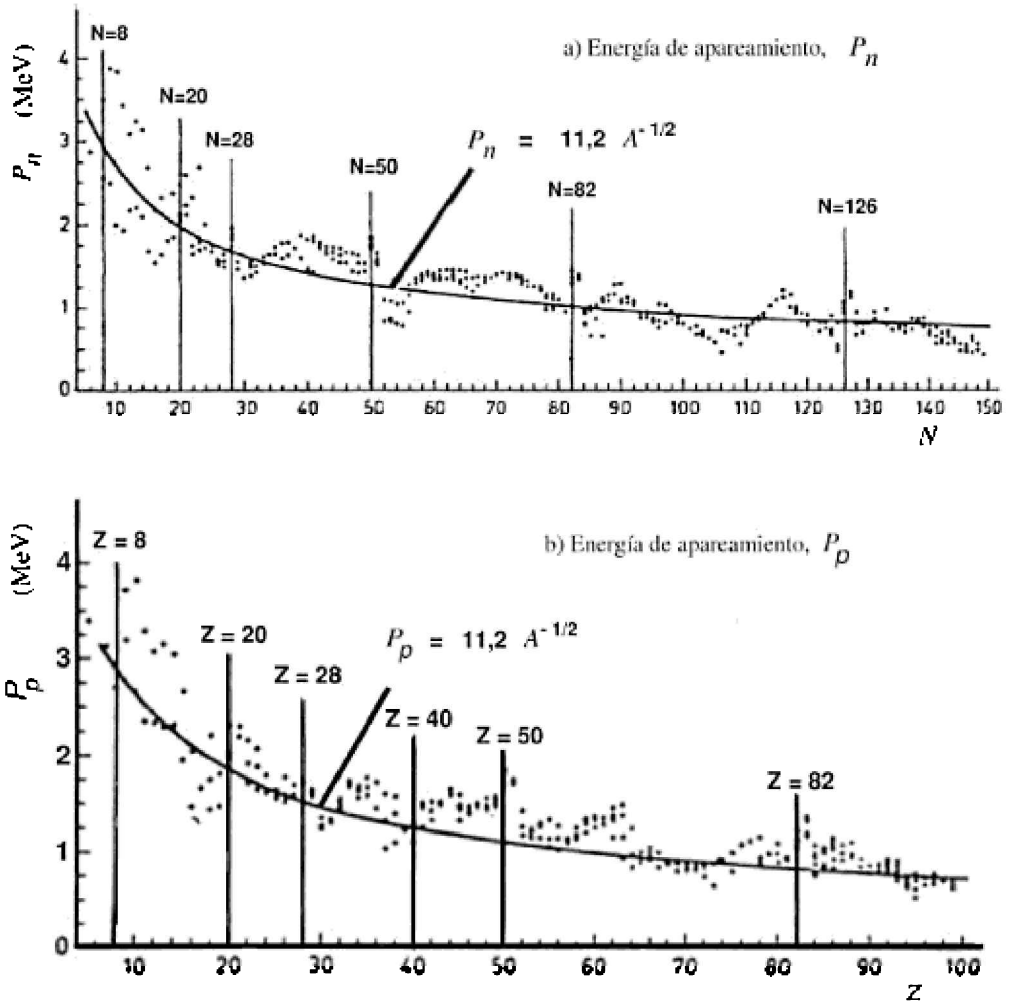


Figura 3.2: Los puntos representan la energía de apareamiento (a) neutrónica, P_n y (b) protónica, P_p, medidas para núcleos con los valores de N y Z indicados. La curva describe la misma dependencia con A vista en la expresión (3.8) en el texto. Las líneas verticales señalan números mágicos (datos de Zeldes *et al.*,, 1967).

La energía de apareamiento puede determinarse experimentalmente a partir de las energías de separación neutrónica:

$$P_n = S_n(N, Z) - S_n(N-1, Z) \tag{3.9}$$

o la fórmula equivalente para P_p en función de S_p para el caso de protones. O sea, nucleones idénticos se acoplan dando un estado de espín $S = 0$, más ligado. Esta fuerza es responsable del término δ (de apareamiento) de la fórmula de masas (1.36).

Pero, además del estado fundamental,

1 Existe un nivel con $J^P = 2^+$, excitado, de comportamiento muy regular. Todos los núcleos con estado fundamental 0^+ tienen como primer estado excitado un nivel 2^+ excepto los núcleos doblemente mágicos: $^4_2\mathrm{He}$, $^{16}_{8}\mathrm{O}$, $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, $^{90}_{40}\mathrm{Zr}$, $^{132}_{50}\mathrm{Sn}$ y $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ y alguna otra excepción como $^{14}_{6}\mathrm{C}$, $^{14}_{8}\mathrm{O}$ y $^{72}_{32}\mathrm{Ge}$ en los que el primer estado excitado tiene espín paridad distinto: 0^+, 3^-. La energía de los niveles 2^+ va decreciendo muy suavemente en función de A(véase la figura 3.3), y es aproximadamente *la mitad de la necesaria para romper un par*. Entre $A = 150$ y 190, los valores de $E(2^+)$ son pequeños y constantes.

2 Existe también (véase la figura 3.4) un segundo nivel con $J^P = 4^+$ tal que el cociente

$$\mathbf{e}\ \frac{E(4^+)}{E(2^+)} = \begin{cases} 2{,}0 & A < 150, \text{ con gran dispersión.} \\ 3{,}3 & A = 150 \to 190 \quad y \quad A > 220 \end{cases}$$

3 Los momentos dipolares magnéticos $\mu(2^+)$ son constantes (0,7 → 1,0) μ_N.

4 Los valores de $Q(2^+)$ son pequeños para $A < 150$ y grandes para $A = 150 \to 190$. Los momentos Q de los estados fundamentales de los lantánidos son también muy grandes.

El resultado de estas observaciones es que es necesario estudiar dos tipos de movimientos de tipo colectivo,

- Vibraciones alrededor de una forma, en equilibrio, esférica para núcleos ligeros ($A < 150$).

- Rotaciones de sistemas no esféricos (llamados deformados) para

núcleos pesados ($A = 150 \rightarrow 190$ y $A > 220$).

A continuación se verá, entre otras predicciones, cómo estos modelos colectivos dan cuenta de la estructura de niveles energéticos nucleares obtenidos experimentalmente.

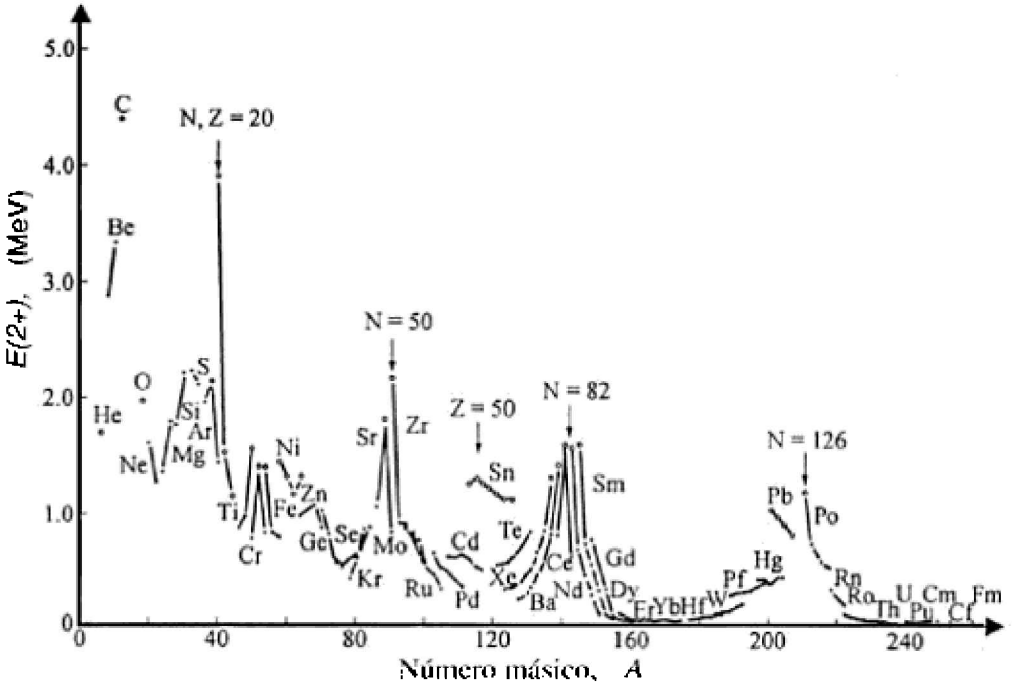


Figura 3.3: Espectro de energía del primer nivel excitado de los núcleos par–par que tiene espín–paridad $J^P = 2^+$. Se observan picos a determinados valores de Z o N asociados a números mágicos.

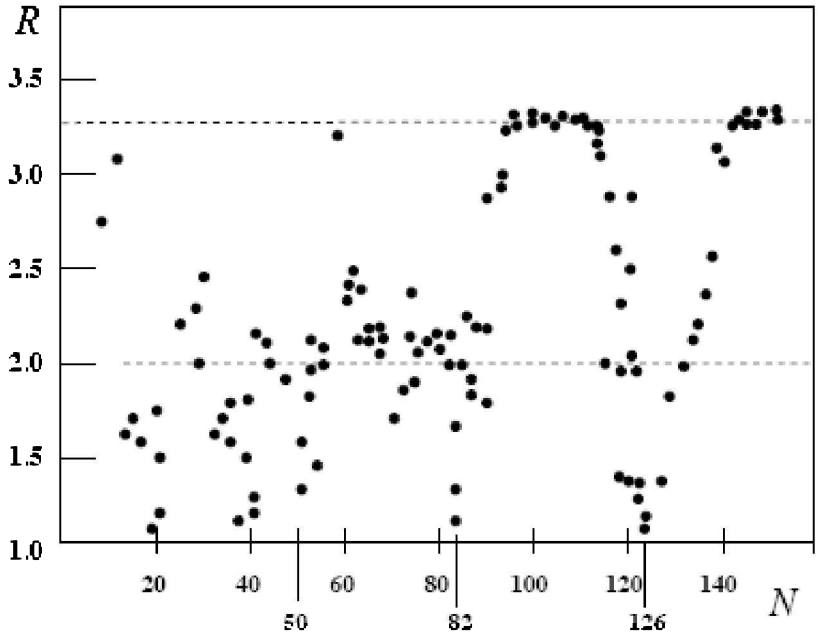


Figura 3.4: Cociente $R = \frac{E(4^+)}{E(2^+)}$ de las energías de los dos primeros estados excitados en núcleos par–par no esféricos, donde se observa que R = 3,3 para los lantánidos y actínidos, que se asocia a propiedades rotacionales. Las regularidades desaparecen alrededor de los números mágicos.

3.4 Modelo vibracional

3.4.1 Modos de vibración nuclear

El modelo vibracional[1] describe movimientos colectivos de los núcleos, siguiendo la imagen de gota líquida. Se supone que en equilibrio el núcleo es esférico, de radio R_0, aunque es sabido que en la práctica muchos núcleos son deformados en el estado fundamental. El núcleo es un fluido homogéneo y su forma queda descrita por las coordenadas de superficie (también se suelen llamar parámetros de forma) $\alpha_{\lambda\mu}$:

$$R(\theta,\phi) = R_0\left\{1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right\} \qquad (3.10)$$

Cada modo de vibración viene dado por λ, y queda descrito por los $2\lambda + 1$ parámetros de forma ($\alpha_{\lambda,\,\mu}$, $\mu = -\lambda, \ldots, \lambda$), ligados por invariancia rotacional y no todos ellos independientes. Se cumple que los estados correspondientes a estos modos vibracionales tendrán momento angular $J = \lambda\hbar$ y paridad $P = (-1)^{\lambda}$, existiendo, en principio, un número infinito de movimientos vibracionales. Los más sencillos pueden asociarse al valor de λ, y quedarán definidos por el armónico esférico correspondiente:

- $\lambda = 0$, modo monopolar, se trata de una excitación radial. El radio del núcleo cambia con el tiempo según $\alpha(t)$ ya que Y_{00} es constante. Se denomina modo respiratorio (sólo cambia la densidad). Se asocia a la conocida resonancia gigante isoescalar, que se observa en núcleos con $A > 16$. El valor de la energía, $E0$, de estos estados varía como $80A^{-1/3}$ MeV. Para núcleos par–par es una excitación $0^+ \rightarrow 0^+$. Así se encuentra en los doblemente mágicos $({}^{16}_{8}\mathrm{O}, {}^{40}_{20}\mathrm{Ca}, {}^{90}_{40}\mathrm{Zr}, {}^{208}_{82}\mathrm{Pb})$.

- $\lambda = 1$, modo dipolar. Se trata del primer modo en el que existen cambios de forma.
  - isoescalar, es decir, escalar en isospín: $T = 0$, describe un desplazamiento del centro de masas; la estructura del núcleo no cambia; sólo se desplaza, por lo que este movimiento es insensible a las fuerzas nucleares.
  - isovectorial, $T = 1$, se desplazan neutrones y protones en oposición. Es la llamada resonancia dipolar gigante ($J^P = 1^-$), estudiada desde 1940. La energía del máximo de la resonancia, $E1$, varía en función de A como $78A^{-1/3}$ MeV (unos 20 MeV para el Fe y unos 18 MeV para el Pb) y tiene una anchura de $\approx$ 6 MeV, independiente de A.

- $\lambda = 2$, modo cuadrupolar. Este es el modo fundamental del modelo vibracional puesto que da lugar a oscilaciones de formas no esféricas del núcleo. El núcleo oscila entre formas prolato ($Q > 0$) y oblato ($Q < 0$), pasando por esférico. Al cuantizar estos movimientos, se asocian con estados de un fonón (cuanto de energía vibracional) cuadrupolar ($J^P = 2^+$). También se han detectado resonancias cuadrupolares con una energía $E2 \sim 63A^{-1/3}$ MeV.

- $\lambda = 3$, modo octupolar, con $J^P = 3^-$, que corresponde a deformaciones más complejas.

Un hecho general es que los estados asociados a resonancias, ya sean del tipo $E0$, $E1$, $E2$, tienen energías muy elevadas. Son estados con números cuánticos bien definidos, pero muy alejados del estado fundamental.

En la figura 3.5 puede verse una representación esquemática de la forma que toman los núcleos cuando vibran en modo dipolar, cuadrupolar u octupolar.

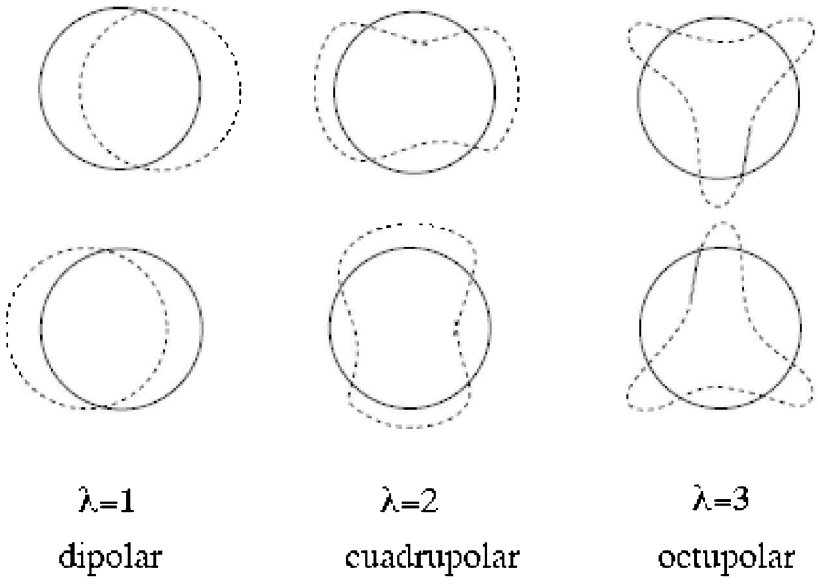


Figura 3.5: Representación de la deformación de los núcleos en función de

los modos vibracionales.

3.4.2 Espectro vibracional de energías

El estudio de los movimientos vibracionales de los núcleos se realiza introduciendo los llamados parámetros de forma $\alpha_{\lambda\mu}$ ya que son mucho más apropiados que manejando las posiciones individuales de los A nucleones. El hamiltoniano vibracional de orden λ, en función de estos parámetros de forma (que *grosso modo* representan las coordenadas de superficie) se puede escribir en el caso de pequeñas amplitudes de vibración como una suma $H = T + V$, es decir:

$$H_\lambda = \frac{1}{2} D_\lambda \sum_\mu \left| \frac{d\alpha_{\lambda\mu}}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} C_\lambda \sum_\mu |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \qquad (3.11)$$

donde:

$$D_\lambda = \frac{\rho R_0^5}{\lambda}$$

siendo ρ la densidad másica del núcleo y R_0 el radio en equilibrio, que puede aproximarse por $R_0 = 1{,}2 \times A^{1/3}$ fm. Representa el equivalente de la *masa* mecánica, formando parte del término de energía cinética de vibración superficial y

$$C_\lambda = \frac{1}{4\pi}(\lambda - 1)(\lambda + 2)\alpha_S A^{2/3} - \frac{5}{2\pi}\frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1}\alpha_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

es el término de energía potencial (A. Bohr-B. Mottelson), que contiene la energía de superficie (α_S = 18,3 MeV) y culombiana (α_C = 0,7 MeV) del modelo nuclear de la gota líquida que ya se han visto en la fórmula (1.36). Si los modos de vibración están desacoplados unos de otros, al ser H independiente del tiempo (constante del movimiento), la derivada

respecto a *t* da lugar a la ecuación del movimiento:

$$\boxed{D_\lambda \frac{d^2\alpha_{\lambda\mu}}{dt^2} + C_\lambda \alpha_{\lambda\mu} = 0} \qquad (3.12)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico esférico $(\ddot{x} + \omega^2 x = 0)$ de frecuencia:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{D_\lambda}} \qquad (3.13)$$

Se aprecia que la frecuencia del oscilador deriva de las propiedades de la forma del núcleo (gota o fluido nuclear).

Al cuantizar el oscilador, los estados vibracionales quedan definidos por tres números cuánticos, $|N; \lambda, \mu\rangle$, donde N es el número de cuantos de energía vibracional de multipolaridad λ (el llamado fonón, o cuanto del oscilador, por su parecido a la propagación del sonido en la materia). El fonón es un bosón de espín–paridad $J = \lambda\hbar$ y $P = (-1)^\lambda$. En efecto, se trata de un bosón puesto que los valores de λ son enteros. El significado de μ es el de la proyección de λ; luego, para cada valor de λ existirán $2\lambda + 1$ valores de μ. El vacío es el estado $|0; 0,0\rangle$, y el estado correspondiente a 1 fonón se obtiene aplicando el operador creación, $\beta^+_{\lambda\mu}$, a dicho estado vacío. Los operadores creación y destrucción resultan de cuantizar los parámetros de forma, considerados esta vez como operadores, debidamente normalizados y cumplen las reglas de conmutación de los operadores creación y destrucción de fonones:

$$[\beta^+_{\lambda\mu}, \beta^+_{\lambda'\mu'}] = 0; \quad [\beta_{\lambda\mu}, \beta_{\lambda'\mu'}] = 0; \quad [\beta_{\lambda\mu}, \beta^+_{\lambda'\mu'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'} \qquad (3.14)$$

El hamiltoniano vibracional correspondiente al modo λ es:

$$H_\lambda = \hbar\omega_\lambda \sum_\mu \left(\hat{n}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right) \tag{3.15}$$

en donde $\hat{n}_{\lambda\mu}$ es el operador que da el número de fonones de cada proyección μ de la multipolaridad λ y cuya expresión es $\hat{n}_{\lambda\mu} = \beta^+_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu}$. Si se suman las proyecciones, $N_\lambda = \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}$, se obtiene el número de fonones de multipolaridad λ. De esta manera, la energía de los estados vendrádadapor:

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda \sum_\mu \left(n_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right) \tag{3.16}$$

Puede verse que los niveles están espaciados por la cantidad $\hbar\omega_\lambda$ siendo $E_\lambda = N_\lambda\hbar\omega_\lambda$ su energía y N_λ el número de fonones de multipolaridad λ.

Sea un núcleo par–par en el estado fundamental 0^+. El estado vacío (ausencia de vibraciones), será el estado sin fonones (tendrá $J^p = 0^+$).

Las excitaciones más interesantes del modelo vibracional son las vibraciones cuadrupolares ($\lambda = 2$) y se puede probar que los estados debidos a N_2 fonones, producirán estados excitados con los números cuánticos que aparecen en la tabla 3.1, simplemente teniendo en cuenta la composición de los momentos angulares.

En el caso de una vibración correspondiente a dos fonones cuadrupolares, los valores de J posibles van de 0 a 4, pero la simetría exigida a un sistema de 2 fonones idénticos[2] excluye los estados 1^+ y 3^+, con lo que los estados posibles quedan reducidos al triplete 0^+, 2^+, 4^+ de la tabla anterior. En efecto, para estados de dos fonones se cumple que:

$$|2;J,M\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mu'\mu''}\left[1+(-1)^J\right](22J|\mu'\mu''M)\,\beta^+_{2\mu'}\beta^+_{2\mu''}|0;0,0\rangle$$

luego, sólo existen estados con *J* par, ya que los estados con *J* impar, se anulan. En el caso de vibraciones generadas por estados de tres fonones, de los siete valores posibles de *J*, de 0 a 6, la simetrización de la función de ondas sólo permite el quintuplete 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+ excluyendo los valores 1^+ y 5^+.

Tabla 3.1: Excitaciones debidas a vibraciones cuadrupolares. Como las energías se suelen referir a la del estado fundamental, suele tomarse la energía $\varepsilon_0 = 0$ como referencia.

Nº de fonones cuadrupolares	Energía	valores de J^P posibles
0 (fundamental),	$\epsilon_0 = \frac{5}{2}\hbar\omega_2$	0^+
1	$\hbar\omega_2 + \epsilon_0$	2^+
2	$2\hbar\omega_2 + \epsilon_0$	$0^+, 2^+, 4^+$
3	$3\hbar\omega_2 + \epsilon_0$	$0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$

Se habla de triplete (2 fonones) o quintuplete (3 fonones) cuadrupolar. La energía de cada estado de un multiplete depende del número de fonones cuadrupolares que origina el multiplete (por ejemplo en el caso de fonones cuadrupolares, N_2); es decir:

$$E_2^{(N)} = \hbar\omega_2\left(N_2 + \frac{5}{2}\right) \qquad (3.17)$$

El modelo predice que todos los miembros del multiplete tienen la misma energía. O sea, en principio los tres niveles del triplete de 2 fonones cuadrupolares están degenerados en energía. Experimentalmente se observa que los niveles del triplete (quintuplete) de 2 (3) fonones cuadrupolares no aparecen degenerados en energía, sino que tienen energías ligeramente diferentes; ello es debido a la existencia de fuerzas

residuales que no se han tenido en cuenta en el hamiltoniano. También se observa que los distintos estados de un mismo multiplete tienen espín diferente *J*; el modelo vibracional no predice diferencias de niveles de energía entre estados de espín diferente.

Un ejemplo típico de niveles nucleares vibracionales es el que tiene el $^{114}_{48}Cd$, con los niveles (0; 0,558; [1,135; 1,210; 1,284]) MeV, con los números cuánticos esperados (0^+, 2^+, [0^+, 2^+, 4^+]), o su isótopo $^{118}_{48}Cd$, cuyos niveles pueden verse en la figura 3.6. Se observa el singlete 2^+ asociado a vibraciones debidas a un fonón cuadrupolar y el triplete (0^+, 2^+, 4^+), casi degenerado en energía, debido a dos fonones cuadrupolares.

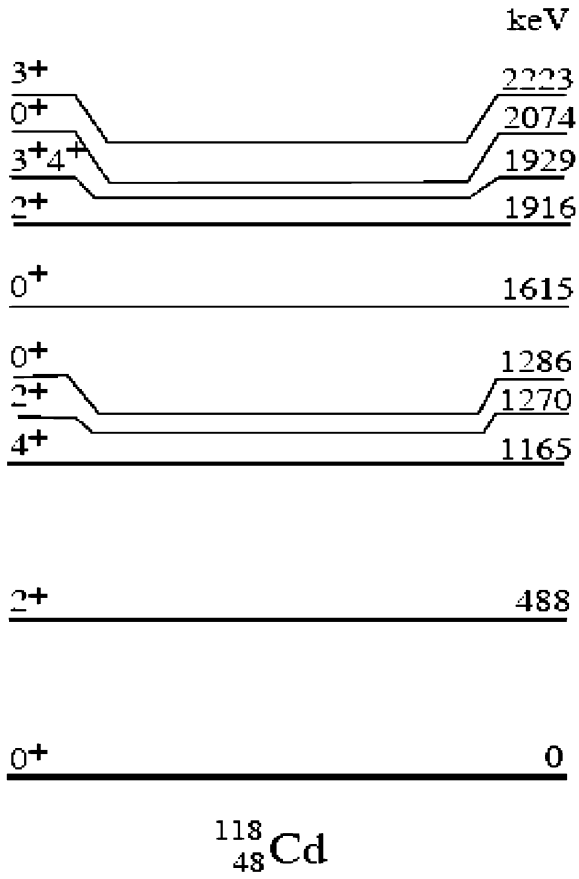


Figura 3.6: Ejemplo de estructura tipo vibracional de niveles en el $^{118}_{48}Cd$.

Las transiciones entre niveles vibracionales tienen lugar por emisión de fotones (son transiciones electromagnéticas). Es la espectroscopía gamma la que permite estudiar los niveles energéticos de los núcleos para compararlos a las predicciones de los modelos.

Aparte de la estructura cuántica de niveles predichos por el modelo vibracional (los debidos a fonones dipolares o multipletes de fonones cuadrupolares, etc.) existen otras predicciones que pueden entenderse por la propia naturaleza colectiva del modelo. De entre ellas conviene tener presentes:

1 El momento dipolar magnético de estados colectivos (tanto vibracionales como rotacionales) se calculará:

$$\mu(J) = \left(J\frac{Z}{A}\right)\frac{\mu_N}{\hbar}.$$

Luego para los niveles excitados 2^+, estarán comprendidos entre 0,8 y 1,0 μ_N.

2 El momento cuadrupolar eléctrico del estado fundamental de los núcleos par–par será prácticamente nulo, $Q \sim 0$, ya que en equilibrio son núcleos esféricos.

3 La relación entre niveles energéticos $E(4^+)/E(2^+) = 2{,}0$, ya que $E \propto N_2$, número de fonones cuadrupolares, que se cumple para núcleos con $A < 150$ (lo que corresponde a $N < 82$ en la figura 3.4, si se excluyen las regiones de números mágicos).

3.4.3 Vibraciones cuadrupolares y deformación nuclear

La relación entre los operadores de superficie y los operadores creación y destrucción de fonones puede elegirse:

$$\hat{\alpha}_{\lambda,\mu} = \left(\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}\right)^{1/2} (\hat{\beta}^+_{\lambda,\mu} + (-1)^\mu \hat{\beta}_{\lambda,-\mu})$$

Teniendo en cuenta esta relación y lo visto anteriormente se pueden ampliar las siguientes predicciones del modelo vibracional:

1) La frecuencia del oscilador, w_2, puede determinarse experimentalmente a partir de la diferencia entre niveles energéticos (entre el singlete y el triplete por ejemplo), y a partir de ahí encontrar una relación entre los coeficientes C_2 y D_2, ya que $\hbar\omega_2 = \hbar\sqrt{C_2/D_2}$.

2) La deformación media de un núcleo, $\langle \alpha_{2\mu} \rangle = \langle N; \lambda, \mu | \hat{\alpha}_{2\mu} | N; \lambda, \mu \rangle = 0$ puesto que el operador $\hat{\alpha}$ es proporcional al operador destrucción y el valor esperado anterior se anula.

3) Al contrario que en el caso de la deformación media, la deformación cuadrática media, $\langle \beta^2 \rangle = \langle N; \lambda, \mu | \sum_\mu |\alpha_{2\mu}|^2 | N; \lambda, \mu \rangle$, no se anula. Está relacionada con la energía del estado vibracional:

$$E_2(N) = C_2 \langle \beta^2 \rangle \qquad (3.18)$$

En efecto, el teorema virial dice que el valor de la energía está relacionado con el valor esperado de la energía potencial: $\langle E \rangle = 2\langle V \rangle$. Al aplicarlo a las vibraciones cuadrupolares, dado que la energía potencial es proporcional a $\sum_\mu |\alpha_{2\mu}|^2$ según (3.11), la energía del nivel $E_2(N)$ está relacionada con la deformación cuadrática media del núcleo. Así por ejemplo, para un estado de N fonones $\beta^2_N = (5 + 2N)\hbar/(2D_2\omega_2)$, luego para el estado fundamental $\beta^2_0 = 5\hbar/(2D_2\omega_2)$.

4) A partir de la definición del radio R, se tiene que la desviación

cuadrática media del radio nuclear es $\langle \Delta R^2 \rangle = R_0^2 \langle \beta^2 \rangle$.

5) El momento cuadrupolar de un estado excitado vibracional caracterizado por *N* fonones cuadrupolares se calcula:

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle N; \lambda, \mu = \lambda || \hat{Q}_{20} || N; \lambda, \mu = \lambda \rangle$$

Aquí se trata del momento cuadrupolar eléctrico colectivo, debido a la estructura de carga nuclear. Sea ρ_c la densidad de carga; como la definición del momento cuadrupolar es:

$$eQ_{20} = \rho_c \int_{nucleo} r^2 Y_{20}(\Omega) d^3 r$$

si se calcula para un estado de 1 fonón resulta:

$$Q_{N=1} = -\frac{12}{35\pi} \beta_0^2 Z R_0^2$$

El estudio de la estructura de niveles se lleva a cabo mediante espectroscopía γ. El hamiltoniano que describe la desintegración de un estado cuadrupolar es función del valor esperado del operador cuadrupolo. La probabilidad de desintegración γ, por ejemplo del estado 0^+ del triplete al 2^+ del singlete, tiene la forma:

$$\lambda(E2, 0^+ \rightarrow 2^+) \propto \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \left| \langle 2^+ || \hat{Q}_{2\mu} || 0^+ \rangle \right|^2 = (\rho_0 R_0^5)^2 \beta_0^2$$

en donde los factores de espín tienen en cuenta la multiplicidad de estados inicial y final. Se observa algo importante: la probabilidad de desintegración γ (o lo que es lo mismo, la vida media del estado) informa también sobre la deformación.

Las predicciones de este modelo son bastante buenas para núcleos que

en el estado fundamental son esféricos y están situados cerca de capas cerradas; sin embargo, las predicciones para el momento cuadrupolar Q y las probabilidades de desintegración $\lambda(E2)$ no suelen ser muy precisas.

3.5 Modelo rotacional

Ya se ha visto que los núcleos con capas cerradas y, por supuesto, los núcleos mágicos tienen simetría esférica. En las regiones alejadas de los números mágicos pueden encontrarse núcleos deformados, cuya forma en equilibrio no es esférica. Ello es consecuencia de la interrelación entre:

- la fuerza nuclear de corto alcance
- la fuerza culombiana, repulsiva, de largo alcance
- la fuerza centrífuga de un núcleo en giro.

Típicamente, los núcleos deformados suelen encontrarse:

- entre las tierras raras, $A \sim 170$,
- los actínidos, $A > 220$ y
- entre núcleos que pueden explicarse por el modelo de capas y que son los que van llenando los estados de las capas $1s - 2d$, es decir los que tienen número másico $A \sim 24$.

Los estados excitados de los núcleos de la familia de los lantánidos o tierras raras ($150 \leq A \leq 190$) y de los actínidos ($220 \leq A \leq 250$) son núcleos superdeformados. Se trata de núcleos cuyas formas en equilibrio no son esféricas.

Un núcleo deformado podrá tener distintos estados energéticos que corresponderán cuánticamente a los estados posibles de asimetría

azimutal.

3.5.1 Hamiltoniano rotacional

Sea un núcleo con un momento angular intrínseco $\vec{I}$, que puede explicarse a partir del momento angular individual de los nucleones $\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i$. Si además el núcleo gira, inducirá un momento angular $\vec{R}$ debido a la rotación. Clásicamente la energía rotacional de un objeto con un momento de inercia *I*, girando con velocidad angular ω es:

$$E_R = \frac{1}{2}\mathcal{I}w^2 = \frac{1}{2\mathcal{I}}R^2$$

ya que el momento angular de rotación es $R = Iw$. Cuánticamente, el momento angular del núcleo que gira vendrá dado por $\vec{J} = \vec{I} + \vec{R}$. El hamiltoniano se podrá escribir $H = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2I_i} J_i^2$. Si se supone que el núcleo tiene simetría axial, llamando $I_1 = I_2 = I$, queda:

$$H = \frac{1}{2\mathcal{I}}(\vec{J}^2 - \vec{J}_3^2) + \frac{1}{2\mathcal{I}_3}\vec{J}_3^2 \qquad (3.19)$$

y los niveles excitados, E_J, del núcleo debidos a los estados de rotación se calcularán como siempre: $H|J, M\rangle = E_J|J, M\rangle$. Pero para realizar cálculos (véase la figura 3.7), es habitual utilizar dos sistemas de referencia:

- coordenadas intrínsecas (1,2,3). Referencian el núcleo respecto a su eje de simetría intrínseco. Entonces $J_3|JMK> = K\hbar|JMK>$
- coordenadas laboratorio (*x, y, z*), en las que *J, M* definen los estados con momento angular bien definidos. Se cumplirá:

$$J^2|JMK>=J(J+1)\hbar^2|JMK> \quad \text{y} \quad J_z|JMK>=M\hbar|JMK>$$

En efecto, para definir la orientación en el espacio de un objeto en rotación son necesarios tres parámetros (los ángulos de Euler α, β, γ). Cuánticamente, se toma $|JMK>$, siendo K la proyección de J en el eje de simetría del núcleo (el sistema intrínseco). K toma los mismos valores que la proyección de J en el eje del laboratorio (M): de $-J$ a J.

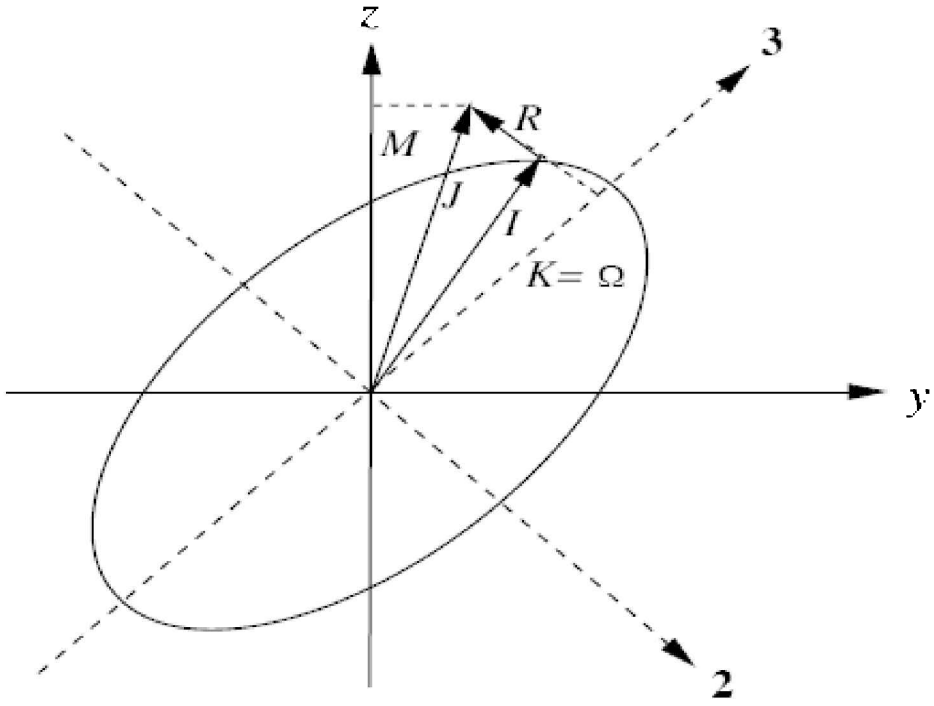


Figura 3.7: Sistema de referencia para un núcleo deformado con simetría axial. J es el momento angular total, M y K las terceras componentes respecto al eje del laboratorio (z) y el eje intrínseco (3). R es el vector que representa el momento angular de la rotación colectiva que se suma al momento angular intrínseco I (con tercera componente $\Omega = K$) dando J.

Para calcular el espectro energético de los núcleos en rotación, habrá que resolver la ecuación de valores propios del hamiltoniano visto en (3.19), obteniendo:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1) + E_K \qquad (3.20)$$

Se observa que para cada estado intrínseco del núcleo definido por *K*, se tiene una *banda rotacional*, es decir, un conjunto de niveles energéticos E_J con momento angular *J* distinto. En la expresión anterior E_K representa el valor base de la banda rotacional, que contiene la contribución de la parte intrínseca de la función de ondas, que depende de J_3 y cuyo valor propio es *K*.

El núcleo deformado quedará caracterizado una vez se conozca el momento de inercia *I*.

El momento angular total *J* de los estados pertenecientes a una banda rotacional, por conservación de la paridad, toma una serie de valores que dependen del espín y paridad, K^P, de la base, que es lo mismo que decir que dependen del estado intrínseco; así si la banda rotacional comienza a partir de un estado base:

- $K^P = 0^+$ dará lugar a una serie de niveles con $J = 0, 2, 4, \ldots$ y $P = +$,
- $K^P = 0^-$ dará lugar a una serie de niveles con $J = 1, 3, 5, \ldots$ y $P = -$,
- $K > 0$ dará lugar a una serie de niveles con $J = K, K+1, K+2, \ldots$, y paridad + o $^-$.

Por ejemplo, para los núcleos par–par las bandas rotacionales que surjan del estado fundamental (0^+) serán estados con espín–paridad: 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+, … Ello se encuentra efectivamente en los espectros de:

$$^{164}_{68}\mathrm{Er} \rightarrow \quad (0; 91{,}4; 299{,}5; 614{,}4; 1024{,}6; 1518{,}1; 2082{,}7)\ \mathrm{keV}$$

$$^{170}_{72}\mathrm{Hf} \rightarrow \quad (0; 100; 321; 641; 1041; 1500; 2010; 2560)\ \mathrm{keV}$$

En estos núcleos par–par, el movimiento intrínseco de los nucleones de valencia tiene momento angular nulo ($K = 0$). En estos casos los niveles

nucleares se deben a la rotación colectiva exclusivamente.

Se comprueba también que este modelo predice correctamente el cociente $E(4^+)/E(2^+) = 3{,}33$, que se observa en los lantánidos y actínidos (véase por ejemplo el caso del $^{238}_{92}\mathrm{U}$ de la figura 3.8).

La predicción para el momento dipolar magnético de estos núcleos es la misma que en el caso del modelo vibracional:

$$\boxed{\mu(J) = \left(J\frac{Z}{A}\right)\frac{\mu_N}{\hbar}.}$$

3.5.2 Momentos de inercia nucleares

Puede compararse el valor del momento de inercia experimental de los núcleos con algunas formas conocidas.

Sea un núcleo de forma elipsoidal. Se introduce el *parámetro de deformación*: $\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_3 - R_\perp}{R}$, con lo que el elipsoide puede parametrizarse:

$$R(\theta,\phi) = \overline{R}\left[1 + \delta Y_{20}(\theta,\phi)\right]$$

Con esta definición, el momento de inercia del elipsoide rígido toma el valor:

$$\mathcal{I}_{rig} = \frac{2}{5}M\overline{R}^2(1 + 0{,}31\delta) \qquad (3.21)$$

en donde se verifica que si $\delta = 0$ se obtiene el momento de inercia de una esfera rígida. El valor del parámetro δ se obtiene del momento cuadrupolar intrínseco que vale:

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \delta (1 + 0{,}16\delta)$$

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z R_0^2 \delta (1 + 0{,}16\delta)$$

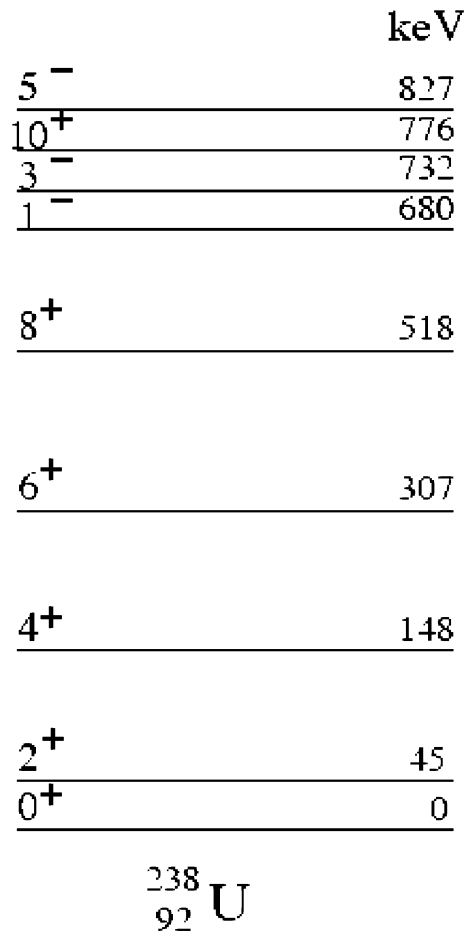


Figura 3.8: Ejemplo de estructura de niveles de tipo rotacional en el $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Tomando *A* ≈ 170, valor representativo de los núcleos lantánidos, el momento de inercia vale $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{rig}} \approx 6$ keV. Si por el contrario se supone

que el núcleo es un fluido irrotacional (un continente rígido, por ejemplo una vasija en forma de elipsoide que contiene un fluido sin fricción, con lo que sólo girará el fluido en contacto con la superficie de la vasija), su momento de inercia vendría dado por:

$$\mathcal{I}_{fluido} = \frac{9}{8\pi} M \overline{R}^2 \delta \qquad (3.22)$$

con lo que se obtiene, $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{fluido}} \approx 90$ keV.

Para núcleos con el primer estado excitado $E(2^+)$ = 90 keV, por ejemplo entre los lantánidos, se verifica que el momento de inercia vale unos 15 keV, lo que no coincide con ninguno de los casos anteriores utilizados. La conclusión de este estudio es que el núcleo tiene propiedades que se encuentran entre un sólido rígido y un fluido. También se concluye que la noción (clásica) de momento de inercia tiene sentido en tanto que se considere como un parámetro, más que como una magnitud que caracteriza la estructura nuclear.

3.5.3 Momentos cuadrupolares y deformación de los núcleos

También puede relacionarse la deformación nuclear con el momento cuadrupolar intrínseco. Recuérdese que por definición el momento cuadrupolar intrínseco es:

$$Q_0 = \int (3z^2 - r^2)\rho(r) d\vec{r}$$

si, por ejemplo, el núcleo tiene forma de elipsoide rígido:

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z \overline{R}^2 \delta (1 + 0{,}16\delta)$$

que relaciona el parámetro de deformación nuclear δ con el momento cuadrupolar eléctrico intrínseco. Si se utiliza la parametrización de los semiejes del elipsoide (*b, b, a*)con $a > b$ se demuestra que el momento cuadrupolar es:

$$Q_0 = \quad Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z\overline{R}^2\delta \quad {}^{2}\frac{\Delta R}{\overline{R}}$$

siendo el valor medio del radio $\overline{R} = \frac{1}{2}(a+b)$ y $\Delta R = (a-b)$. Utilizando el parámetro de deformación cuadrupolar δ definido más arriba, se reproduce a primer orden del momento cuadrupolar eléctrico:

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z\overline{R}^2\delta$$

Experimentalmente, se mide el momento cuadrupolar en el sistema laboratorio. Su relación con el momento intrínseco es:

$$Q_{JK} = \frac{3K^2 - J(J+1)}{(J+1)(2J+3)} Q_0 \qquad (3.23)$$

para núcleos par–par ($K = 0$), los momentos cuadrupolares de sus estados excitados ($J = 2, 4, 6, \cdots$), se tendrá:

$$Q = -\frac{J}{2J+3} Q_0 \qquad \begin{cases} J = 1 & \Longrightarrow |Q| = 0{,}2Q_0 \\ J >> & \Longrightarrow |Q| = 0{,}5Q_0 \end{cases}$$

con lo que si se trata por ejemplo del estado excitado 2^+ de un núcleo par–par ($K = 0$, $\vec{J}$ = momento angular rotacional $\vec{R}$, ya que $\vec{J} = \vec{I} + \vec{R}$), el valor experimental será $Q_{exp} = -\frac{2}{7}Q_0$. En general, el momento de inercia nuclear puede mantenerse constante. Sin embargo para estados

con espín muy elevado (como por ejemplo en el $^{238}_{92}\mathrm{U}$), sucede que el momento de inercia disminuye en función de la frecuencia de rotación ω, para después volver a aumentar. Es el fenómeno de *backbending*, relacionado con el apareamiento de los nucleones. Se denomina estado *yrast* al de mínima energía para cada banda rotacional (cada espín). En núcleos deformados también existen bandas rotacionales que tienen como base estados vibracionales. Se denominan vibraciones β si tienen lugar según el eje de simetría y el estado base tiene $J^P = 0^+$ y vibraciones γ en caso contrario, cuyo estado base tiene $J^P = 2^+$.

3.6 Propiedades de los núcleos con *A* impar

Los modelos colectivos o macroscópicos no tienen capacidad predictiva sobre los números cuánticos (espín–paridad) de los estados fundamentales de los núcleos con *A* impar. Estos núcleos presentan una serie de características que es necesario abordar con otro tipo de modelos. El espín de los núcleos con *A* impar, es semientero. La paridad puede ser + o −. Contrariamente a los estados fundamentales de los núcleos par–par, tienen momento dipolar magnético no nulo y, si su espín es $> \frac{1}{2}$, momento cuadrupolar eléctrico no nulo.

Se puede comprobar que los núcleos con *A* impar reproducen con bastante precisión la idea extrema de modelo de partícula individual. En éste, se supone a los nucleones apareados en una estructura con $J^P = 0^+$, de forma que las propiedades del núcleo vienen dadas por el nucleón no apareado. El nucleón individual ocupará un estado con momento angular orbital, ℓ, bien definido. Al tener en cuenta el espín del nucleón, *s*, se tendrá un momento angular total $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$; el espín del núcleo será el del nucleón no apareado, $J = j$, y como $P = (-1)^\ell$, el valor de la paridad del núcleo fijará cuál es el valor correcto del momento angular orbital entre los dos posibles $\ell = j \pm \frac{1}{2}$.

Se aborda a continuación el modelo nuclear de partícula individual y

se estudian soluciones de la ecuación de Schrödinger. Una vez obtenidas las soluciones de la ecuación de Schrödinger, que da los estados de nucleón individual, para realizar cálculos se podrá utilizar una base de estados con el momento angular total del nucleón aislado bien definido:

$$\psi_{jm}(n\ell) = R_{n\ell}(r) \sum_{\mu\sigma} C(\ell 1/2 j | \mu\sigma m) Y_{\ell\mu}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2},\sigma} \qquad (3.24)$$

siendo $C(\ell \frac{1}{2} j | \mu\sigma m)$ los coeficientes de Clebsch–Gordan. En lo que sigue, se representará la función de ondas $\psi_{jm}(n\ell)$ por la notación $|j, m>$.

3.7 Modelos de partícula individual. Modelo de capas esférico

El modelo de capas es un modelo que describe las propiedades nucleares a partir de la interacción efectiva de un nucleón con un potencial. No se consideran las interacciones nucleón–nucleón, sino la de un constituyente con el potencial medio fenomenológico. De aquí el origen de la denominación de modelos de partícula individual. Contrariamente a los átomos, en donde el núcleo es el que crea el potencial en el que se mueven los electrones, en el caso de los núcleos no existe un protagonista con el que se pueda identificar el campo nuclear; todos los nucleones cooperan y dan lugar a un potencial medio, empírico, que por lo tanto es fenomenológico. Un buen potencial deberá explicar las propiedades *cuánticas* de los núcleos.

Así, ya se ha visto que uno de los hechos experimentales bien establecidos es el de la existencia de núcleos muy estables cuando los números de nucleones coinciden con los números mágicos:

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$$
$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

cuyas propiedades más destacadas son:

a) tienen energías de ligadura E_L muy elevadas,
b) tienen discontinuidades en las energías de partículas α emitidas (véase la figura 3.9),
c) presentan variaciones bruscas en las energías del primer estado excitado 2^+ de los núcleo par-par (véase la figura 3.3),
d) tienen energías de separación S_p y S_n mayores que en núcleos vecinos y
e) sus momentos cuadrupolares $Q \approx 0$, por lo que son esféricos en el estado fundamental.
f) Los doblemente mágicos $^4_2\mathrm{He}$, $^{16}_{8}\mathrm{O}$, $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, $^{90}_{40}\mathrm{Zr}$, $^{132}_{50}\mathrm{Sn}$ y $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ los más estables y más abundantes que sus vecinos (exceptuando el hidrógeno) en el universo.

El objetivo de un buen modelo de capas es buscar un potencial que dé lugar a una estructura de niveles energéticos cuantizados (que se llaman capas) y proceder al llenado de los estados teniendo en cuenta el principio de exclusión de Pauli. Las fuerzas de apareamiento producen un acoplamiento entre dos nucleones favoreciendo que si uno ocupa el estado $|j, m\rangle$, el otro ocupará el estado $|j, -m\rangle$, de forma que resulta un estado 0^+. Análogamente, cuando una capa ($2j+1$ estados, que es un número par) se llena, los nucleones se acoplan a pares dando lugar a la configuración más estable, que coincide con un momento angular 0.

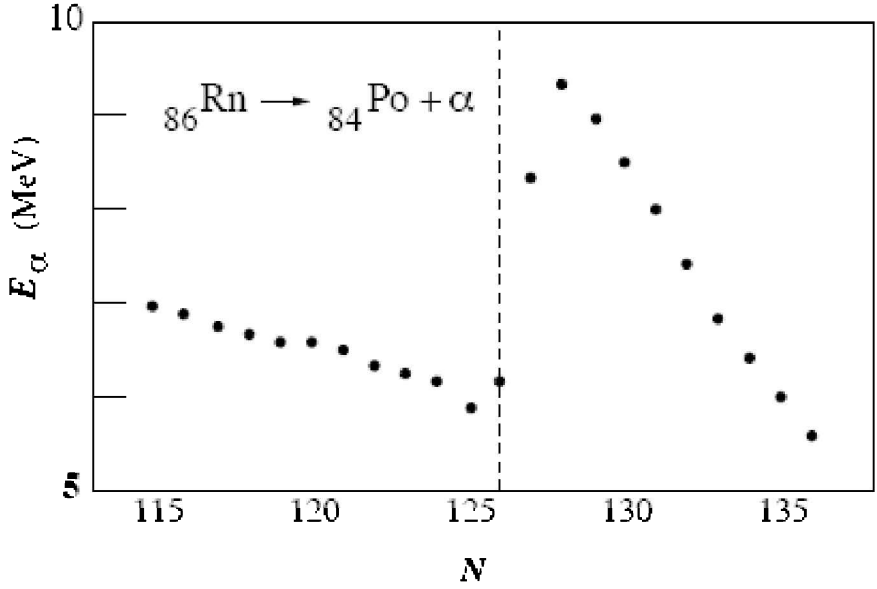


Figura 3.9: Energías de la partícula α en la desintegración de los isótopos del $_{86}$Rn. Obsérvese el rápido aumento cuando el *hijo* ($_{84}$Po) tiene N = 126 neutrones, que es un número mágico.

3.7.1 Modelo de capas esférico

El modelo de capas esférico es un modelo de partícula individual (denominado en la literatura modelo *single–particle*, abreviadamente sp) que describe la interacción de los nucleones con un campo medio con simetría esférica que representa la ligadura media nuclear. El hamiltoniano se escribe:

$$H = \sum_i h_c(r_i) \qquad \text{con} \qquad h_c(r_i) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_i + V(r_i)$$

siendo $V(r_i)$ un potencial central efectivo (tipo Hartree-Fock) que describe la interacción media de un nucleón con el resto de los nucleones del núcleo. Se trata de una interacción a un cuerpo. Puede verse que es una aproximación al hamiltoniano visto en la expresión (3.4), donde el

potencial utilizado es el potencial nucleón-nucleón (interacción a dos cuerpos).

Existirán interacciones residuales que no están contenidas en el potencial central efectivo. La más importante es la de apareamiento.

La solución de la ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A)$$

predice, para cada función de ondas (cada estado nuclear), niveles energéticos cuantizados. Al tratarse de un potencial efectivo, que sólo depende del nucleón *i*, la función de ondas es separable y se puede escribir:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A) = \prod_i^A \phi_i(\vec{r}_i)$$

aunque más precisamente en vez de un producto de funciones debe de utilizarse un determinante de Slater para cumplir con el principio de simetrización; la función de ondas debe ser antisimétrica bajo intercambio de nucleones:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1), \phi_1(\vec{r}_2), ..., \phi_1(\vec{r}_A) \\ \phi_2(\vec{r}_1), \phi_2(\vec{r}_2), ..., \phi_2(\vec{r}_A) \\ ..... \\ \phi_A(\vec{r}_1), \phi_A(\vec{r}_2), ..., \phi_A(\vec{r}_A) \end{vmatrix}$$

En cualquier caso, habrá una ecuación de Schrödinger para cada nucleón:

$$h(r_i)\phi_i(\vec{r}_i) = \epsilon_i \phi_i(\vec{r}_i)$$

siendo ε_i la energía del estado *i* de nucleón independiente. La energía del núcleo se podrá escribir como una suma de energías, ε_i, departícula individual:

$$E = \sum \epsilon_i$$

Si el potencial $V(r_i)$ es central, ya se sabe que la función de ondas $\varphi(r_i)$ será factorizable y se podrá separar la parte radial de la parte angular,

$$\phi_{n,\ell,m}(\vec{r}_i) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \qquad (3.25)$$

Las funciones de onda de los estados partícula individual dependerán de números cuánticos tales como el momento angular orbital, ℓ y su proyección m_ℓ. La energía en el caso de potenciales centrales no dependerá de estos números cuánticos; es decir habrá muchos estados degenerados energéticamente. Los niveles energéticos predichos por estos potenciales, serán ocupados por los nucleones cumpliendo el principio de exclusión de Pauli; es decir, no podrá existir más de un nucleón en un estado cuántico. Por ello, el número de nucleones que ocuparán la misma capa energética es: $2(2\ell + 1)$, donde el primer factor 2 viene de los dos estados de espín posibles de los nucleones. Las discontinuidades energéticas estarán asociadas a las capas y aunque sea difícil de imaginar, podrá hablarse de órbitas nucleares asociadas a las capas o subcapas.

Se estudiarán a continuación algunos ejemplos de potenciales centrales con solución analítica de la ecuación de Schrödinger conocida, para ilustrar la forma de los espectros obtenidos y poder compararlos con los resultados experimentales.

Espectro del pozo esférico infinito

Un pozo esférico infinito puede definirse:

$$V(r) = \begin{array}{ll} -V_0, & 0 \leq r \leq R \\ \infty, & r \geq R \end{array}$$

Como el potencial es central, la solución de la ecuación de Schrödinger

para $h(r_i)$ será de la forma:

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

en donde además, $R_{n\ell}(r) = u_{n\ell}(r)/r$ quedando la ecuación radial:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] u(r) = E u(r)$$

En este caso, la solución es:

$$u_{n\ell m}(K_{n\ell} r) = \sqrt{\frac{2}{R^3}} \frac{1}{j_{\ell+1}(K_{n\ell} R)} j_\ell(K_{n\ell} r) Y_{\ell m}$$

y las soluciones para las energías:

$$E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2\mu} K_{n\ell}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{X_{n\ell}^2}{R^2}$$

en donde $X_{n\ell}^2$ son los ceros de la función de Bessel $j_\ell(KR)$ con $K = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$, con lo que se obtienen los niveles (orbitales) conocidos que están definidos por $(n\ell)$; la ocupación de cada nivel es $2(2\ell + 1)$, que da lugar a una estructura de capas cuyos números de ocupación (2, 8, 20, 40, 92) no reproducen los números mágicos.

Espectro del oscilador armónico

El potencial (central) del oscilador armónico, se escribe:

$$\mathcal{V}(r_i) = \frac{1}{2}\mu_i \omega^2 r_i^2 \qquad (3.26)$$

siendo r_i la posición del nucleón i y μ_i su masa reducida (que es prácticamente la masa del nucleón, ya que la masa del núcleo es mucho

más grande). El parámetro ω es la frecuencia del oscilador. El potencial del oscilador armónico es una buena aproximación para el potencial efectivo del modelo de partícula individual. Al ser un potencial central (tiene simetría esférica), la función de ondas del sistema podrá escribirse:

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

Las soluciones para las funciones radiales de la ecuación de Schrödinger, para un oscilador armónico, isótropo y tridimensional son:

$$R_{n\ell}(r) = \left\{ \frac{2^{n+\ell+1}(\nu)^{\frac{3}{2}}}{(n-1)!(2n+2\ell-1)!!\sqrt{\pi}} \right\}^{\frac{1}{2}} \rho^{\ell} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \mathcal{L}_{n-1}^{\ell+\frac{1}{2}}(\rho^2)$$

en donde $\nu = \frac{\mu\omega}{\hbar}$ es el parámetro del oscilador, cuyo valor aproximado es $A^{-1/3}$ fm^{-2}; $\rho^2 = \nu r^2$ y

$$\mathcal{L}_m^k(z) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r (m+k)!}{(m-r)!(k+r)!r!} z^r$$

son los polinomios generalizados de Laguerre. Ejemplos de algunas funciones de onda radiales, $R_{n\ell}(r)$, del oscilador armónico son:

$$R_{1s} = 2\left(\frac{\nu^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\nu r^2}{2}} \qquad R_{1p} = \sqrt{\frac{2^3}{3}}\left(\frac{\nu^5}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} r e^{-\frac{\nu r^2}{2}}$$

$$R_{1d} = \sqrt{\frac{2^4}{15}}\left(\frac{\nu^7}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} r^2 e^{-\frac{\nu r^2}{2}} \qquad R_{2s} = \sqrt{\frac{2^3}{3}}\left(\frac{\nu^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (\frac{3}{2} - \nu r^2) e^{-\frac{\nu r^2}{2}}$$

$$R_{1f} = \sqrt{\frac{2^6}{105}}\left(\frac{\nu^9}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} r^4 e^{-\frac{\nu r^2}{2}} \qquad R_{2p} = \sqrt{\frac{2^4}{15}}\left(\frac{\nu^5}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (\frac{5}{2} - \nu r^2) e^{-\frac{\nu r^2}{2}}$$

$$R_{1g} = \sqrt{\frac{2^6}{945}}\left(\frac{\nu^{11}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} r^4 e^{-\frac{\nu r^2}{2}} \qquad R_{2d} = \sqrt{\frac{2^5}{105}}\left(\frac{\nu^7}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (\frac{7}{2} - \nu r^2) e^{-\frac{\nu r^2}{2}}$$

Los niveles de energía del oscilador armónico:

$$\mathcal{E}_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) \qquad (3.27)$$

dependen del número cuántico *N* del oscilador, que determina los valores posibles de la energía de cada capa. El modelo predice $\hbar\omega \approx \frac{41}{\sqrt[3]{A}}$ MeV, energía necesaria para excitar un nucleón a una capa superior *N* +1.

Los estados están caracterizados por dos números cuánticos *N* y ℓ,

- *N*, número cuántico del oscilador (0, 1, 2,…), que caracteriza la capa, y
- ℓ, el momento angular orbital del nucleón, cuyos valores permitidos son pares o impares según el valor de *N*: $\ell = N, N - 2, \ldots, 1$ ó 0.

y que, además, están relacionados por $N = 2(n - 1) + \ell$, siendo *n* el número cuántico radial.[3]

Todos los estados con el mismo número cuántico *N* tienen la misma energía y la misma paridad del momento angular orbital ℓ. La degeneración de los estados es $D_N = 2\sum(2\ell + 1) = (N + 1)(N + 2)$; el factor 2 porque los nucleones tienen espín 1/2 y el factor $(2\ell + 1)$ que da la multiplicidad de estados con momento angular ℓ. La suma $\sum D_N$ da el número máximo de nucleones (protones y neutrones por separado) necesarios para llenar una capa:

2,8, 20,40, 70,112, 168, …

es decir, reproduce los primeros cuatro números mágicos.

Para caracterizar los estados del oscilador se utiliza la notación $(n\ell)$, siendo *n* el número cuántico radial, relacionado con el número de nodos de la función de ondas radial: da el ordinal de la subcapa (enésima vez

que aparece la onda ℓ). El orden de llenado de las capas según lo visto es:

$[n\ell]$	[1s],	[1p],	[1d,2s],	[1f,2p],	[1g,2d,3s],	[1h,2f,3p],...
N	0	1	2	3	4	5
D_N	2	6	12	20	30	42

correspondiendo cada capa a N = 0, 1, 2, 3, etc. En la figura 3.11 puede observarse la estructura de capas en función de la energía.

Espectro del potencial de Saxon–Woods

Si se quiere reproducir la densidad nuclear, se puede intuir que la forma del potencial nuclear medio vendrá dada por una expresión de tipo Fermi o Saxon–Woods:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r - R)/t}} \qquad (3.28)$$

con los valores de los parámetros:

$$V_0 \sim 50 \text{ MeV} \qquad R = r_0 A^{1/3} \qquad \text{con} \qquad r_0 \approx 1,2 \text{ fm.}$$

$$t = 0,55 \pm 0,07 \text{ fm.}$$

en donde 4t ln 3 representa la conocida anchura de superficie (la anchura definida como el intervalo que separa el 90 % y el 10 % de la densidad máxima). Sólo habría que tener en cuenta que para los protones, el potencial cerca de la superficie nuclear será repulsivo, y a gran distancia, igual al potencial de Coulomb, como se ha dibujado en línea de trazos en la figura 3.10. Los estados energéticos predichos por este potencial, difieren ligeramente de los que predice el potencial del oscilador. Véase su efecto en la figura 3.11, donde se observa que este potencial rompe la

degeneración de los estados que, teniendo el mismo número cuántico del oscilador *N*, poseen un momento angular orbital, ℓ, distinto. Pero aunque se mejora la distribución energética de los estados, sigue sin predecir correctamente la secuencia conocida de números mágicos.

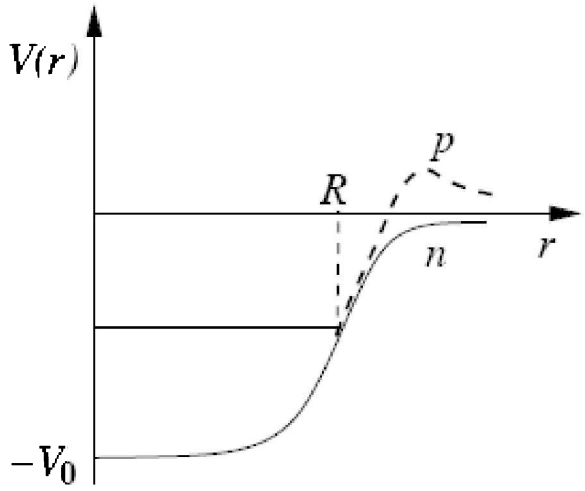


Figura 3.10: Forma del potencial de Fermi o de Saxon–Woods. *R* es el radio nuclear.

3.7.2 Interacción espín–órbita

Es bien sabido que la interacción *N–N* depende del espín. La inclusión en el hamiltoniano de partícula individual de un término de interacción espín– órbita, introducida en 1949 por María Göppert Mayer y J. H. Jensen (Premios Nobel de Física 1963) junto con D. Haxel y H. Suess, describe correctamente los números mágicos:

$$h(r_i) = h_c(r_i) + a\frac{\vec{s}\cdot\vec{\ell}}{\hbar^2} \qquad (3.29)$$

Se suele añadir un término proporcional a $\vec{\ell}^2$, para desplazar ligeramente los valores de la energía en función del valor del momento angular, ya

que el valor propio de $\vec{\ell}^2$ es $\ell(\ell+1)\hbar^2$. Con esto se consigue que los resultados se asemejen más todavía a los que produce el potencial de Saxon–Woods. Es decir que el hamiltoniano más correcto sería:

$$h(r_i) = h_c(r_i) + a\frac{\vec{s}\cdot\vec{\ell}}{\hbar^2} + b\frac{\vec{\ell}^2}{\hbar^2} \qquad (3.30)$$

La interacción espín–órbita aumenta la energía de ligadura del nucleón individual cuando el espín $\vec{s}$ y el momento angular $\vec{\ell}$ son paralelos; los estados del nucleón se desdoblarán según el valor del momento angular total $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$; es decir, todos los estados con momento angular orbital $\ell > 0$ darán lugar a dos, ya que $j = \ell \pm 1/2$. La diferencia entre esos niveles energéticos aumenta a medida que aumenta. Ahora, los estados quedarán caracterizados por los tres números cuánticos $|N, \ell, j\rangle$, y al calcular el valor esperado del producto $\langle\vec{s}\cdot\vec{\ell}\rangle$ se obtiene:

$$(\vec{s}\cdot\vec{\ell})\psi_{jm}(n\ell) = \frac{1}{2}\hbar^2\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right]\psi_{jm}(n\ell)$$

donde se han utilizado los estados de partícula individual $\psi_{jm}(n\ell)$ definidos en (3.24). Como hay dos valores posibles del momento angular total, $j = \ell + 1/2$ y $j = \ell - 1/2$, los valores propios de la energía serán ahora:

$$\mathcal{E}_{N\ell j} = \mathcal{E}_N \begin{cases} +\frac{a}{2}\ell & j = \ell + 1/2 \\ -\frac{a}{2}(\ell+1) & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

lo que produce una separación y reagrupación de las capas obtenidas por el oscilador en $\Delta\mathcal{E}_{j_+ - j_-} = \frac{a}{2}(2\ell+1)$, que, como se ha dicho, aumenta con el valor de ℓ. Según Bohr y Mottelson (1969),

$E_{j-} - E_{j+} \simeq 10(2\ell + 1)A^{-2/3}$ MeV. Se verifica experimentalmente que el nivel de mayor j(o sea $j = \ell + 1/2$) está más ligado. Ello implica que en el término $\vec{s} \cdot \vec{\ell}$ de (3.29), el factor $a < 0$. En teoría de perturbaciones, y si el factor a depende de r, la corrección se calcularía:

$$\Delta\mathcal{E}_+ = \frac{\ell}{2} \int a(\vec{r}) |\psi_{n\ell}(\vec{r})|^2 d^3r$$

Incluyendo el término correctivo del hamiltoniano en ℓ^2, cuyo valor propio es $\ell(\ell + 1)$, los niveles predichos para las energías solución de la ecuación de Schrödinger serían:

$$\mathcal{E}_{Nlj} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) + b\ell(\ell+1) + \begin{cases} +\frac{a}{2}\ell & j = \ell + 1/2 \\ -\frac{a}{2}(\ell+1) & j = \ell - 1/2 \end{cases} \qquad (3.31)$$

con $b \approx -0{,}03\hbar\omega$ lo que produce pequeños desplazamientos en función de ℓ y $a \approx -20A^{-2/3}$ MeV, como ya se ha indicado más arriba.

Ahora, el orden de ocupación de estados, se encuentra utilizando la notación $(n\ell_j)$:

$$1s_{1/2}, (1p_{3/2}, 1p_{1/2}), (1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}), 1f_{7/2}, (2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}),$$
$$(1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}, 3s_{1/2}), 1h_{11/2},$$
$$(1h_{9/2}, 2f_{7/2}, 2f_{5/2}, 1i_{13/2}, 3p_{3/2}, 3p_{1/2}), \ldots$$

El número de estados posibles en la subcapa $n\ell_j$ viene dado por $2j + 1$. Se obtiene una distribución de niveles (véase la figura 3.11) en la que aparecen claramente distanciadas las capas completas que esta vez sí que reproducen los números mágicos:

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \underline{184}, \ldots$$
$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, \underline{114}, 126, \ldots$$

El modelo predice además una isla de estabilidad de núcleos

superpesados entre $A = 298$ y $A = 310$, que todavía no se ha encontrado, aunque recientemente (fines de 1998) se han observado indicios de formación del núcleo con $Z = 114$ y $A = 289$.

Tres laboratorios en el mundo compiten en la búsqueda de núcleos cerca de la isla de la estabilidad: Dubna (Moscú), LBL (EEUU) y Darmstadt (D). A ellos se debe el descubrimiento de los núcleos con números atómicos comprendidos entre $Z = 93$ (neptunio) y $Z = 112$ (copernicio). Los semiperiodos de estos núcleos son muy pequeños como puede constatarse observando los valores correspondientes en las tablas del Apéndice G.

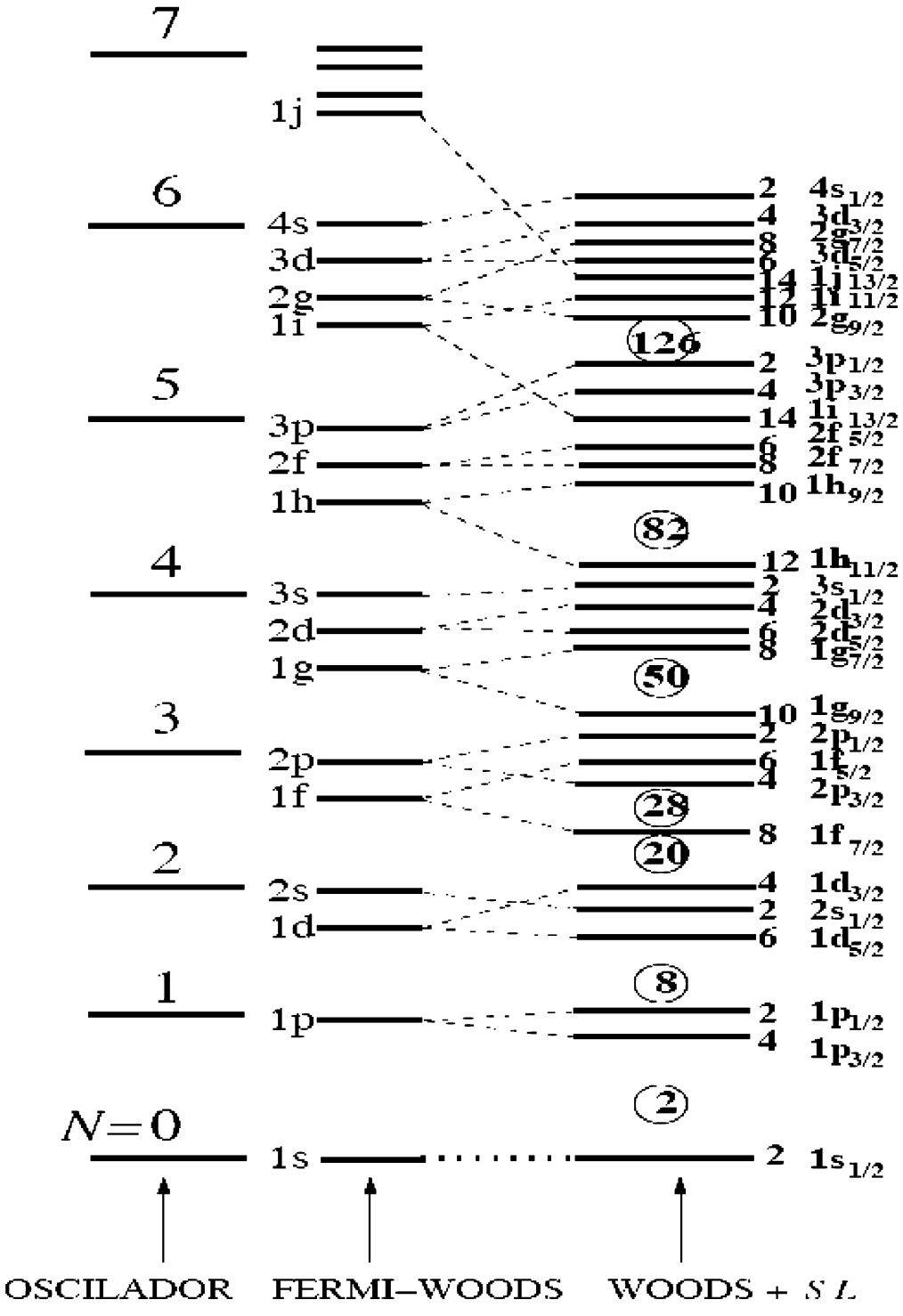


Figura 3.11: Estructura de niveles energéticos predicho por el modelo de

capas esférico con acoplamiento espín–órbita. Los parámetros del potencial de Fermi o Saxon–Woods elegidos son: $V_0 \approx 42$ MeV y $R \approx 10$ fm. Otros parámetros dan lugar a una ordenación energética de los niveles ligeramente distinta. También puede ser distinta la ordenación para protones y neutrones. Obsérvese que el llenado de capas coincide con los números mágicos (dentro de un círculo).

3.7.3 Configuración de estados partícula individual

Para identificar los estados descritos por el modelo de capas, se recurre a la configuración de los nucleones. Esta, informa de manera simplificada cuál es la ocupación de los niveles energéticos. Si es un protón se llama estado π y si es un neutrón se llama estado ν. Los estados excitados nucleares corresponderán a estados excitados de los nucleones. La configuración sigue la notación $(\pi n\ell_j)^k_J$ para protones y $(\nu n\ell_j)^k_J$ para neutrones, donde el superíndice *k* representa el número de nucleones en la subcapa; si negativo, indica *huecos* o agujeros: *k* es el número de ocupación; *j* el momento angular total del nucleón con momento orbital ℓ y *J* el espín total del sistema de los *k* nucleones.

Así en el caso del $^{17}_{8}$O que se observa en la figura 3.12, si se interpreta el nivel excitado nuclear 1/2$^-$, que se observa con una energía superior a 3 MeV, en términos de los nucleones que ocupan capas incompletas, se ve que podría explicarse por un acoplamiento entre un estado de neutrón individual, $(\nu 1p_{1/2})^{-1}_{1/2}$ y los dos neutrones de la configuración $(\nu 1d_{5/2})^2_0$ y, efectivamente, dan lugar a un nivel con espín paridad $1/2^-$. Se describiría como $(\nu 1p_{1/2})^{-1}_{1/2}\,(\nu 1d_{5/2})^2_0\,\frac{1}{2}^-$. La paridad $P = -$ es el resultado del producto de paridades de los nucleones en los estados $p_{1/2}$ y $d_{5/2}$, es decir $(-1)^1 \times (-1)^2$. Se observa que algunos estados pueden ser descritos por más de una configuración. Recuérdese que, normalmente, las fuerzas de apareamiento acoplan a $J = 0$ cuando se trata de un número par de nucleones idénticos. Es lo que ocurre con los

protones, que son un número par para el $^{17}_{8}$O. La misma explicación vale para el $^{17}_{9}$F, intercambiando protón por neutrón.

3.7.4 Espín–paridad de núcleos con *A* impar

Una de las predicciones más efectivas del modelo de partícula individual en los núcleos con *A* impar es que supone que los números cuánticos de espín y paridad del núcleo son los del nucleón no apareado. Así, el modelo de capas permite explicar conéxito los números cuánticos J^P del estado fundamental de un gran número de núcleos con *A* impar, en particular los de los más esféricos. Para ello predice que el espín del núcleo $J = j$, coincide con el momento angular del nucleón aislado (no apareado), que se supone que se encuentra en la capa exterior incompleta y la Paridad $P = (-1)^{\ell}$ queda definida por el momento orbital ℓ de dicha capa.

Ejemplos:

$^{15}_{8}$O (neutrón aislado en $1p_{1/2}, J^{\mathcal{P}} = 1/2^-$),
$^{15}_{7}$N (protón aislado en $1p_{1/2}, J^{\mathcal{P}} = 1/2^-$),
$^{17}_{8}$O (neutrón aislado en $1d_{5/2}, J^{\mathcal{P}} = 5/2^+$),
$^{41}_{20}$Ca (neutrón aislado en $1f_{7/2}, J^{\mathcal{P}} = 7/2^-$), etc.

También explica los núcleos con un *hueco* (capa completa menos un nucleón), en los que predice el mismo J^P que en nucleones aislados.

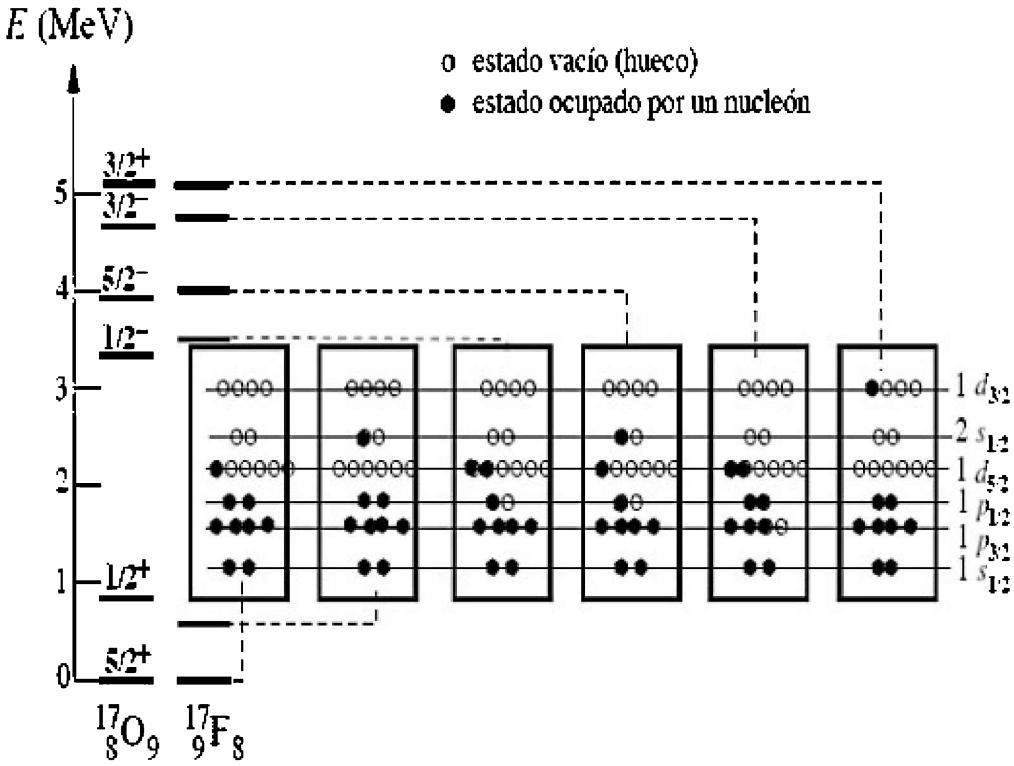


Figura 3.12: Interpretación de niveles nucleares por el modelo de partícula individual para los núcleos espejo $^{17}_{8}$O y $^{17}_{9}$F, cuya estructura ya se ha visto en la figura 1.14. A la derecha se representan los estados de nucleón individual.

Hay evidencias experimentales de la existencia de capas, obtenidas en multitud de estudios de reacciones nucleares, entre los que cabe destacar los dos ejemplos siguientes: a) el estudio de las distribuciones energéticas de los protones emitidos en la reacción de *knock-out* $^{12}_{6}$C(p, 2p) $^{11}_{5}$B, en el que se verifica que siguen distribuciones de ondas *s* y *p*;

b) la medida de la diferencia de la distribución de carga del $^{205}_{81}$Tl respectoa la del $^{206}_{82}$Pb, en la que se observa que sigue la forma esperada por una onda $3s_{1/2}$, es decir, la del protón extra en el Pb (¡onda *s* con tres nodos!).

No todas las predicciones del espín–paridad de núcleos con *A* impar

son correctas. Hay algunas excepciones, en las que se debe recurrir a correcciones no esféricas del modelo de capas, como se verá más adelante.

Por otra parte, el modelo de capas tiene poca precisión para magnitudes tales como los momentos multipolares electromagnéticos μ y Q, como se verá a continuación.

3.7.5 Momentos magnéticos dipolares: líneas de Schmidt

El momento dipolar magnético del núcleo será debido al del nucleón no apareado. El momento magnético vendrá dado por el valor esperado de μ_z (tomando como eje z el de la dirección del campo $\vec{B}$), calculado en el estado de máxima proyección $m_j = j$:

$$\mu_{sp} = (j, m = j|\hat{\mu}_z|j. m = j) \quad \text{con} \quad \hat{\mu}_z = (g_\ell \ell_z + g_s s_z)\frac{\mu_N}{\hbar} \qquad (3.32)$$

Para calcularlo se hace uso de la conocida fórmula de Landé:

$$\mu_{sp} = \frac{1}{j(j+1)}\langle j, m = j|(\hat{\mu}\cdot\vec{j})j_z|j, m = j\rangle. \qquad (3.33)$$

Un nucleón tiene un momento angular total $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ siendo ℓ el momento angular orbital y s = 1/2 su espín. Por consiguiente, los productos:

$$\vec{\ell}\cdot\vec{j} = \ell^2 + \tfrac{1}{2}(j^2 - \ell^2 - s^2)$$

$$\vec{s}\cdot\vec{j} = s^2 + \tfrac{1}{2}(j^2 - \ell^2 - s^2)$$

siendo fácil comprobar que se obtiene:

$$\mu_{sp} = j\left\{g_\ell \pm \frac{g_s - g_\ell}{2\ell + 1}\right\}\frac{\mu_N}{\hbar} \qquad (3.34)$$

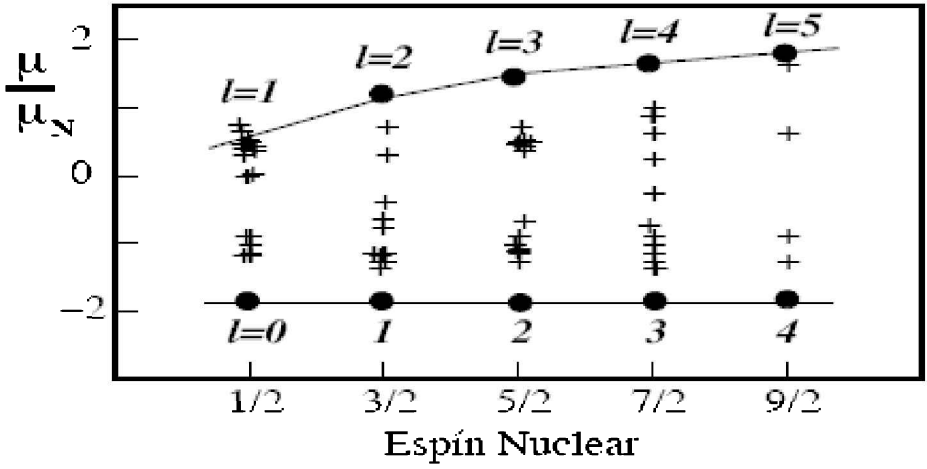
en donde el signo ± indica cada uno de los valores que puede tomar el momento angular total del nucleón, $j = \ell \pm 1/2$. Al unir las predicciones para cada una de las dos paridades posibles con una línea recta, se obtienen las llamadas l *íneas de Schmidt* (1937). Evidentemente, los resultados de las medidas de los momentos magnéticos, sólo tienen sentido físico en la abscisa correspondiente al espín del núcleo. Los valores experimentales se encuentran cerca de las predicciones de Schmidt, pero hay una diferencia sistemática (véase la figura 3.13). Es como si los nucleones ligados tuviesen un factor giromagnético ligeramente distinto. La comparación podría mejorarse si se utilizara el factor empírico 0,6 × g_S. El modelo de Yukawa sugiere que los nucleones tienen una nube piónica que podría explicar la diferencia de valor de g_s. También se concluye que la función de ondas de partícula individual es una aproximación.

Recuérdese que para núcleos con N impar, debe utilizarse los parámetros del neutrón: $g_s = -3{,}83$ y $g\ell = 0$, mientras que para Z impar los del protón: $g_s = 5{,}59$ y $g = 1$.

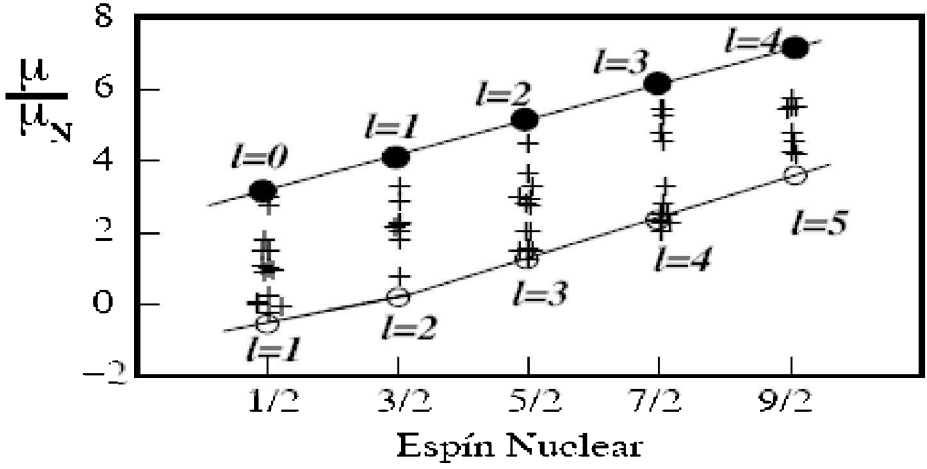
En cualquier caso, cuando se miden experimentalmente los momentos dipolares magnéticos de los núcleos se encuentra:

$$\mu_J = g_J \frac{\mu_N}{\hbar} J \qquad (3.35)$$

siendo g_J el factor giromagnético nuclear, cuyo valor puede deducirse directamente de la fórmula (3.34), teniendo en cuenta que $J = j$.



a) N impar



b) Z impar

Figura 3.13: Las líneas de Schmidt; predicen los momentos magnéticos para núcleos con *A* impar, suponiendo que éste es el del nucleón no apareado. Para cada valor del espín nuclear se tienen dos valores del momento angular orbital posibles. Los valores medidos (+) están contenidos entre las líneas de Schmidt.

Ejemplos:

1) El momento dipolar del tritio: $\mu(^3_1\mathrm{H}) = 2{,}98\,\mu_N$, muy parecido al del protón, que es el nucleón no apareado.

2) El momento $\mu(^3_2\mathrm{He}) = -2{,}13\,\mu_N$, parecido al del neutrón individual.

3) El momento $\mu(^{10}_5\mathrm{B}) = 1{,}80\,\mu_N$, cuya predicción es la suma de los nucleones individuales: (2,79 −1,91+1)μ_N = 1,88μ_N.

El acuerdo entre el modelo teórico y los datos experimentales es bastante bueno para núcleos ligeros. La tabla 3.2, contiene una comparación de valores para núcleos con *A* = 15 y *A* = 17.

Tabla 3.2: Valores teóricos y experimentales del momento dipolar magnético para varios núcleos. La configuración es la del modelo de capas.

núcleo	configuración	$J^{\mathcal{P}}$	$\mu_t\ (\mu_N)$	$\mu_{ex}\ (\mu_N)$
$^{15}_{7}\mathrm{N}$	$(\pi 1p_{1/2})^{-1}$	$1/2^-$	$-0{,}264$	$-0{,}283$
$^{15}_{8}\mathrm{O}$	$(\nu 1p_{1/2})^{-1}$	$1/2^-$	$+0{,}638$	$+0{,}719$
$^{17}_{8}\mathrm{O}$	$(\nu 1d_{5/2})^{1}$	$5/2^+$	$-1{,}913$	$-1{,}894$
$^{17}_{9}\mathrm{F}$	$(\pi 1d_{5/2})^{1}$	$5/2^+$	$+4{,}722$	$+4{,}721$

3.7.6 Momentos cuadrupolares eléctricos

El momento cuadrupolar *Q*, en el modelo de partícula individual en un estado |*j*, *m* > como el definido en (3.24), se calcula:

$$\langle Q_{20}\rangle = \langle jm|\sqrt{\frac{16\pi}{5}}r^2Y_{20}|jm\rangle = \frac{j(j+1)-3m^2}{2j(j+1)}\langle r^2\rangle \qquad (3.36)$$

en donde $\langle r^2\rangle = \int dr R_n^*(r) r^4 R_n(r) = Q_0$ es el momento cuadrupolar intrínseco. Si se trata de un núcleo con un protón aislado,

fijando $m = j$ en la expresión (3.36), se obtiene:

$$\boxed{Q_{sp} = -\frac{2j-1}{2(j+1)}\langle r^2 \rangle} \qquad (3.37)$$

y como se puede aproximar $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}R^2$, entonces $Q \sim A^{2/3}$ prediciendo valores comprendidos entre 0,015 barn (para $A = 10$) y 0,5 barn (para $A = 220$), es decir de 2 a 3 veces más pequeños que los valores medidos experimentalmente. En el caso de lantánidos y actínidos la diferencia es mucho mayor, pudiendo llegar a ser de hasta un orden de magnitud.

En la figura 1.13, se presentó una recopilación de valores experimentales de los momentos cuadrupolares de los núcleos. La figura 3.14 muestra la comparación de la distribución de momentos cuadrupolares, a través de los momentos reducidos:

$$Q_{red} = Q/(Z\langle R^2 \rangle) \qquad (3.38)$$

medidos en núcleos con Z o N impar. Esta magnitud, permite comparar las deformaciones nucleares, independientemente del tamaño del núcleo. En la figura anterior se observa que $Q \sim 0$ cerca de los números mágicos, y que abundan más los núcleos prolatos.

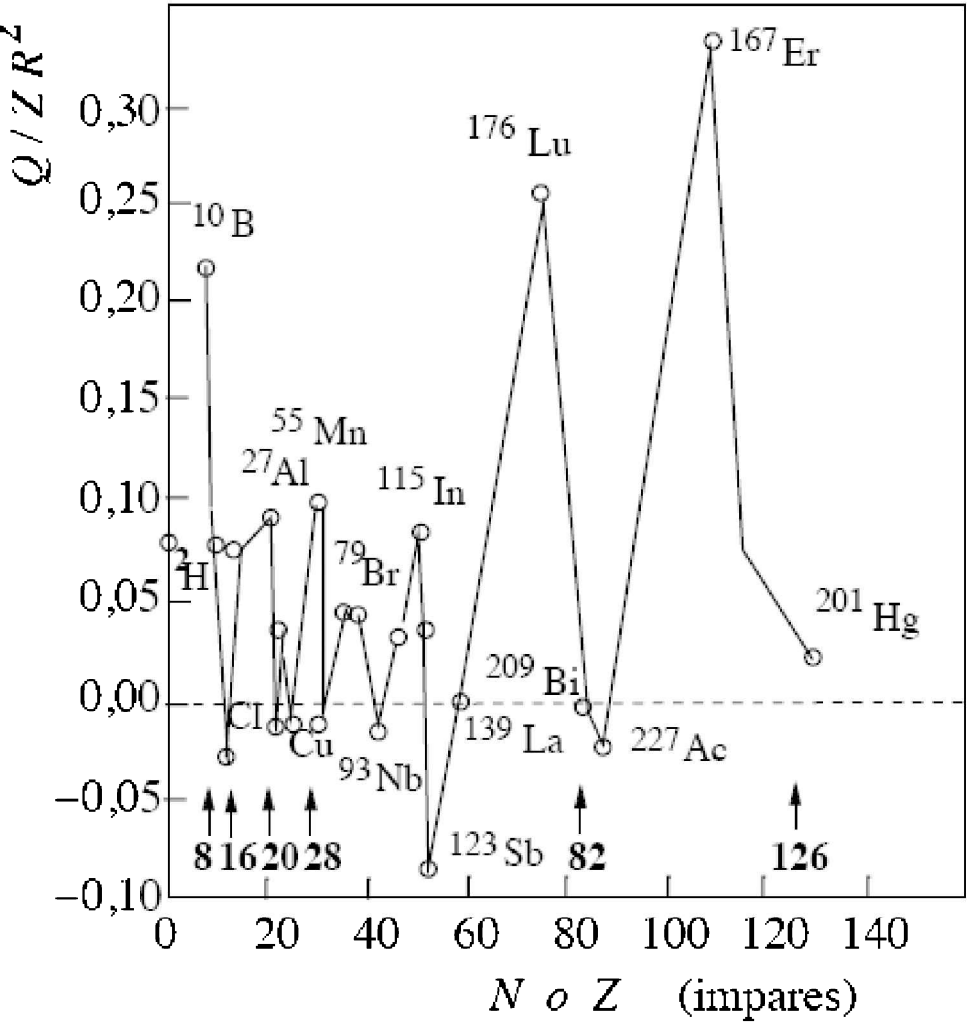


Figura 3.14: Valores experimentales del momento cuadrupolar *reducido*, cuya definición puede verse en la escala de ordenadas. Es una magnitud que permite comparar los momentos cuadrupolares de los núcleos, independientemente de su tamaño.

Para núcleos con un neutrón aislado se debería tener $Q = 0$ ya que el neutrón no tiene carga; sin embargo no sucede así experimentalmente. Se puede suponer que el momento cuadrupolar es debido al movimiento de los Z protones, encontrándose el neutrón aislado en una posición dada por $\vec{r}/(A-1)$, con lo que se cumple:

$$Q_{sn} = \frac{Z}{(A-1)^2} Q_{sp} \tag{3.39}$$

o sea, $Q_{sn} \sim A^{-1/3}$, que predice valores de 10^{-2} a 10^{-4} barn.

En capas con más de un protón individual, se pueden sumar las contribuciones de cada nucleón, teniendo en cuenta que un *hueco* se comporta como $Q = -Q_{sp}$. Por lo tanto, como el número máximo de protones en una capa es $2j + 1$, el momento cuadrupolar eléctrico de un núcleo con n_x protones en la capa incompleta valdrá:

$$Q = Q_{sp}\left(1 - \frac{2n_x - 2}{2j - 1}\right)$$

En la tabla 3.3 se muestran algunos valores experimentales de momentos magnéticos y momentos cuadrupolares eléctricos de algunos núcleos, que ilustran los conceptos desarrollados anteriormente.

Tabla 3.3: Valores experimentales del momento dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico para varios núcleos.

núcleo	n	p	$^{2}_{1}$H	$^{17}_{8}$O	^{57}Fe
$\mu(\mu_N)$	−1,91	2,79	0,857	−1,89	0,09
Q (barn)	–	–	+0,00288	−0,025	–

núcleo	$^{57}_{27}$Co	^{93}Nb	$^{161}_{66}$Dy	$^{176}_{71}$Lu	$^{235}_{92}$U
$\mu(\mu_N)$	4,72	6,17	−0,48	3,17	−0,38
Q (barn)	+0,52	−0,37	+2,51	+5,0	+4,936

En conclusión, los valores de los momentos μ y Q no los reproduce con precisión el modelo extremo de partícula individual. Sin embargo este modelo da la tendencia correcta de dichos valores y da también las

variaciones relativas observadas. Las diferencias entre valores predichos y medidas experimentales aumentan en los lantánidos y actínidos, debido sobre todo a la deformación nuclear. Para Z y/o N elevados las discrepancias con las predicciones de Q en el modelo de partícula individual llegan a ser de hasta un orden de magnitud.

3.7.7 Hipernúcleos

Los núcleos estables están compuestos por nucleones (protones y neutrones). También se han visto muchos núcleos inestables, análogamente compuestos por protones y neutrones, en el plot de Segré (plano $Z - N$). Como se verá en física de partículas, además de nucleones, existen partículas bariónicas extrañas,[4] por ejemplo aquellas en las que uno de los tres quarks del protón (uud) o del neutrón (udd), se cambia por un quark extraño, s, dando un hiperón *sigma* Σ^+ (uus) o un *lambda* Λ^0 (uds), que pueden crearse y existir en el interior de un núcleo tras una interacción a gran energía y reemplazar a uno de los nucleones. Por ejemplo, si un neutrón de un núcleo de helio se cambia por un hiperón Λ^0, se obtiene un hipernúcleo ${}^{4}_{\Lambda}\mathrm{He}$, compuesto por dos protones, un neutrón y un hiperón Λ^0. Este hipernúcleo no será estable y se desintegraránecesariamente con una vida media igual a la de la partícula Λ^0 (1115). El número 1115 que se da entre paréntesis representa la masa (redondeada) de la partícula en MeV; en este caso, el hiperón Λ^0 tiene una masa de 1115 MeV.

En la figura 3.15, se muestra el primer hipernúcleo descubierto (M. Danysz y J. Pniewski, *Philosophical Magazine* **44** (1953) 348), en una emulsión fotonuclear expuesta a la radiación cósmica. La reacción del protón procedente de la radiación cósmica, de alta energía (con un momento de unos 30 GeV/c), interacciona con un núcleo de la emulsión fotográfica (bromo o plata).

La reacción del protón cósmico con el blanco nuclear da lugar a una

estrella de fragmentos nucleares en el vértice *A* que se emiten en todas direcciones; entre ellos hay uno que recorre un largo segmento (el segmento *f*) porque tiene una vida media muy larga, característica de los hipernúcleos. En efecto, los fragmentos nucleares t *ípicos* producidos en la reacción tienen vidas medias del orden del tiempo nuclear característico ($\sim 10^{-22}$ s), mientras que los hipernúcleos tienen vidas medias propias de los hiperones (el $\Lambda^0(1115)$ tiene una vida media de 2,6 $\times 10^{-10}$ s, como puede verse en la tabla D.4 del apéndice D). El hiperfragmento acaba desintegrándose en el vértice *B* y se puede interpretar como la desintegración del núcleo ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ dando:

$$ {}^{8}_{\Lambda}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{n} + \pi^{-} $$

La trayectoria marcada con *3* es la del pión ya que es la más *gris*, o sea la menos ionizante. Las trayectorias *1* y *2* corresponden al helio-3 y al helio-4, más *negras*, que acaban parándose.

La importancia de los hipernúcleos es que permiten estudiar los niveles del modelo de capas ya que el hiperón Λ^0 no está sujeto al principio de exclusión, como es el caso de los neutrones. En aceleradores se han estudiado procesos como:

$$ \mathrm{K}^{-} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{12}_{\Lambda}\mathrm{C} + \pi^{-} $$

en donde la medida de las energías del π^- informa sobre los estados energéticos del ^{12}C predichos por el modelo de capas.

En los últimos 50 años, se han producido muchos hipernúcleos en el CERN (durante los años 1960 and 1970), BNL (1970-80) y KEK (1980-90), primero utilizando haces de K^-, y posteriormente utilizando haces mucho más intensos de π^+. En el año 2003, conmemorando el 50 aniversario de la física de hipernúcleos, se inició un programa intensivo de estudios de hipernúcleos en el anillo de colisiones e^+e^- DAFNE de Frascati. DAFNE es la única factoría de mesones $\varphi(1020)$ en el mundo;

puede producir más de 12 millones de mesones φ al día. Se instaló un segundo detector (FINUDA) para utilizar los K^- procedentes de la desintegración del φ, y así producir hipernúcleos en un blanco nuclear.

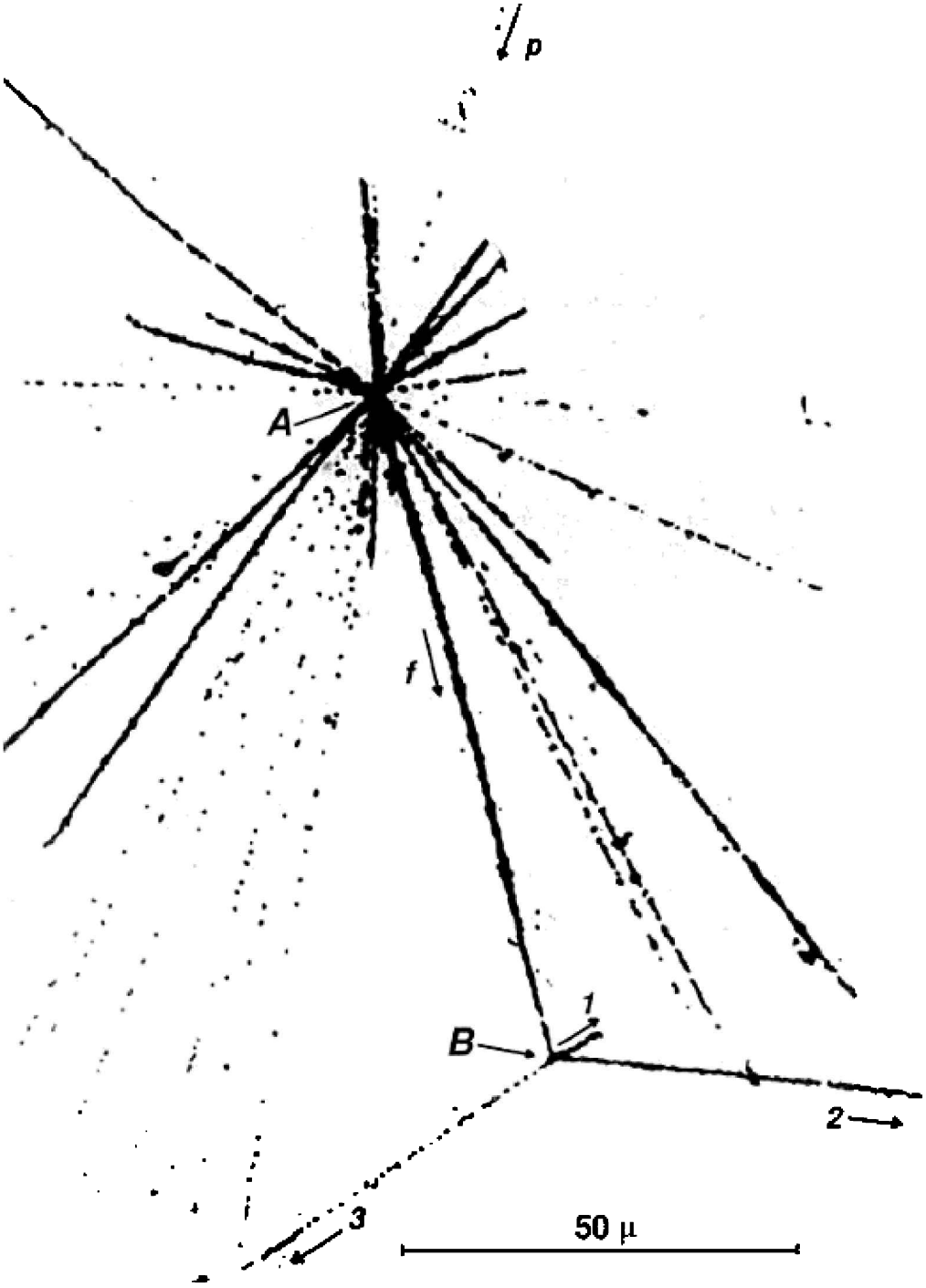


Figura 3.15: Fotografía de una reacción nuclear producida por un rayo cósmico (protón) de alta energía, detectada por la técnica de la emulsión

fotográfica (la ionización de la partículas cargadas producen granos que dan lugar a trayectorias visibles al revelar la emulsión). El hipernúcleo, identificado como ${}^{5}_{4}\mathrm{Be}$, tiene una vida demasiado larga (segmento *f*) para ser un núcleo inestable típico. Obsérvese la resolución dada por la escala de 50μ.

3.8 Modelo unificado

Tanto los modelos colectivos, que describen propiedades globales de los núcleos con magnitudes que suelen variar suavemente con el número de nucleones *A*, como los modelos microscópicos de partícula individual, son modelos que describen casos extremos. La realidad es que todos los núcleos presentan en mayor o menor medida, propiedades que pueden describirse por ambos tipos de modelos.

Se ha convenido en denominar modelo unificado, al modelo que trata de asociar predicciones del modelo de capas (de partícula individual) con el modelo colectivo.

Se abordarán aquí solamente dos variantes de modelo tipo unificado.

3.8.1 Modelo de capas de muchas partículas

Se supone entonces que todos los nucleones que se encuentran en una capa no llena, contribuyen, a través de interacciones residuales, a configurar la estructura de niveles.

3.8.2 Modelo de capas en núcleos deformados

La existencia de núcleos deformados en equilibrio, produce desviaciones respecto a las predicciones del modelo de capas esférico, en el que se supone que los estados se obtienen a partir de una partícula individual en un potencial medio esférico.

Sea un núcleo deformado axialmente. El hamiltoniano para un nucleón que ocupe la posición r_i será ahora:

$$h(r_i) = h_c(r_i) + h_\delta(r_i) + a\frac{\vec{s}\cdot\vec{\ell}}{\hbar^2} + b\frac{\vec{\ell}^2}{\hbar^2} \qquad (3.40)$$

con $h_c(r_i) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_i + V(r_i)$, en donde $V(r_i) = \frac{1}{2}\mu_i\omega^2 r_i^2$, es el potencial de un oscilador armónico isótropo tridimensional, que caracteriza la parte esférica del potencial y

$$h_\delta(r_i) = -\mu_i\omega^2 r_i^2 \delta Y_{20} \qquad (3.41)$$

representa la deformación[5] debida a un campo cuadrupolar. Los estados propios de este hamiltoniano reciben el nombre de orbitales de Nilsson, que fue el físico nuclear que los calculó por primera vez.

Ahora, en el caso de núcleo deformado, el momento angular *j* ya no es un buen número cuántico. Los núcleos esféricos tienen por números cuánticos $|N\ \ell\ j>$. En el caso de un núcleo deformado axialmente se denomina Ω a la proyección del momento angular según el eje de simetría y m_j, la proyección de *J* sobre el eje del laboratorio, sigue siendo un buen número cuántico.

Los estados de Nilsson se obtienen al desarrollar:

$$|N\Omega> = \sum_{\ell j} C_{N\ell j}|N\ell j\Omega>$$

donde los coeficientes $C_{N\,\ell j}$ dependen de la deformación nuclear δ.

Pero para especificar unívocamente un estado se necesitan dos números cuánticos más:

n_3 proyección de N según eje de simetría; $N = n_3 + n_\perp$
λ proyección de $\vec{\ell}$ en eje de simetría; $\lambda = \pm n_\perp, \pm(n_\perp - 2), ..., \pm 1$ ó 0.

Los niveles energéticos vienen dados ahora por la suma de las tres proyecciones:

$$\mathcal{E}_{N n_3 \Omega} = \sum_{i=1}^{3} (n_i + 1/2)\hbar\omega_i = (n_3 + 1/2)\hbar\omega_3 + [(N - n_3) + 1]\hbar\omega_\perp$$

La frecuencia media del oscilador toma la forma $\omega = \frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \frac{1}{3}(2\omega_\perp + \omega_3)$ siendo ω la misma frecuencia que en el caso esférico. Ahora existe una relación entre la frecuencia y la deformación:

$$\delta = \frac{\omega_\perp - \omega_3}{\omega} \approx \frac{\Delta R}{R}$$

En el esquema de Nilsson, los estados y sus niveles de energía se suelen tomar en función del número del oscilador: $\Omega[Nn_3\Lambda]$, o también $[Nn_3\Lambda\Omega]$ y se representan en función del parámetro de deformación $\delta \simeq \Delta R/R_0$(véase la figura 3.16).

La conclusión es que ahora la ordenación energética de niveles no es la del modelo esférico (véase la figura 3.11) sino que es función de la deformación δ como acaba de verse en la figura 3.16. Así por ejemplo, núcleos por encima del $^{16}_{8}$O, van llenando las capas *sd* y son prolatos; al calcular los niveles energéticos, se encuentran diferencias respecto al modelo esférico. Más convincente es la predicción de espín–paridad de núcleos; por ejemplo $^{19}_{9}$F, $^{19}_{10}$Ne, $^{21}_{10}$Ne, $^{23}_{11}$Na, que deberían ser J^P = $5/2^+$ se encuentran $1/2^+$, $1/2^+$, $3/2^+$ y $3/2^+$ respectivamente, de acuerdo con los resultados experimentales.

Si sólo la partícula no apareada determinase todas las propiedades nucleares se tendría por ejemplo que $^{41}_{20}\mathrm{Ca} \equiv ^{43}_{20}$, lo que no sucede. En el

$^{43}_{20}$Ca deben contar los 3 neutrones de la capa $1f_{7/2}$ incompleta.

Es evidente que la idea de campo central o de potencial medio nuclear no es suficiente. Por ello se habla de interacción residual, como una fluctuación alrededor del potencial medio. En el modelo de capas, ésta es la fuerza de apareamiento.

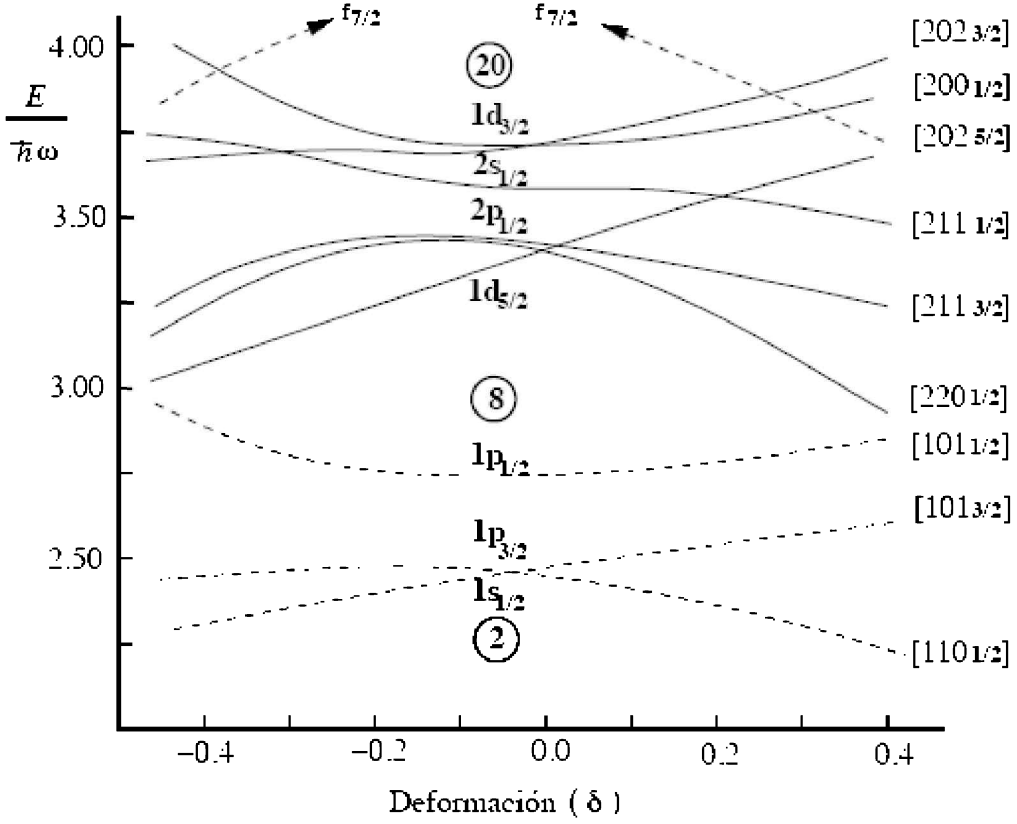


Figura 3.16: Espectro de órbitas de partículas en un potencial esferoidal (N, $Z < 20$) calculado por Nilsson y Mottelson.

3.9 Problemas

3.1 Configuración espín–paridad en un modelo de capas

a) Determinar los momentos angulares y paridades predichas por el modelo de capas para los estados fundamentales de los

siguientes núcleos:

^{12}C, ^{11}B, ^{20}Ne, ^{27}Al, ^{41}Ca y ^{69}Ga

b) Hallar la configuración, el espín y la paridad de los núcleos ^{16}O, ^{40}Ca y ^{208}Pb. Representar un diagrama de colocación de los nucleones.

c) Explicar la configuración del espín–paridad para núcleos impar–impar. Obtener, en particular, el espín–paridad para los núcleos ^{18}F, ^{16}F y ^{14}N.

3.2 Momento dipolar magnético en un modelo de capas

Demostrar que el momento dipolar magnético para un nucleón desapareado en un modelo nuclear de capas para un núcleo con *A* impar viene dado por la expresión:

$$\mu_{\mathrm{sp}} = \begin{cases} \left[\left(j - \frac{1}{2}g_l\right) + \frac{1}{2}g_s\right]\mu_N & j = l + \frac{1}{2} \\ \left[\frac{j(j+3/2)}{j+1}g_l - \frac{1}{2}\frac{j}{j+1}g_s\right]\mu_N & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

con g_l y g_s los factores giromagnéticos orbital y de espín del nucleón, respectivamente, y μ_N el magnetón nuclear.

3.3 Momento cuadrupolar eléctrico en un modelo de capas

a) Comprobar que utilizando un modelo simplificado en el cual el nucleón posee valores constantes de *l*, *j* y m_j, su función de ondas se puede escribir como:

$$\Psi(l, j, m_j) = \psi(r)\left\{C(l, \frac{1}{2}, j|m_j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_j)\alpha Y_{l,m_j-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) + \right.$$
$$\left. + C(l, \frac{1}{2}, j|m_j + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, m_j)\beta Y_{l,m_j+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)\right\}$$

b) Demostrar, aplicando el resultado del apartado anterior, que el momento cuadrupolar eléctrico de un protón desapareado en un modelo nuclear de capas con A impar viene dado por la expresión:

$$Q = -\frac{2j-1}{2(j+1)}\langle r^2 \rangle$$

con $\langle r^2 \rangle$ el radio cuadrático medio de la órbita del protón.

3.4 Momento dipolar magnético y líneas de Schmidt

Utilizando la misma función de ondas que en el Problema **3.3**, encontrar los valores de Schmidt correspondientes al momento dipolar magnético para el protón desapareado.

3.5 Momentos dipolares y cuadrupolares en un modelo de capas

a) Calcular el momento cuadrupolar eléctrico del estado fundamental de los núcleos ^{209}Bi y ^{41}Ca según el modelo de capas y comparar el resultado con los valores experimentales de $Q = -0{,}37$ b y $Q = -0{,}08$ b, respectivamente.

b) Calcular los valores de los momentos dipolares magnéticos esperados según el modelo de capas y compararlos con los obtenidos experimentalmente para los núcleos de la tabla 3.4.

Tabla 3.4: Momentos dipolares magnéticos experimentales μ_{exp} y espín–paridad J^P para los diferentes núcleos del Problema 3.5.

Núcleo	J^P	μexp (μ_N)
^{75}Ge	$1/2^-$	+0,510
^{87}Sr	$9/2^+$	−1,093
^{91}Zr	$5/2^+$	−1,304
^{44}Sc	2^+	+2,56
^{47}Sc	$7/2^-$	+5,34
^{147}Eu	$11/2^-$	+6,06
^{209}Bi	$9/2^-$	+4,1

3.6 Isospín nuclear y modelo de capas

Los estados fundamentales del conjunto de núcleos isóbaros con A = 14, ^{14}C, ^{14}N y ^{14} O tienen todos un espín–paridad $J^P = 0^+$ y una estructura de niveles muy parecida. Se pide:

a) Calcular el isospín total T y la tercera componente de cada uno de los tres núcleos.

b) El isospín del estado fundamental de los núcleos ^{14}N y ^{12}C es el mismo. Encontrar los estados con T = 1 en ambos núcleos y caracterizar su J^P.

c) En la desintegración β^+ superpermitida $^{14}O \rightarrow {}^{14}N + e^+ + \nu_e$, cambia de estado uno de los nucleones. Dibujar el esquema de los niveles de energía de acuerdo con un modelo de capas de partícula individual así como el cambio de configuración que tiene lugar.

d) Dibujar el diagrama de niveles de energía para los dos conjuntos de isóbaros con A = 14 y A = 12 a partir de los datos de la tabla 3.5. Estimar también la energía del estado excitado más bajo con T = 1 en los núcleos ^{14}N y ^{12}C y explicar la diferencia obtenida.

Tabla 3.5: Energías de ligadura correspondientes a isóbaros con A = 14 y A = 12.

Núcleo	^{14}C	^{14}N	^{14}O	^{12}B	^{12}C	^{12}N
B (MeV)	105,285	104,659	98,733	79,575	92,162	74,041

3.7 Momento cuadrupolar eléctrico de un núcleo deformado

Considerar un núcleo permanentemente deformado en equilibrio cuya forma viene dada por un elipsoide de revolución de superficie descrita por:

$$R(\theta, \phi) = R_0[1 + \beta Y_{20}(\theta, \phi)]$$

con β un parámetro de deformación relacionado con la excentricidad de la elipse y R_0 el promedio del radio nuclear. Demostrar que el momento cuadrupolar eléctrico de este núcleo viene dado por la ecuación:

$$Q = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} R_0^2 Z \beta (1 + 0{,}36\beta)$$

donde se supone que la carga total nuclear eZ se distribuye de forma uniforme dentro del elipsoide.

3.8 Desintegración α y modelo de capas

Considerar la desintegración α del ^{211}Po al ^{207}Pb. Se pide:

a) A partir del diagrama de niveles en la proximidad del ^{207}Pb que se muestra en la figura 3.17 estimar el espín–paridad de su estado fundamental y comparar el resultado con el valor experimental de $J^P = 1/2^-$.

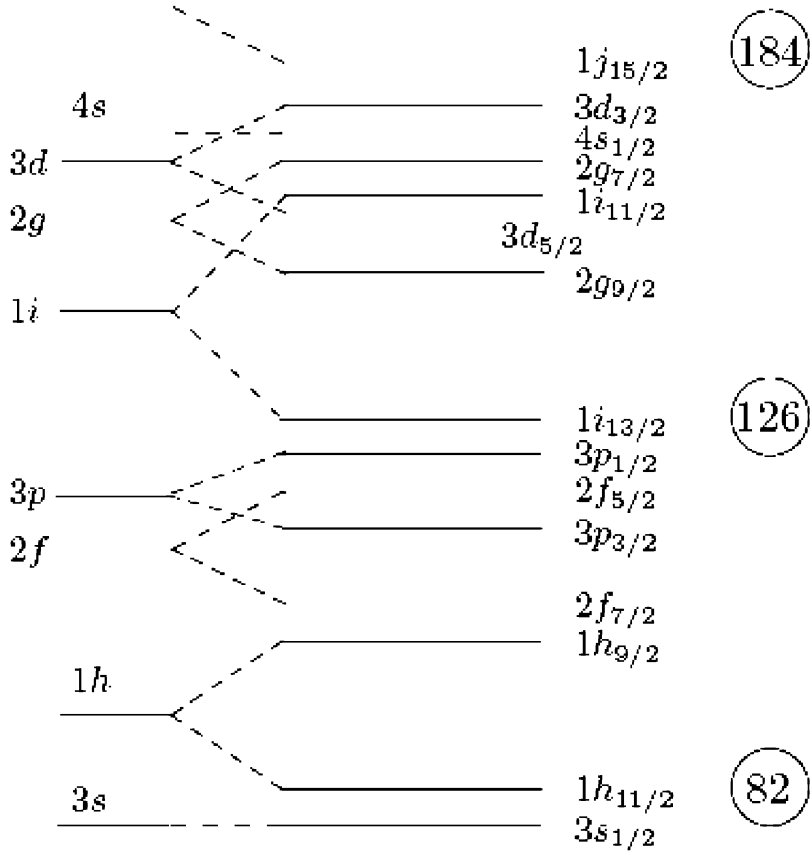


Figura 3.17: Diagrama de llenado de nucleones en las cercanías del ^{207}Pb de acuerdo con un modelo de capas esférico con acoplamiento espín–órbita. Los números en la última columna representan números mágicos.

b) El resultado de la desintegración α del ^{211}Po conduce a un estado excitado del ^{207}Pb con J^P = 3/2$^-$ y energía 897 keV. Este estado decae al estado fundamental mediante desintegración γ. Estimar las multipolaridades permitidas y aquellas con mayor probabilidad de ser observadas. Obtener el cociente entre los modos de desintegración más probables.

c) La detección experimental de fotones γ de 328 keV y 569 keV indica la existencia de un estado intermedio en el ^{207}Pb entre el estado 3/2$^-$ y el estado fundamental. Las multipolaridades observadas son $M1$ (para el nivel de 328 keV) y $E2$. Con ayuda

de las reglas de selección y el diagrama de la figura 3.17 estimar el espín–paridad y energía de este estado intermedio respecto al estado fundamental.

d) Dibujar el esquema de llenado de subcapas para los estados excitados del ^{207}Pb de acuerdo con el modelo de capas de la figura 3.17.

e) Estimar el momento cuadrupolar eléctrico y el momento dipolar magnético del ^{207}Pb en su estado fundamental.

3.9 Modelo vibracional y deformación nuclear

En un modelo nuclear vibracional la deformación del núcleo puede parametrizarse en términos de sus coordenadas colectivas de superficie $\alpha_{\lambda\mu}$ en la forma:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0[1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)]$$

donde el índice $\lambda = 0, \ldots, \infty$ caracteriza el modo de vibración, $\mu = -\lambda, \ldots, \lambda$, R_0 es el radio del núcleo esférico original sin deformar y t el tiempo. Se pide:

a) Calcular el volumen del núcleo a segundo orden en los parámetros de forma, $\mathcal{O}(\alpha^2_{\lambda\mu})$. Obtener también el valor de la deformación monopolar α_{00}para que el volumen total del núcleo permanezca constante durante la deformación.

b) Obtener una expresión para el vector de posición del centro de masas a primer orden en $\alpha_{\lambda\mu}$. Demostrar que la deformación dipolar $\alpha_{1\mu}$ no hace variar la forma del núcleo sino que sólo desplaza las coordenadas del centro de masas.

c) Calcular el valor de las energías de Coulomb y superficial para una deformación general del núcleo al orden $\mathcal{O}(\alpha^2_{\lambda\mu})$.

3.10 Modelo vibracional para una deformación cuadrupolar

Aplicar el resultado del problema anterior al caso de una deformación cuadrupolar con simetría axial y demostrar que, en

este caso, la parametrización del núcleo deformado se puede escribir en términos de los polinomios de Legendre en la forma:

$$R(\theta) = R_0[1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos\theta)]$$

con θ el ángulo azimutal y α_0 y α_2 parámetros de deformación. Si se supone que el volumen del núcleo permanece constante durante la deformación se pide:

a) Demostrar que las energías de Coulomb y superficial para el núcleo deformado vienen dadas, al orden $\mathcal{O}(\alpha_2^2)$, por:

$$E_C \sim \alpha_C \left(\frac{Z^2}{A^{1/3}}\right)\left[1 - \frac{1}{5}\alpha_2^2\right] \qquad E_S \sim \alpha_S A^{2/3}\left[1 + \frac{2}{5}\alpha_2^2\right]$$

con α_C y α_S los términos de Coulomb y superficial de la fórmula semiempírica de masas, respectivamente.

b) Estudiar con este modelo el límite de estabilidad frente a fisión espontánea para núcleos pesados. En particular obtener el elemento de mayor número atómico de la tabla periódica que cabe esperar en la naturaleza.

c) Encontrar el núcleo cuyo primer estado excitado, de energía 6,7 MeV, corresponde al de una deformación tal que la longitud del semieje ecuatorial es sólo un 60 % de la de su semieje polar.

3.11 Modelo rotacional y niveles de energía

El espín–paridad J^P y energía de excitación E del estado fundamental y una secuencia de estados excitados del núcleo $^{170}_{72}\mathrm{Hf}$ vienen dados en la Tabla 3.6. Se pide:

a) Comparar las energías de los niveles del hafnio $^{170}_{72}\mathrm{Hf}$ con el modelo rotacional.

b) Calcular el momento de inercia del núcleo para cada uno de los estados excitados y comparar los resultados con el momento de inercia del núcleo considerado como una esfera rígida en

rotación. Sacar conclusiones.

Tabla 3.6: Espín–paridad J^P y energías de excitación más bajas del $^{170}_{72}\mathrm{Hf}$ correspondientes a un núcleo típico no esférico con una deformación cuadrupolar con simetría axial.

$J^{\mathcal{P}}$	0^+	2^+	4^+	6^+	8^+
E (keV)	0	100	321	641	1041

3.12 Modelo rotacional y bandas de energía

Los niveles del $^{174}_{72}\mathrm{Hf}$ muestran dos bandas rotacionales similares cuyas energías (en MeV) se muestran en la tabla 3.7. Comparar los momentos de inercia de estas dos bandas y comentar cualquier diferencia observada.

Tabla 3.7: Bandas de energía rotacionales (en MeV) para el $^{174}_{72}\mathrm{Hf}$.

Banda	$E(0^+)$	$E(2^+)$	$E(4^+)$	$E(6^+)$	$E(8^+)$	$E(10^+)$	$E(12^+)$
1	0	0.091	0,297	0,608	1.010	1.486	2.021
2	0.827	0.900	1,063	1,307	1.630	2.026	2.489

---

[1]Idea original de Bohr y Mottelson, quienes propusieron el modelo colectivo geométrico. Más tarde fue desarrollado por Faessler y Greiner.

[2]El principio de simetrización exige que si se intercambia el fonón 1 con el 2, la función de ondas no debe cambiar de signo ya que se trata de un sistema de bosones idénticos.

[3]El número cuántico n no tiene las mismas propiedades que en física atómica ($n \geq \ell + 1$), sino que siempre toma los valores $n = 1, 2, \ldots$

[4]Se estudian con más detalle en el tema 17 dedicado a los hadrones.

[5] Recuérdese que $Q_{20} = r^2 \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20}$, y el *parámetro de deformación*:

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_3 - R_\perp}{R}.$$

Parte II

Técnicas experimentales en física nuclear

4. Aceleradores de partículas

4.1 Generalidades sobre aceleradores de partículas

La física de partículas es la impulsora del desarrollo de los aceleradores. Estos son instrumentos que emplean campos eléctricos para acelerar partículas estables (protones, electrones, iones pesados) a alta energía. Se dice que producen un haz de partículas (o de iones). El desarrollo de los aceleradores ha traído consigo el progreso del conocimiento de los constituyentes elementales de la materia; en particular por el considerable aumento de la energía de las colisiones. Para un físico de partículas los parámetros más importantes de un acelerador son: la energía, la intensidad (o luminosidad), el ciclo de ocupación (fracción de tiempo en la que el acelerador envía partículas a un experimento) y la estructura temporal de la intensidad. Las partículas del haz, una vez aceleradas, pueden ser dirigidas contra blancos materiales para estudiar las reacciones entre partículas o núcleos; son aceleradores dedicados a la investigación. Este tipo de experimentos se conocen con el nombre de experimentos de *blanco fijo*, ya que las partículas impactan sobre un blanco material en reposo. También existen múltiples instalaciones que disponen de aceleradores dedicados a otras especialidades como la radiación sincrotrón que está muy extendida o bien dedicados a aplicaciones, como en física médica, que utiliza los aceleradores para irradiar y destruir tejidos tumorales (en hospitales); inicialmente, a partir de fotones producidos por haces de electrones que

atraviesan un material pesado como el plomo generando fotones por radiación de frenado (bremsstrahlung) y más recientemente con la hadroterapia, llamada así porque utiliza haces de protones o de iones de carbono. Otro tipo de aplicaciones se encuentran en instalaciones industriales, por ejemplo las que utilizan aceleradores para implantar iones en materiales semiconductores, etc. En el año 2000, Ugo Amaldi realizó un censo de los aceleradores en el mundo, encontrando que existían 15.000 aceleradores activos, tal como se detalla en la tabla 4.1.

Las primeras máquinas fueron desarrolladas en los años 1930, utilizaban fuentes de alto voltaje continuo (por ejemplo el acelerador Van de Graaff) y hoy en día pueden acelerar iones hasta unos 20 MeV. Se trata de aceleradores electrostáticos o de corriente continua. Para aumentar la energía se propuso la utilización de fuentes de corriente alterna de alta frecuencia, haciendo pasar las partículas varias veces por la cavidad aceleradora, para lo que es necesario sincronizar cuidadosamente el paso de las partículas con el potencial. Con este principio, se han desarrollado aceleradores lineales y circulares. Son los que pertenecen a la categoría de aceleradores de radiofrecuencia o de corriente alterna.

El estadio más avanzado lo componen los colisionadores. Enéstos, las partículas son aceleradas en direcciones opuestas para que pueda producirse un choque frontal entre ellas y así, poder obtener colisiones de mayor energía. La carrera de los colisionadores se inició en los años 1960 y eran colisionadores electrón-positrón, e^+e^-. Se han desarrollado colisionadores partícula–antipartícula (e^+e^-, pp) y también partícula-partícula (pp, e^-p, ión-ión). El máximo exponente de este tipo de instalaciones se encuentra en el CERN (véase la figura 4.1): el colisionador LHC (*Large Hadron Collider*), diseñado para lograr colisiones de protones contra protones de 7 TeV de energía, consiguiendo una energía en el centro de masas de 14 TeV, la mayor energía jamás alcanzada en un laboratorio del mundo. El LHC ocupa el mismo túnel subterráneo de 27 km de perímetro que antes albergaba el colisionador e^+e^-, LEP, que fue desmontado en el año 2000. En el

colisionador LHC los haces de protones circularon por primera vez en Octubre de 2008. El programa científico del LHC se inició a finales de 2009.

Figura 4.1: Vista aérea del CERN, el laboratorio que ha construido el mayor acelerador del mundo, el LHC, cuya trayectoria circular de 27 km de perímetro está dibujada. *Fuente*: CERN

Tabla 4.1: Aceleradores en el mundo (según U. Amaldi, *Importance of Particle Accelerators.* Proc. EPAC 2000, Viena, Agosto 2000).

Tipo de aplicación	Número
Implantación de iones y modificación de superficies	7.000
Aceleradores en industrias	1.600
Aceleradores para investigación no nuclear	1.000
Radioterapia	5.000
Producción de isótopos para medicina	200
Hadroterapia	20
Fuentes de radiación sincrotrón	70
Investigación en Física Nuclear y de Partículas	110
TOTAL	**15.000**

4.1.1 Partes de un acelerador

He aquí los cuatro grandes elementos que componen un acelerador:

1. Fuente de iones (e^-, p, O, Ca,…, Pb). Es la parte que alimenta de partículas a un acelerador. En una fuente se extraen electrones (de un filamento incandescente) o bien protones (de una fuente de radiofrecuencia (RF) que actúa sobre moléculas de hidrógeno). También existen fuentes de casi todos los iones de la tabla periódica. Los haces que proporcionan las fuentes de iones suelen ser de varios mA de corriente y energías del orden del keV.

2. Óptica (imanes, separadores). Se conoce poróptica de un acelerador al conjunto de elementos eléctricos y magnéticos que conducen las partículas aceleradas por la trayectoria ideal del acelerador. Los más frecuentes son los imanes dipolares (que se utilizan para curvar las partículas en trayectorias casi circulares) y los imanes cuadrupolares, que sirven para focalizar.

3. Vacío. El haz de partículas debe recorrer un largo trayecto antes de ser extraído del acelerador o utilizado. Por ello debe existir un tubo de vacío en el que las partículas puedan viajar sin encontrar materia (gas residual en el tubo), que las dispersaría y frenaría, inutilizando el acelerador. Los sistemas de vacío actual son realmente impresionantes.

Es frecuente alcanzar presiones inferiores a 10^{-9} torr;[1] o sea, casi como la existente en la superficie de la Luna (que varía entre 10^{-10} y 10^{-12} torr entre el día y la noche lunar, que equivalen a la presencia de entre 10^7 y 10^5 moléculas/cm^3). Reciben el nombre de sistemas de ultra alto vacío.

4. Sistema de aceleración (cavidades de radiofrecuencia). En estos dispositivos es en donde se transfiere energía a las partículas cargadas, aumentando su velocidad en cada paso por el sistema.

En el caso de aceleradores de blanco fijo, en la zona de utilización de los haces, se suelen encontrar el blanco y el detector. Si se trata de colisionadores, en los puntos de cruce de los haces, es donde se instalan los grandes espectrómetros de partículas; el tubo del anillo de colisiones atraviesa el detector por su eje central.

4.1.2 Tipos de aceleradores

La clasificación de los tipos de aceleradores más importantes queda patente en el siguiente esquema:

- Corriente continua (electrostáticos)
- Radiofrecuencia (RF)
  - lineales
  - orbitales
    - ciclotrón
    - sincrotrón
  - colisionadores
    - lineales
    - sincrotrones

4.1.3 Tecnologías en la evolución de los aceleradores

Las tecnologías que han marcado el desarrollo de los aceleradores son las siguientes:

1. Estabilidad de fase (para la aceleración). Cuando una partícula se

desplaza en el interior de un acelerador, para ser acelerada debe atravesar zonas en las que el campo eléctrico debe ser el máximo posible. Con un potencial sinusoidal, puede ajustarse la fase de tal forma que la partícula siempre siente un potencial de aceleración. Más adelante, al describir los aceleradores lineales, se detallará este principio.

2. Radiofrecuencia (gracias al desarrollo del radar en la II guerra mundial). Para transferir la energía al haz del acelerador, en las llamadas cavidades aceleradoras, se utilizan amplificadores de radiofrecuencia (*klystron*). Original-mente las frecuencias eran bajas (centenares de MHz). Ahora es fácil disponer de generadores que proporcionan 1 MW con frecuencias cercanas a 1 GHz.

3. La focalización fuerte (para los sincrotrones). Este es un sencillo método de utilización de células compuestas por dos cuadrupolos (células *FODO*), descritas más adelante en el parágrafo 4.3.3.

4. La superconductividad (para imanes y cuadrupolos intensos). La superconductividad es el fenómeno por el que ciertos cables pueden conducir altas intensidades de corriente eléctrica, sin que existan pérdidas caloríficas por efecto joule. Se consigue así crear campos magnéticos intensos (unos 10 tesla en vez de los 2 tesla producidos por los imanes convencionales) y construir cavidades de radiofrecuencia de alto gradiente. El inconveniente de la superconductividad es que hoy por hoy, el cable superconductor opera a temperaturas del helio líquido o incluso superfluido (1,8 K) por lo que se necesitan instalaciones criogénicas muy importantes. La figura 4.2 muestra la región de las magnitudes físicas: campo magnético (tesla), temperatura (K) e intensidad de corriente (kA/mm^2) que circula por un cable de niobio-titanio superconductor.

Imanes con espiras de cables de cobre, alcanzan campos magnéticos de 1,5 T mientras que los superconductores pueden llegar hasta unos 10 T. Lo mismo sucede con las cavidades de radiofrecuencia: las de cobre generan campos del orden del MeV/m y las superconductoras un orden de magnitud mayor.

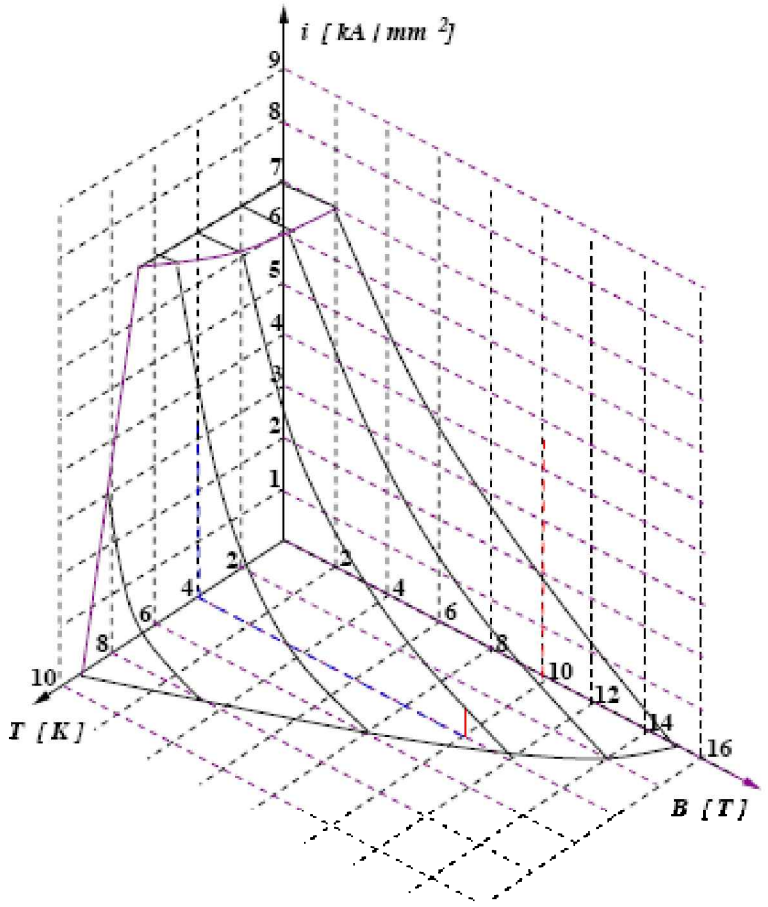


Figura 4.2: Región de los parámetros físicos: temperatura *T*, campo magnético *ß* y densidad de corriente crítica para un cable superconductor de una aleación comercial de *Nb − Ti*. *Fuente*: R. Hampshire *et al*., (1969)

5. El enfriamiento estocástico (en los colisionadores $p\bar{p}$). Para conseguir un alto monocromatismo en un haz de partículas, hay que ir frenando las partículas más energéticas y al mismo tiempo hay que reducir sus oscilaciones betatrónicas; esto se consigue con la idea contenida en la figura 4.3, donde se puede ver el significado del enfriamiento estocástico: mientras las partículas recorren el arco de *A* a *B*, las señales captadas en los instrumentos colocados en *A*, se transmiten eléctricamente, siguiendo el diámetro, hasta *B*, modificando los parámetros del imán colocado en *B*, antes de que llegue el haz, ya que las

partículas que viajan por el arco tardan más que las señales eléctricas en llegar a *B*. Por la implementación de este fenómeno en un anillo de antiprotones fue premiado con el Nobel de Física de 1984 el ingeniero de aceleradores S. Van der Meer del CERN, compartido con el físico Carlo Rubbia, porque desarrollaron el colisionador protón-antiprotón $\mathrm{Sp\bar{p}S}$ con el que se descubrieron los bosones intermediarios de la interacción débil $W^{\pm}$ y Z. Se consiguió, por ejemplo, almacenar unos $10^{12}\bar{p}$ al día antes de transferirlos al colisionador $\mathrm{Sp\bar{p}S}$.

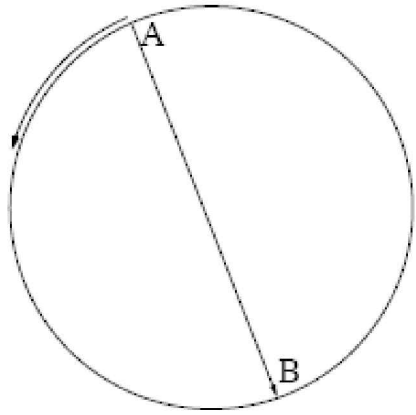


Figura 4.3: El principio del enfriamiento estocástico, descrito en el texto.

Todas estas tecnologías han contribuido sucesivamente al aumento vertiginoso de la energía de las colisiones de partículas en las últimas décadas. Véase la carta de Livingston representada en la figura 4.4, donde se ve una clara correlación entre el aumento de la energía y las tecnologías desarrolladas. La energía mostrada para los colisionadores es la equivalente al centro de masas en una colisión con un blanco fijo, para que se pueda comparar con los otros aceleradores.

4.2 Aceleradores de corriente continua

Son los primeros en desarrollarse. Se clasifican en dos grandes grupos.

1. El acelerador de Cockroft–Walton, impulsado por el propio Rutherford, en 1930. Basado en la rectificación de corriente alterna, como puede apreciarse en la figura 4.5. El primer año de su invento, logró acelerar protones hasta una energía de 260 keV. Utilizando la reacción $p + {}^{7}_{3}Li \rightarrow \alpha + \alpha$, verificaron que se cumple la conservación de la energía, si se tiene en cuenta la ecuación $E = mc^2$. Por ello se les premió con el Nobel de Física en 1951. Hoy en día existen aceleradores de este tipo que aceleran protones hasta unos 10 MeV.

2. El acelerador Van de Graaff, genuinamente electrostático porque se transportan mecánicamente (en una correa) las cargas eléctricas desde el generador hasta el terminal de alto voltaje; en la figura 4.6, se observa cómo las cargas son transportadas por una correa no conductora conectada entre dos poleas (*A* y *B* en la figura) hasta el terminal de alta tensión. La carga eléctrica se genera en la correa por efecto corona. Si la carga acumulada en el terminal es *Q*, el potencial de la esfera será $V = Q/C$, con $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. La limitación de estos aceleradores es debida a que se produce la ruptura dieléctrica cuando el campo eléctrico toma valores del orden de algunos M*V*/m. El funcionamiento puede mejorarse si se presuriza el tanque que contiene el acelerador con gas N_2 o SF_6, con lo que se pueden alcanzar unos 15 M*V*. Para acelerar iones positivos, la fuente de iones está colocada en el terminal de alta tensión, lo que es problemático. El Van de Graaff es hoy ampliamente utilizado. Se obtiene mayor energía (el doble) en el llamado modo tándem. Se conectan dos columnas opuestas al terminal; en la primera columna se aceleran iones negativos, y al llegar al terminal atraviesan una lámina delgada que arranca al menos dos electrones de cada ión, por lo que continúan acelerándose como positivos en la segunda columna llegándose a alcanzar más de 20 MeV. Hoy en día se dispone de fuentes de iones negativos de casi todos los elementos por lo que los aceleradores Van de Graaff se utilizan para acelerar todo tipo de iones.

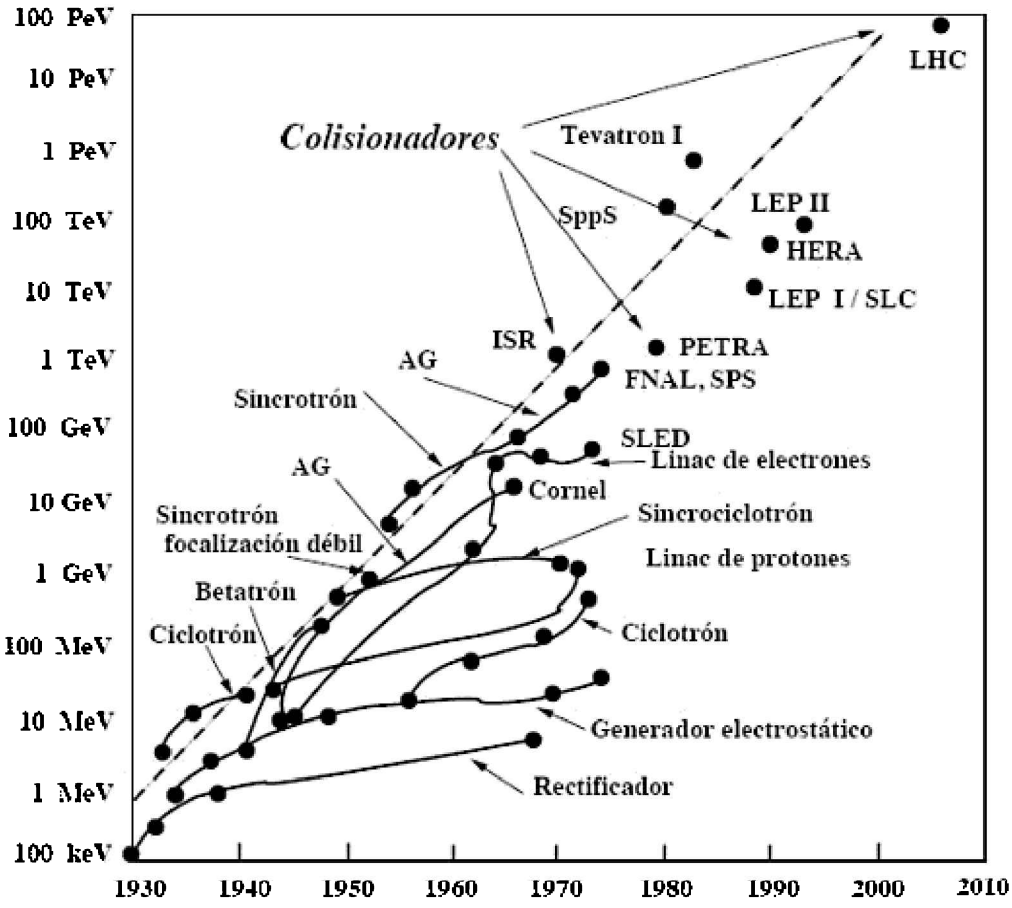


Figura 4.4: La carta de Livingston. Se observa el rápido crecimiento de la energía alcanzada con los aceleradores (doce órdenes de magnitud) en función del tiempo (ocho décadas).

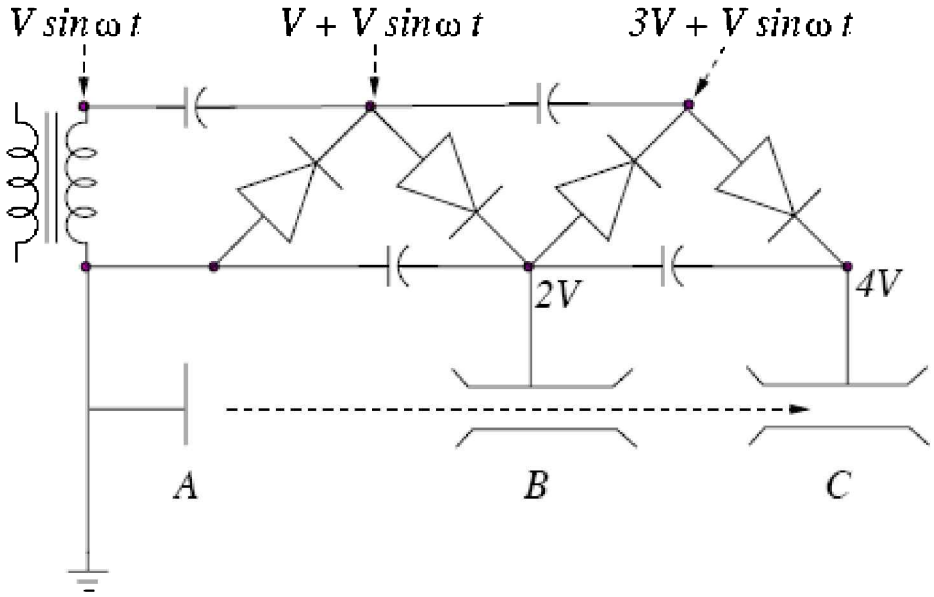


Figura 4.5: Estructura de rectificación de corriente en un acelerador tipo Cockroft–Walton.

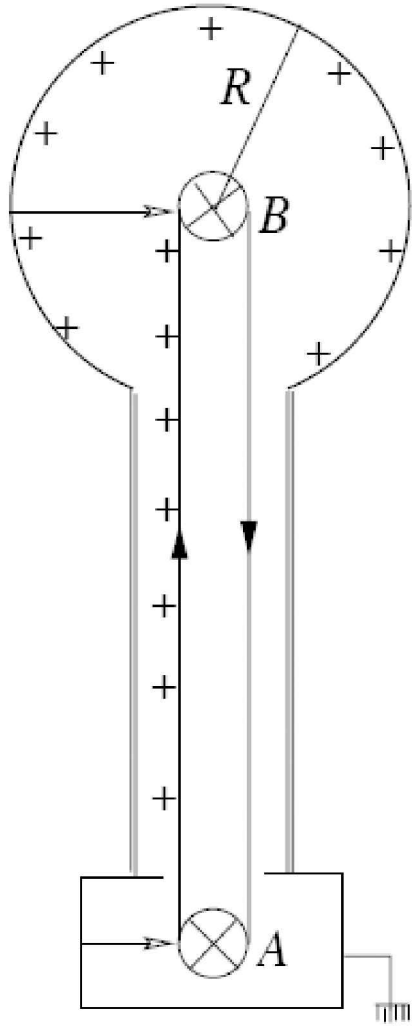


Figura 4.6: El principio de funcionamiento del acelerador Van de Graaf, descrito en el texto.

4.3 Aceleradores de corriente alterna

4.3.1 Aceleradores lineales (*linacs*)

La primera instalación con un acelerador lineal importante se debe a L. Alvarez[2] (1948), en el que se alcanzó una energía de 32 MeV. Estaba

basado en las ideas originales de R. Widerö[3] y las mejoras de Sloan y Lawrence.[4] Como el nombre indica, se trata de un tubo de vacío, construido en línea recta, por el que circulan las partículas. En el interior del tubo se instalan a su vez tubos cilíndricos de deriva en los que se conecta, alternativamente, el voltaje de la radiofrecuencia, que puede suponerse de la forma $V = V_{max}$ sin φ (véase figura 4.7).

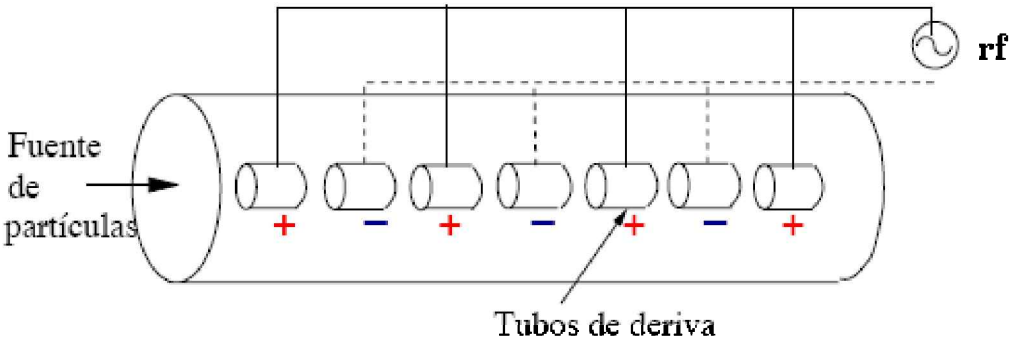


Figura 4.7: Esquema de la estructura de un acelerador lineal.

Debe elegirse correctamente la longitud de cada tubo de deriva para adecuarlo a la velocidad del paquete de partículas que circula. La velocidad de la partícula de masa *m* y carga *e* en el tubo de deriva número *n*, conocido el potencial medio de aceleración *V*, es:

$$v_n = \sqrt{\frac{2neV}{m}}$$

Este potencial medio es igual a V_{max} sin φ_0, siendo φ_0 la fase media del voltaje de la RF en los espacios entre tubos de deriva. Dentro de los tubos de deriva, el campo es nulo. Para sincronizar el paso de la partícula con el potencial de aceleración, la longitud de los tubos debe ir aumentando según:

$$L_n = \frac{1}{2} v_n T_{rf} \qquad (4.1)$$

siendo T_{rf}, el periodo del oscilador que genera la radiofrecuencia ($\nu_{rf} = 1/T_{rf}$). Un ejemplo puede observarse en la figura 4.8, donde se observa el esquema de un acelerador lineal de protones (*linac*): el haz de protones viaja por el interior de tubos de deriva que los protegen del campo eléctrico y zonas libres (*gaps*) en las que el paquete de protones, viajando a una velocidad *v*, es acelerado con un potencial ligeramente inferior al máximo. La estabilidad de fase es consecuencia de la forma sinusoidal del campo eléctrico: la partícula ideal se encuentra en el punto *C* de la figura 4.8; una partícula más rápida llegará antes (punto *D*) y será frenada, mientras que una lenta (punto *E*) será acelerada. Estas fluctuaciones de energía se conocen como oscilaciones sincrotrón.

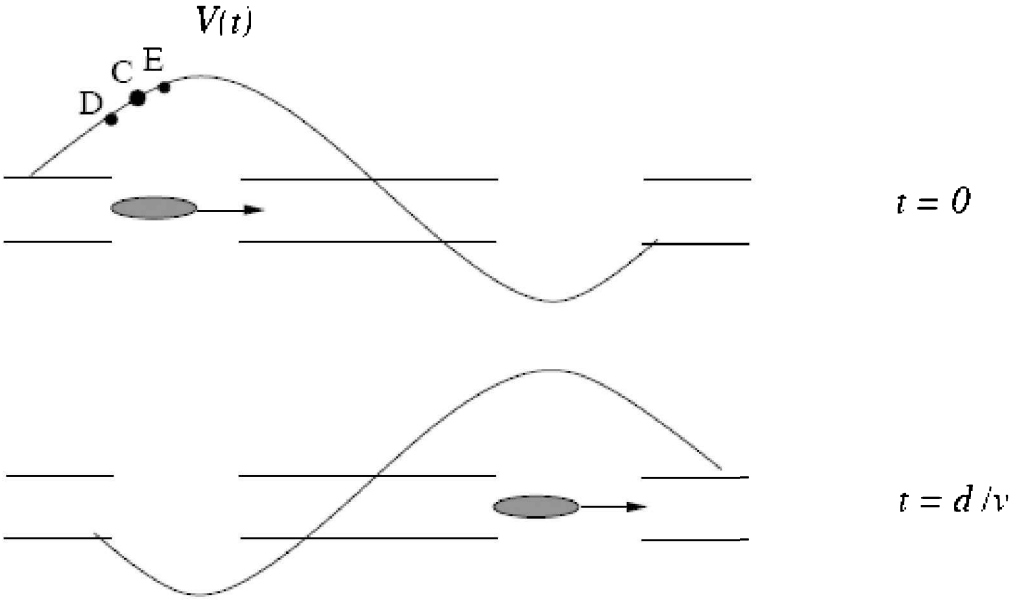


Figura 4.8: El principio de estabilidad de fase. La curva de potencial es máxima cuando el paquete de protones pasa por las zonas de deriva de un acelerador lineal.

En el laboratorio de Los Alamos (EEUU) existe un *linac* de protones que alcanza 800 MeV con una corriente de 1 mA. Es una factoría de mesones, pero ese *linac* está destinado para producir haces de neutrones, al bombardear los protones contra blancos muy ricos en neutrones. Es la

misma idea que la recién aprobada fuente europea de espalación de neutrones (*European Spallation Source, ESS*) en Lund, Suecia (http://ess-scandinavia.eu/). Los campos típicos en los *linacs* son de varios MeV por metro de longitud. Suelen utilizarse como inyectores para aceleradores circulares de mayor energía. Los electrones, son rápidamente relativistas (con algunos MeV), y los tubos de deriva son cavidades resonantes de algunos centímetros de longitud. Las frecuencias aplicadas (osciladores *klystron*) son de microondas. El mayor *linac* de electrones está en Stanford; tiene 3 km de longitud y acelera electrones hasta 50 GeV. Fue utilizado en la misma época que el colisionador LEP de CERN, descrito más adelante en el parágrafo 4.3.4, para estudiar la producción del bosón *Z*.

4.3.2 Aceleradores circulares

Ciclotrón

Ideado por Ernest Lawrence[5] en 1932 (Premio Nobel de Física 1939), logró construir el primer ciclotrón del tamaño de un pie y aceleró protones hasta 1,25 MeV. Tiene forma de dos *D* huecas y se colocan en el interior de un campo magnético, en el que la trayectoria circular de radio *r* cumple:

$$p = \gamma m v = qBr$$

de forma que a medida que aumenta de energía la partícula (cada media vuelta recibe un impulso de la radiofrecuencia conectada entre las dos *D*) va describiendo una espiral con *r* mayor (véase la figura 4.9. La velocidad angular de la partícula es $w = v/r$ y su frecuencia es $\nu = w/(2\pi)$, llamada frecuencia ciclotrón, que debe coincidir con la frecuencia de la RF; es decir,

$$\nu = \frac{qB}{2\pi\gamma m} \qquad (4.2)$$

por ejemplo 15 MHz T^{-1}, para protones con $\gamma = 1$.

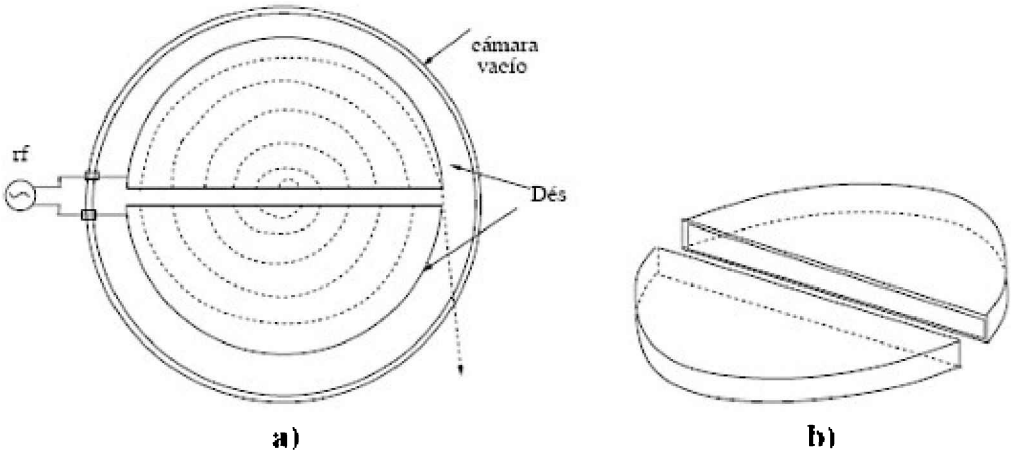


Figura 4.9: a) Esquema de un ciclotrón visto por arriba, con la espiral de la trayectoria de una partícula y b) las dos *D*és.

Si el radio del ciclotrón es *R*, la energía cinética máxima que alcanzarán los protones será:

$$T_{\mathrm{K}} = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

En el CERN se desarrolló el sincrociclotrón, que aceleraba protones hasta un momento igual a 1 GeV/c. En este caso, los protones llegaban a ser relativistas, con lo que γ no se mantiene igual a 1 y la frecuencia iba aumentando, por lo que se debía aumentar la frecuencia de la RF para sincronizarla con el giro de los protones. Actualmente las grandes instalaciones de ciclotrones se encuentran en TRIUMF (Canadá), de 520 MeV y en el PSI (Suiza) de 590 MeV. Hay numerosos ciclotrones de bajas energías por todo el mundo (de 20 a 200 MeV) utilizados para fabricar radioisótopos para medicina.

Sincrotrón

Este es el dispositivo moderno empleado para acelerar protones y electrones. Las partículas describen una órbita toroidal circunscrita en un plano, gracias a una serie de imanes dipolares con un campo magnético B (en tesla) perpendicular al plano de la trayectoria. Si el momento de la partícula (de carga unidad) es p (en GeV/c) el radio R (en metros) del anillo del acelerador debe cumplir:

$$p = 0{,}3BR \tag{4.3}$$

Las partículas son aceleradas cada vez que atraviesan las cavidades de radiofrecuencia, por ello, el campo B y la radiofrecuencia deben ir aumentando progresivamente, para sincronizarse con la velocidad de las partículas; de aquí el nombre de sincrotrones. En efecto, sea T el tiempo necesario para que una partícula dé una vuelta en el sincrotrón, $T = 2\pi R/v = 2\pi R/\beta c = 2\pi RE/pc^2$. La frecuencia angular correspondiente es $\omega = 2\pi/T$ y la RF debe tener una frecuencia múltiplo de ésta: $\omega_{rf} = k\omega$. Por consiguiente, las condiciones para que haya aceleración son:

$$\omega_{rf} = k\omega = \frac{kcpc}{RE}$$

junto con el aumento del campo magnético correspondiente dado por (4.3). Para partículas relativistas se simplifica $\omega_{rf} = \frac{kc}{R}$ puesto que se cumple $E = pc$.

Todas las grandes máquinas que se han construido son sincrotrones (exceptuando el acelerador lineal de SLAC). Por ejemplo, el Tevatrón de Fermilab, de $R = 1$ km, que alcanzó 400 GeV con cavidades aceleradoras de cobre y 1000 GeV (de ahí el nombre de Tevatrón) cuando se colocaron las cavidades supraconductoras, el colisionador LEP y el más reciente LHC del CERN.

4.3.3 Focalización y estabilidad del haz

La trayectoria real de los haces de partículas aceleradas en un sincrotrón consta de numerosas oscilaciones en los planos horizontal y vertical de la trayectoria. No es un círculo perfecto. Esas oscilaciones se llaman oscilaciones betatrón. Además existen oscilaciones sincrotrón debidas a la estructura sinusoidal de la radiofrecuencia del acelerador; son oscilaciones longitudinales y afectan a la estructura energética de los paquetes de partículas aceleradas.

Para evitar que las oscilaciones de las trayectorias de las partículas se hagan demasiado grandes es necesario utilizar cuadrupolos magnéticos. Su finalidad es focalizar las partículas para que sigan lo más fielmente posible la trayectoria ideal. Un cuadrupolo se caracteriza por focalizar en un plano (si por ejemplo es en el plano horizontal, entonces es un cuadrupolo tipo *F*) y desfocalizar en el otro plano (en el vertical).

La focalización fuerte es debida al efecto focalizador de dos cuadrupolos con distancia focal f_i opuesta (uno focaliza y el otro desfocaliza en el mismo plano):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \qquad (4.4)$$

siendo *d* la distancia entre ambos. Como $f_1 = -f_2$, el resultado es que el par *FD*, que se denomina *FODO* es siempre focalizante, $F = f^2/d$. La figura 4.10 muestra los dos tipos de imanes más frecuentes; en 4.10**a**), el imán dipolar que es un elemento básico en los sincrotrones. En la figura 4.10**b**) se muestra un diseño de un imán cuadrupolar; existen cuatro polos, creados por las respectivas bobinas que, según el sentido de la corriente eléctrica que las atraviesa, definen polos N y S. Las líneas del campo van de N a S (líneas a trazos) y la fuerza de Lorentz que se ejerce sobre una partícula con carga positiva que atraviesa el imán en dirección perpendicular al papel (eje *z*) sigue la dirección de la flecha con línea contínua.

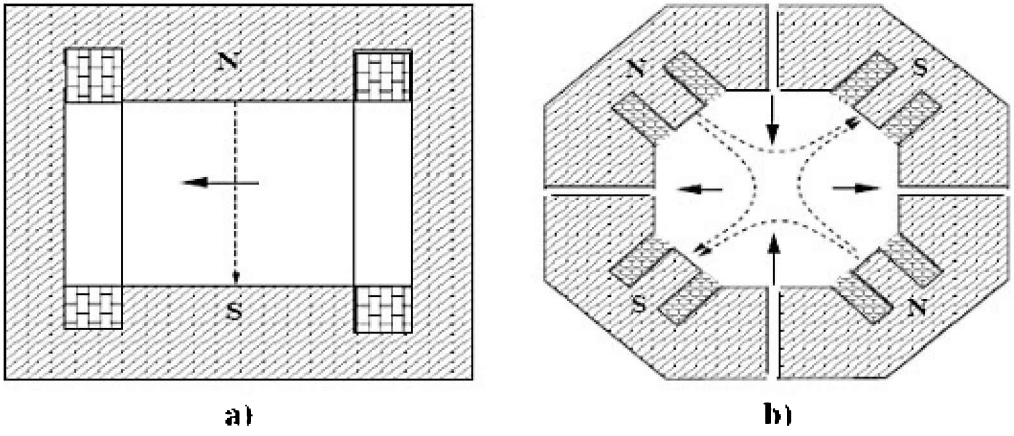


Figura 4.10: **a)** Imán dipolar. **b)** Imán cuadrupolar. El campo se anula en el eje central del cuadrupolo (eje *z*). Se observan los cuatro polos alternados (dos N y dos S) y la dirección de las fuerzas de Lorentz.

En un sincrotrón, si la trayectoria de la partícula se fija como eje *z*, el campo magnético de los imanes se anula según el eje *z*. En los dipolos, el campo es constante. Si se fija el eje vertical como *y*, entonces $\vec{B}_d = (0, B_y, 0)$. En un cuadrupolo, el campo es de la forma $\vec{B}_c = (ky, kx, 0)$ en donde la constante *k* es el gradiente del cuadrupolo, que se mide en tesla/m.

4.3.4 Sincrotrones de electrones: Radiación sincrotrón

Los electrones, al sufrir una aceleración centrípeta debido a su trayectoria circular, emiten la conocida radiación sincrotrón. La pérdida de energía de un electrón cuya velocidad es $\beta = v/c$, al describir una trayectoria circular es:

$$W = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha\hbar c\beta^3\gamma^4}{R} \qquad (4.5)$$

siendo *R* el radio de curvatura, $\beta = v/c$ con *v* la velocidad de las

partículas y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1}$. Esta radiación (fotones) se emite en la dirección de la tangente de la trayectoria del electrón. La anterior ecuación (4.5), para electrones, se puede escribir

$$W = 88{,}5\frac{E^4}{R} \quad \text{keV/vuelta}$$

donde la energía E está en GeV y el radio R en metros. En el histórico colisionador e^+e^-, LEP, del CERN (de radio ≈ 4,3 km) daba lugar a una pérdida aproximada de unos 85 MeV/vuelta, cuando trabajaba en el pico del Z (E_e = 45 GeV). Puede verificarse también, por ejemplo, que para un e^- de 10 GeV, circulando por un anillo de 1 km de radio, la pérdida de energía es de 885 keV por vuelta. Para mantener un colisionador e^+e^- funcionando a energía constante, hay que acelerar las partículas (e^+ y e^-) transfiriéndoles una cantidad de energía equivalente a lo que pierden en cada vuelta. Esta es una limitación muy importante de los colisionadores circulares (o sea, sincrotrones) de electrones. En los sincrotones de protones este efecto es despreciable; en efecto, si se compara con los de electrones se cumple $\Delta E_p/\Delta E_e = (m_e/m_p)^4 \sim 10^{-13}$. Así, para el colisionador LHC, en el que la energía de los protones es de 7 TeV, aunque la pérdida de energía por radiación sincrotrón asciende a unos 5 keV por vuelta, es una magnitud suficientemente importante para que la radiación sincrotrón se haya tenido en cuenta al diseñar la criogenia y los tubos de vacío del acelerador.

La radiación sincrotrón, por sus características, se ha convertido en una herramienta óptima para el estudio de materiales, células, cristales, etc. En todos los países desarrollados existen sincrotrones de electrones cuya única finalidad es la producción de radiación sincrotrón. En España (Barcelona), está el sincrotrón ALBA, basado en un anillo (sincrotrón) de almacenamiento de electrones de 3 GeV (véase http://www.cells.es/).

Los haces de fotones de radiación sincrotrón están focalizados igual que los fotones de un láser. El espectro energético de los fotones de la radiación sincrotrón es bastante ancho. Se define la energía crítica

$$E_c = \frac{3}{2}\frac{\hbar c \gamma^3}{R}$$

o, lo que es lo mismo, la longitud de onda crítica:

$$\lambda_c = \frac{1,8643}{BE^2}\,(\mathrm{nm})$$

(*B* en Tesla y *E* en GeV), como el valor de la energía que divide al espectro en dos mitades (véase la figura 4.11). Ahora bien, el uso de monocromadores permite realizar una selección energética. Pero donde los sincrotrones han evolucionado más es en el brillo (*brilliance*); se trata de la característica más apreciada de los haces de radiación sincrotrón ya que representa la intensidad y el grado de colimación del haz. Se trata de una magnitud parecida a la luminosidad de los colisionadores, que se aborda a continuación.

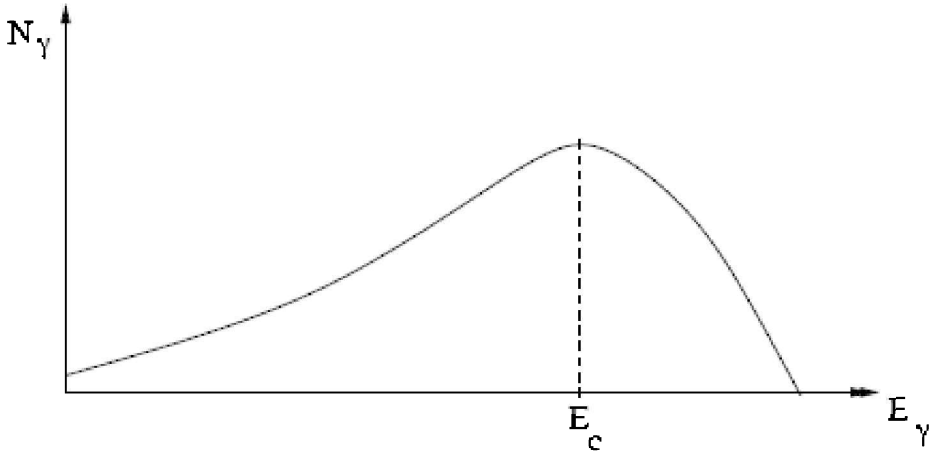


Figura 4.11: Espectro energético de los fotones de la luz sincrotrón y la energía crítica, que divide el espectro en dos mitades.

4.4 Colisionadores

Se inicia la construcción de colisionadores en el año 1960; los

primeros son: ADA en Italia, SPEAR en Stanford, EEUU. Se trataba de colisionadores e^+e^- de 250 MeV y 500 MeV por haz respectivamente. Como se ve, eran colisionadores de muy bajas energías.

Un colisionador es un sincrotrón por el que circulan, simultáneamente y en sentido contrario, dos haces de partículas. Por ejemplo, $e^+ + e^-$, $p + \overline{p}$, $e^- + p$ y p + p. En un colisionador se consigue que los haces acelerados colisionen en uno o varios puntos de la trayectoria del sincrotrón. Son colisiones que tienen lugar en el interior del tubo de vacío del acelerador. En el caso de colisionadores partícula-antipartícula $(e^+ + e^-,\ p + \overline{p})$ la estructura del acelerador es mucho más simple que en los otros casos. Como se trata de partículas con la misma masa y carga opuesta, los dos haces pueden circular en la misma estructura magnética en sentido opuesto.

La gran ventaja de los colisionadores es la enorme energía en el centro de masas que se alcanza en la colisión. Se dispone entonces de mucha energía para producir nuevas partículas. Sean $(E_1, \vec{p}_1)$ y $(E_2, \vec{p}_2)$ los cuadrivectores energíamomento de los haces, en donde se ha tomado por comodidad $c = 1$; en el choque se tiene una energía total:

$$W^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \tag{4.6}$$

A gran energía $|p_1| \sim E_1$; si además se supone el caso de un colisionador simétrico, $E_1 = E_2$, se tendrá

$$W \approx 2E \tag{4.7}$$

El mismo cálculo para un sincrotrón utilizado en modo blanco fijo, daría

$$W^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E \tag{4.8}$$

siendo E la energía del haz extraído. En este caso $W \sim \sqrt{E}$, con lo que sólo se dispone en el centro de masas de la colisión de una energía que aumenta según $\sqrt{E}$.

La desventaja de los colisionadores es que es muy difícil obtener grandes intensidades de partículas circulando para poder tener una gran probabilidad de colisión. La magnitud física característica de los colisionadores es la luminosidad (dada frecuentemente en $cm^{-2}\ s^{-1}$), que se define

$$\mathcal{L} = f \cdot n \frac{N_1 N_2}{A} \tag{4.9}$$

en donde N_i es el número de partículas aceleradas en cada sentido, f la frecuencia de rotación, n el número de paquetes (*bunches*) que circulan en cada sentido y A la sección de intersección de los haces, que puede escribirse $A = 4\pi\sigma_x\sigma_y$, siendo σ_x y σ_y las desviaciones típicas de las gausianas que caracterizan los perfiles transversales del haz. Se puede comprobar que el número total de reacciones que tiene lugar por unidad de tiempo, depende de la sección eficaz de reacción σ y de la luminosidad:

$$R = \sigma \cdot \mathcal{L} \tag{4.10}$$

El tamaño del haz puede expresarse en función de dos magnitudes: la *emitancia transversa*, ε, que depende de la óptica y la *función amplitud*, β, que depende de la configuración magnética del acelerador. En función de la desviación típica σ y de la amplitud β, la emitancia transversa se escribe

$$\epsilon = \pi\sigma^2/\beta$$

con lo que, si β^* es el valor de β en el punto de colisión, la luminosidad puede escribirse

$$\mathcal{L} = f \cdot n \frac{N_1 N_2}{4\sqrt{\epsilon_x \beta_x^* \epsilon_y \beta_y^*}}$$

de forma que la receta para conseguir alta luminosidad es reducir la amplitud y la emitancia y por supuesto, aumentar la frecuencia y el número de paquetes.

Se han construido colisionadores e^+e^-, $p\bar{p}$ y e^-p, de varias energías en el mundo (véanse tablas 4.2 y 4.3). La luminosidad suele tomar valores del orden de $L \sim 10^{31}$ cm^{-2} s^{-1} para los colisionadores e^+e^-. En el viejo $Sp\bar{p}S$ del CERN llegó hasta $L \sim 10^{30}$ cm^{-2} s^{-1}. Se trata de una luminosidad elevada habida cuenta de que es difícil producir muchos antiprotones. En el CERN, gracias al enfriamiento estocástico, ideado por S. Van der Meer que ya se ha descrito anteriormente, se logró almacenar unos 10^{12} antiprotones por día en el acumulador.

Por otra parte, se observa que la energía es menor en los colisionadores e^+e^- que en los de protones. Esto es debido a las grandes pérdidas por radiación sincrotrón que sólo afectan a los sincrotrones de electrones; en efecto, según la ecuación (4.5), a la misma energía, las pérdidas de energía de los protones respecto a la de los electrones $\Delta E_p/\Delta E_e = (m_e/m_p)^4 \sim 10^{-13}$, es insignificante. Los colisionadores e^+e^- más recientes trabajan con energía centro de masas alrededor de 10 GeV (CESR en Cornell, EEUU; KEK en Tsukuba, Japón; PEP II en SLAC). Como están en la zona del $\Upsilon(4S)$, fabrican muchos mesones con belleza, por ello se llaman factorías de Bs (*B-factories*). Son *asimétricos*, es decir, la energía de electrones y positrones no es la misma. Estos colisionadores están diseñados para profundizar en el estudio de la violación de la simetría *CP* en los sistemas $B\bar{B}$. Para ello se requiere un *boost* de Lorentz, de forma que el centro de masas no coincide con el punto de colisión.

Tabla 4.2: Los mayores colisionadores e^+e^-del mundo.

	CESR (Cornell)	KEKB (KEK)	PEP-II (SLAC)	SLC (SLAC)	LEP (CERN)
año de inicio	1979	1999	1999	1989	1989
$E_{\pm}^{max}$(GeV)	6	8x3.5	9x3	50	100
$\mathcal{L}(10^{31}\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}})$	120	10^3	670	5	10
$2\pi R$ (km)	0,768	3,016	2,2	1,45+1,47	26,66

Tabla 4.3: Los mayores colisionadores $\overline{p}p$ del mundo.

	SpS (CERN)	Tevatrón (Fermilab)	Hera (DESY)	LHC (CERN)
año de inicio	1981	1987	1990	2009
tipo	$\overline{p}p$	$\overline{p}p$	e^-p	pp
$E_{\pm}$(TeV)	0.315	0.9	e; 0,030 p; 0,920	7
$\mathcal{L}(10^{30}\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}})$	6	50	75	10^4
$2\pi R$ (km)	6,911	6,28	6,336	26,66

El proyecto de mayor envergadura es el LHC que se encuentra en funcionamiento en el CERN (Ginebra) y que es un colisionador p + p con una energía máxima por haz de 7 TeV. Inició su funcionamiento a finales del año 2009. En el año 2010 consiguió acumular una luminosidad integrada de 5 fb^{-1} a una energía en el centro de masas de $\sqrt{s} = 7$ TeV y, en julio de 2012 ya había acumulado otros 5 fb^{-1} a una energía de $\sqrt{s} = 8$ TeV. Con estos datos, los experimentos ATLAS y CMS pudieron anunciar el 4 de julio de 2012 en el CERN el descubrimiento de un nuevo bosón H de 126 GeV, que se desintegra en $H \rightarrow \gamma\gamma$ y $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow$ 4 leptones, compatible con el tan buscado bosón de Higgs. La luminosidad del LHC está previsto que alcance $L \sim 10^{34}$ $cm^{-2}\ s^{-1}$ en 2014. Se proyecta su operación hasta 2030.

4.4.1 Colisionadores de iones

Tanto en Brookhaven, EEUU como en el CERN existen colisionadores capaces de producir colisiones entre iones pesados. En el colisionador de Brookhaven, llamado RHIC, de 3,8 km de circunferencia, los iones de oro alcanzan una energía máxima de 0,1 TeV/u, con luminosidades del orden de $L = 0,4 \times 10^{27}\ cm^{-2}\ s^{-1}$. En el mismo LHC, se prevé estudiar colisiones plomo-plomo hasta energías de 2,76 TeV/u por haz y con luminosidades superiores en un orden de magnitud a las de RHIC.

La física que se pretende estudiar en estas colisiones entre iones pesados relativistas es la del estado de la materia denominado plasma de quarks y gluones, en donde las densidades y temperaturas son muy superiores a las de la materia nuclear conocida.

4.4.2 El complejo de aceleradores del CERN

La figura 4.12 muestra el extraordinario entramado formado por los 9 aceleradores del CERN, que pueden acelerar hasta 6 tipos distintos de partículas. Esta imagen muestra la compleja instalación de máquinas aceleradoras que se han desarrollado en sus breves 50 años de historia (el CERN se creó en 1954). Es posible que hoy sea la mayor instalación del mundo dedicada a la investigación en física de partículas. Obsérvese como para acelerar protones, cada acelerador se utiliza para inyectar partículas al siguiente de mayor energía; así, se puede apreciar que la cadena es LINAC→PSB→PS→SPS→LHC. El CERN ha sabido optimizar los recursos disponibles, aprovechando las máquinas existentes, construyendo nuevos aceleradores utilizando los viejos como inyectores de partículas para los nuevos.

Uno de los últimos aceleradores del CERN, es el proyecto CNGS, que produce un haz de neutrinos dirigido al laboratorio subterráneo del Gran Sasso (Italia). Los neutrinos recorren 730 km, atravesando la corteza terrestre. Los detectores situados en el Gran Sasso (experimentos OPERA, ICARUS) estudian las oscilaciones de neutrinos; en particular

intentan detectar neutrinos tauónicos.

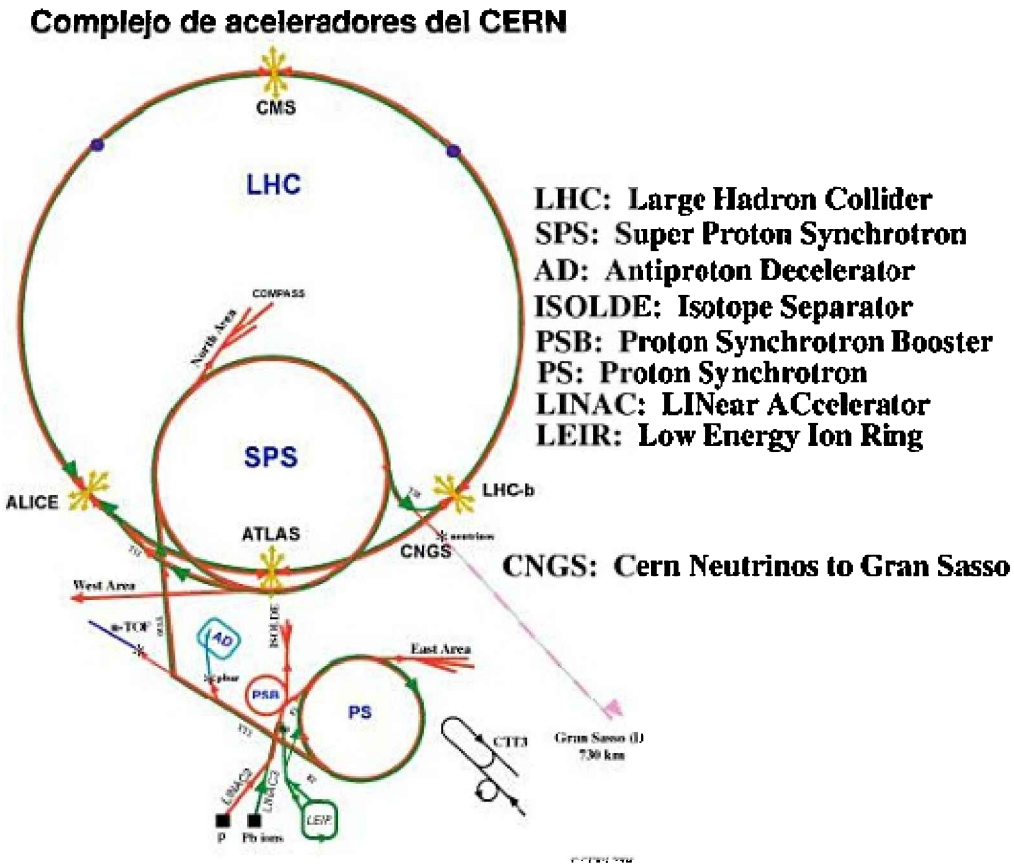


Figura 4.12: El complejo de aceleradores del CERN.

4.4.3 Colisionadores e^+e^- lineales

Para explotar las ventajas de la física accesible a través de la aniquilación e^+e^-, sin los inconvenientes de las pérdidas de energía por radiación sincrotrón que tienen lugar en los colisionadores circulares, así como por la claridad y la facilidad de estudio de las interacciones, que no están sumergidas en el fondo de las interacciones fuertes que tienen lugar en los colisionadores hadrónicos, cualquier colisionador e^+e^- del futuro tendrá que ser de tipo lineal. El ejemplo reciente de colisionador lineal es

el de SLAC, cuyo esquema se puede ver en la figura 4.13. Primero se aceleran electrones que producen positrones; una vez reinyectados, se aceleran y siguen la rama curva de la derecha de la figura; los electrones, previamente acelerados, son guiados por la rama izquierda, que es más larga, con lo que los dos haces chocan en el mismo instante en el punto de colisión: la diferencia entre los tiempos de inyección se compensa con la diferencia de recorridos. Con el LEP del CERN, desmontado en el año 2000, se ha tocado el techo de la tecnología de los colisionadores e^+e^- circulares. El CERN está desarrollando un colisionador e^+e^- lineal de varios TeV llamado CLIC, que verá la luz probablemente más allá del 2015.

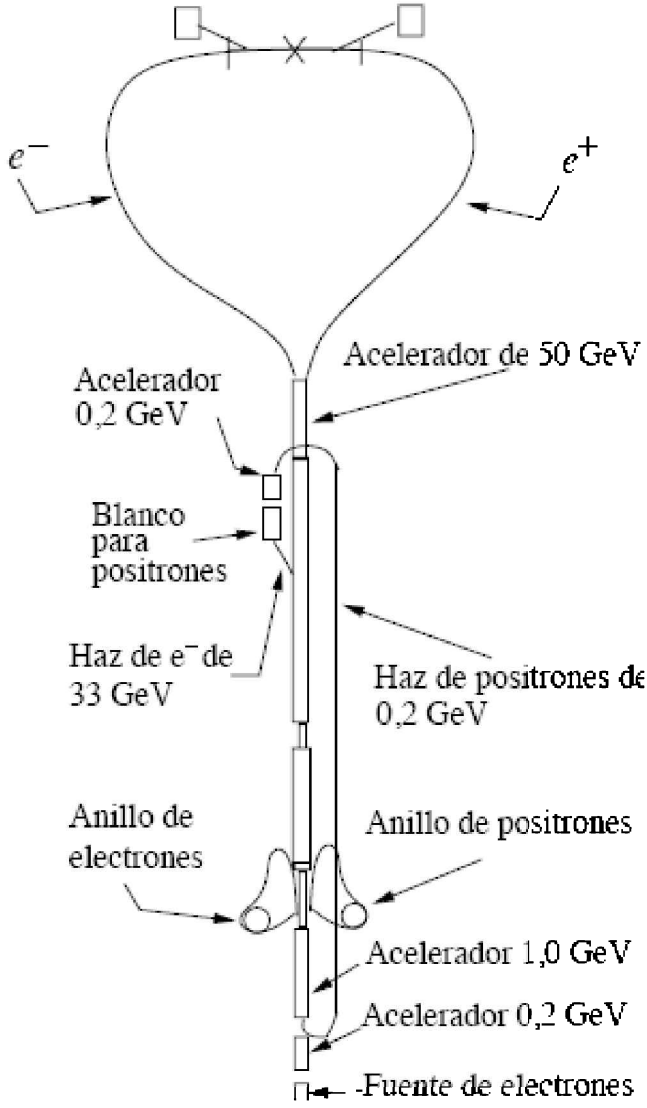


Figura 4.13: Esquema del colisionador lineal SLC de SLAC.

4.5 Problemas

4.1 Acelerador lineal

Un acelerador lineal de protones está formado por 5 tubos de deriva conectados de forma alternativa a los terminales de una fuente de radiofrecuencia de 50 MHz y 100 kV. Si se inyecta un

haz de protones de 100 keV se pide:

a) Calcular la energía total del haz después de atravesar todo el acelerador. Estimar también la longitud total de la sección de aceleración.

b) Calcular la cantidad de tubos adicionales que habría que añadir si se quieren acelerar protones a 80 MeV. ¿Cuál es en este caso la longitud del último tubo de aceleración? Demostrar que, para energías relativistas, la longitud de los tubos de aceleración puede escribirse como:

$$L_n = \frac{\lambda_{\mathrm{RF}}}{2}\left[1-(nk+1)^{-2}\right]^{1/2}$$

con $k = (qV)/(mc^2)$ y n la posición del tubo. ¿Qué ocurre en el límite ultrarelativista?

c) Si los protones se inyectan en paquetes (*bunches*) de 10^{10} partículas, calcular la corriente media y la potencia de salida del haz.

4.2 Ciclotrón

Calcular la energía máxima de los protones acelerados en un ciclotrón de 0,6 m de radio y situado en un campo magnético de 1 T. Se pide también:

a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador que alimenta el acelerador? Repetir los cálculos anteriores pero para haces de deuterones y partículas α.

b) Si el ciclotrón se opera con una frecuencia fija, estimar la reducción necesaria del campo magnético si se quiere pasar de acelerar protones a deuterones y partículas α.

c) Si el voltaje de aceleración es de 100 kV, ¿cuántas vueltas son necesarias para alcanzar la máxima energía si se aceleran protones? ¿Durante cuánto tiempo son éstos acelerados antes de su extracción a la máxima energía?

d) Calcular la separación de las órbitas de los protones en el momento de su extracción.

e) Calcular el voltaje que debe aplicarse sobre los electrodos de un deflector electrostático de extracción que actúa sobre un arco de órbita de 90° y cuyo radio de curvatira es de 0,671 cm. Tomar para la separación de los electrodos del deflector un valor de 0,8 cm.

4.3 Ciclotrón relativista

Estudiar la operación de un ciclotrón de frecuencia fija en el límite de altas energías donde las partículas aceleradas comienzan a ser relativistas. Establecer para ello una relación entre la fase de la partícula y la energía cinética alcanzada si el voltaje de oscilación de radiofrecuencia toma la forma $V_{RF} = V_0 \sin(w_{RF} t)$. Demostrar que la energía cinética máxima viene dada por la expresión:

$$T_{máx} = \sqrt{\frac{16 q V_0 m c^2}{\pi}}$$

4.4 Sincrociclotrón

a) Obtener una expresión que relacione el radio de un sincrociclotrón de protones con la energía cinética reducida (cociente entre la energía cinética y la masa) de un protón acelerado a la máxima energía. Aplicar al caso de un sincrociclotrón que opera con un campo magnético de 2 T y acelera protones a 650 MeV.

b) Encontrar una expresión para la radiofrecuencia en función de la energía cinética reducida. ¿Cuáles son los valores inicial y final de la frecuencia RF durante la fase de aceleración para el sincrociclotrón del apartado anterior?

c) Demostrar que la radiofrecuencia de un sincrociclotrón de protones varía con el tiempo durante la fase de aceleración en la

forma:

$$\nu_{\mathrm{RF}} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 + 2Ct}}$$

donde ν_0 es la radiofrecuencia al comienzo de la fase de aceleración y C es una función del voltaje de aceleración entre los electrodos, el campo magnético y la masa del protón.

4.5 Colisionador y acelerador de blanco fijo

Establecer las ventajas e inconvenientes entre un colisionador de partículas y un acelerador de blanco fijo. Suponer un sincrotrón de protones que puede funcionar tanto en modo colisionador como acelerador de blanco fijo. Se pide:

a) Calcular la energía total en centro de masas si se opera en modo colisionador con una energía por haz de 5 GeV. ¿Cuál debería ser la energía del acelerador operando sobre un blanco fijo de hidrógeno para que diera lugar a la misma energía en centro de masas? Determinar si este acelerador operando en modo blanco fijo sería capaz de producir antiprotones. ¿Y en modo colisionador?

b) Suponer que este sincrotrón de protones tiene un radio r = 9 m y un acelerador lineal inyecta los protones en la órbita de equilibrio con una energía cinética de 20 MeV. Obtener el valor de la inducción en el momento de la inyección y la energía que el aparato alcanza si el campo aumenta hasta 1,5 T. ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar el campo de los dipolos?

c) Encontrar la relación entre la frecuencia RF de las cavidades aceleradoras y la energía cinética del haz. ¿Cómo es la variación de esta frecuencia desde el momento de la inyeccióna la energía final?

d) Obtener la dependencia temporal de la frecuencia RF de las cavidades aceleradoras de este sincrotrón si se sabe que el campo magnético necesita 0,9 segundos para alcanzar la máxima

energía y depende linealmente con el tiempo. ¿Cuántas vueltas y qué distancia recorren los protones hasta este momento?

4.6 Oscilaciones Betatrón

El campo magnético necesario para mantener la estabilidad de las órbitas en los modernos sincrotrones de protones cumple que:

$$\nu_{\mathrm{RF}} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 + 2Ct}}$$

donde z es la coordenada perpendicular al plano de laórbita de equilibrio (dirección vertical) que se sitúa en $z = 0$, R es el radio de la órbita de equilibrio, ρ es la posición radial de la partícula ($\varepsilon = \rho - R$ sería entonces el desplazamiento horizontal con respecto a la órbita estable) y B_0 y n constantes. Se pide:

a) Demostrar que la constante n, denominada índice del campo, viene dada por la expresión:

$$n(\rho) = -\frac{\rho}{B_z(\rho, 0)} \left[\frac{\partial B_z(\rho, 0)}{\partial \rho}\right]$$

b) Obtener la frecuencia de las oscilaciones betatrón verticales y horizontales para un valor dado de n. ¿Para qué rango de valores de n las partículas siguen oscilaciones estables en torno a la órbita de equilibrio en las direcciones vertical y horizontal?

4.7 Colisionador LHC

El colisionador de hadrones pp LHC (Large Hadron Collider) del CERN tiene una longitud de 27 km de circunferencia y opera a una energía total en centro de masas de 14 TeV, con una luminosidad nominal instantánea de 10^{34} cm^{-2} s^{-1}.

a) Calcular el factor γ de los protones en el LHC. Si el número total de paquetes (*bunches*) de protones es de 2808 y hay un total de $1{,}15 \times 10^{11}$ protones en cada uno ellos, ¿cuál será la energía total almacenada en el acelerador?

b) Si se sabe que cada uno de los imanes dipolares del LHC tiene 14,3 m de longitud, con un diámetro promedio de 9 cm y 160 cables superconductores situados longitudinalmente en los laterales del tubo de vacío, estimar el valor máximo del campo magnético si la corriente total es de 11800 A. Calcular, a partir del valor obtenido, la fracción de la longitud del acelerador empleada en curvar los haces y el número total de dipolos.

c) Calcular la vida media del haz de protones (tiempo transcurrido para que la intensidad del haz se reduzca en un factor 1/*e*) si se supone que la sección eficaz total protón–protón es de σ_{pp} = 110 mb y que la sección eficaz inelástica de interacción de los protones con el gas residual en el tubo del haz es de σ_{p-gas} = 80 mb. Suponer que la temperatura dentro del tubo del haz es de 5 K y el vacío de 10^{-7} Pa.

d) Si la sección eficaz de producción del bosón de Higgs en el canal $H \rightarrow \gamma\gamma$ es de 50 fb, estimar el tiempo que transcurre hasta producir uno de estos sucesos.

e) Si el tubo de vacío por el que circulan los protones en el LHC tiene un diámetro de 18 mm, estimar el número de vueltas que el haz de protones puede mantenerse verticalmente dentro del tubo si no se focaliza adecuadamente el haz.

Datos: permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ NA^{-2}.

4.8 Radiación sincrotrón

A partir de la fórmula clásica de Larmor no relativista para la potencia total radiada por una carga unidad puntual acelerada:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

con *a* la aceleración, se pide:

a) Obtener la fórmula más general de Liénard covariante Lorentz relativista:

$$P = -\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}\right)$$

b) Demostrar que la fómula de Liénard puede también escribirse en términos de la velocidad y aceleración como:

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^6\left[\dot{v} - \left(\frac{\vec{v}\times\vec{v}}{c}\right)^2\right]$$

c) Obtener una expresión para la potencia total radiada en el caso de que se tenga una aceleración circular uniforme. Demostrar que la pérdida de energía por radiación sincrotrón para un electrón en un acelerador circular viene dada por la expresión:

$$\Delta E(\mathrm{MeV}) = 8{,}85 \times 10^{-2}\frac{[E(\mathrm{GeV})]^4}{\rho(\mathrm{m})}$$

con E la energía del haz y ρ el radio de curvatura.

d) El colisionador e^+e^- **LEP** (Large Electron-Positron) del CERN finalizósuoperación en el año 2000 con una energía total en centro de masas de 209 GeV. Calcular la fracción de energía del haz perdida por radiación sincrotrón por vuelta y la potencia total emitida para una corriente del haz de 2,6 mA. Asumir para LEP el mismo tamaño que el dado para el LHC en el Problema **4.7** pero con un campo magnético para sus imanes dipolares de 0,112 T.

Datos: permitividad eléctrica del vacío: $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$F/m.

---

[1]La presión atmósférica es igual a 760 mmHg = 760 torr. Todavía es frecuente el uso de estas unidades de presión en vez del Pascal (Pa), en cuya unidad la presión atmosférica vale 101325 Pa.

[2]Luis W. Alvarez obtuvo el Premio Nobel de Física en 1968, pero por sus

experimentos con cámaras de burbujas.

[3]R. Widerö, Arch. Elektrotech. 21, 387 (1928).

[4]D. H. Sloan and E. O. Lawrence, Phys. Rev. 38, 2021 (1931).

[5]E. O. Lawrence and M. S. Livingston, *Phys. Rev*., 40 (1932) 19

5. Interacción de las partículas con la materia

5.1 Introducción

El estudio de las interacciones de las partículas con la materia es un capítulo fundamental de la física nuclear y de partículas (también llamada física subnuclear) que proporciona el método más corriente de obtener información relativa alosnúcleos que componen la materia (tamaño, forma, niveles energéticos, etc.) yademás permite profundizar en las propiedades de las propias partículas.

Cualquier experimento en física nuclear o subnuclear, generalmente tiene por objetivo el estudio de reacciones entre partículas o núcleos y en otros casos estudia la desintegración de las partículas o núcleos. Se comprende así que, en todo experimento, existen tres componentes: una fuente de partículas, un blanco material (del que se conoce su composición atómica y nuclear) y un detector de partículas.

Los tres tipos de fuentes de partículas (o de radiación) disponibles son:

- la radiactividad (natural o artificial),
- la radiación cósmica (natural),
- los aceleradores de partículas (artificial).

Sin embargo, cuando se utiliza la expresión de 'Interacción de las partículas con la materia' se acostumbra a designar aquellos fenómenos electromagnéticos que están ligados al funcionamiento de los detectores de partículas (éstos, se estudiarán en el próximo tema). Por eso, se recogen en este tema los fenómenos más importantes que sufren las partículas cargadas y los fotones al atravesar la materia.

El principio de funcionamiento de un detector es sencillo: una partícula cargada al atravesar el material del detector, ioniza el medio (además de producir excitaciones), pierde energía y como consecuencia da una señal observable y accesible al observador. En el caso de los fotones, se verá que su interacción con la materia produce electrones (o pares electrón-positrón) que son fácilmente detectables. En ambos casos, se trata de interacciones de naturaleza electromagnética. Pero uno de los conceptos más importantes de la física nuclear y de partículas es el de *sección eficaz*. Merece que se le dedique una atención particular; por ello, a continuación se aborda este concepto. También se presentan varias curvas de secciones eficaces que ilustran el estado actual de conocimientos en el campo de las reacciones entre partículas. Por su especial interés, se han introducido también secciones eficaces de procesos de interacción fuerte y débil, que aunque tienen menos impacto en el funcionamiento general de los detectores, deben ser conocidas.

5.2 El concepto de sección eficaz

La sección eficaz está relacionada con la probabilidad de interacción de una partícula con un blanco.

El esquema presentado en la figura 5.1, muestra un experimento típico de colisión entre partículas. Puede observarse cómo las partículas incidentes (proyectiles tipo a cuyo flujo es F [$cm^{-2}s^{-1}$]) inciden contra un blanco material X cuya densidad de blancos por unidad de volumen es n [cm^{-3}]. Dado un material de densidad ρ, es fácil calcular el número de átomos (o núcleos) por unidad de volumen:

$$n = \rho \frac{\mathcal{N}_A}{A'} \tag{5.1}$$

siendo N_A el número de Avogadro, que da el número de átomos por mol y A' el peso atómico del material que compone el blanco (en gramos por mol). No hay que confundir A' con el número másico.

En lo que sigue, se supondrá que el espesor del blanco Δx es muy delgado. El detector subtiende un ángulo sólido $d\Omega = d\Sigma/R^2$, siendo $d\Sigma$ la superficie útil del detector.

El haz de partículas siempre suele tener un tamaño finito; en un corte transversal del haz se supone que ocupa una superficie S. De esta forma el número total de partículas incidentes por unidad de tiempo será $N_{inc} = FS$. Como consecuencia del choque, la partícula incidente ya no sigue su dirección original (el eje x), sino que es difundida y sale formando un ángulo θ tal que puede incidir en el detector con lo que podrá producirse un registro en el mismo.

Sea $N_s(\theta)$ el número de difusiones por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ que subtiende el detector. Se define la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F}\frac{dN_s}{d\Omega}$$

en donde F [$cm^{-2}s^{-1}$] es el flujo de partículas incidentes como ya se ha visto anteriormente. Con ello la sección eficaz total es sencillamente la integral

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

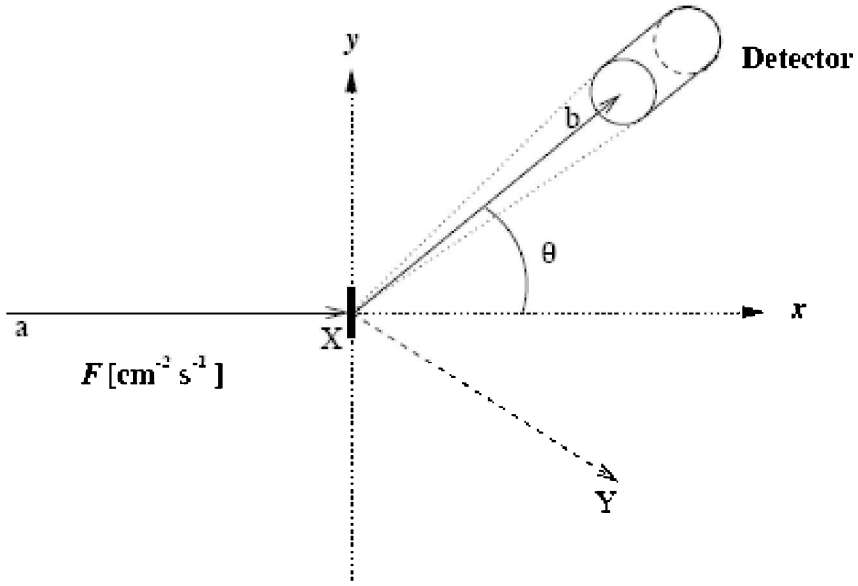


Figura 5.1: Experimento de colisión entre partículas $a + X \rightarrow b + Y$.

Ahora bien, al integrar N_s para todo el ángulo sólido se obtiene N_{tot}, es decir el número total de partículas difundidas por unidad de tiempo. Como $SnΔ\ x$ es el número de blancos en un material de espesor $Δx$, siendo n la densidad volúmica de blancos, se tiene

$$N_{tot} = FSn\sigma\Delta x = N_{inc}n\sigma\Delta x$$

de forma que se puede definir la probabilidad de interacción de una partícula en un material de espesor $Δ\ x$ como:

$$\boxed{\frac{N_{tot}}{N_{inc}} = n\sigma\Delta x} \qquad (5.2)$$

con lo que el concepto de sección eficaz es realmente el de la probabilidad de interacción por proyectil y por blanco.

La unidad de sección eficaz es el barn (= 10^{-24} cm^2), que tiene dimensión de superficie, aunque en física nuclear y sobre todo en física

de partículas es mucho más frecuente obtener valores de sección eficaz dadas en los submúltiplos *mili-*, *micro-*, *nano-* e incluso *pico-* o *femto-barn* (véase la tabla de múltiplos en el Apéndice B).

El tipo de reacciones que se detecta, o sea la manera de seleccionar experimentalmente N_s, determina la cantidad que se mide. Si N_s, por ejemplo, cuenta el número de partículas idénticas a las incidentes y el núcleo difundido es también del mismo tipo que el blanco entonces se trata de la sección eficaz elástica. Caso contrario, se trata de secciones eficaces inelásticas.

La sección eficaz geométrica vendría dada por $\sigma = \pi R^2$, que iría aumentando con el tamaño del núcleo. Los núcleos tienen tamaños dados por un radio $R \sim 2 - 7$ fm con lo que se tiene $\sigma \sim 12 - 150$ fm^2. Por ello se eligió el barn (= 100 fm^2 = 10^{-28} m^2), como unidad de sección eficaz. Se puede también calcular la probabilidad de supervivencia del proyectil. Para ello hay que calcular la probabilidad de que no haya interacción a lo largo de un recorrido x, o sea, hay que resolver $P(x + dx) = P(x)(1 - n\sigma dx)$, lo que conduce a:

$$P(x) = e^{-n\sigma x} \tag{5.3}$$

O sea, en el caso de un haz de N_0 partículas que inciden en un material de espesor x, la ley de atenuación vendrá dada por:

$$N = N_0 e^{-n\sigma x}$$

De la misma manera se puede calcular la probabilidad de sobrevivir hasta x e interaccionar entre x y $x + dx$:

$$F(x)dx = P(x)n\sigma dx$$

Otra magnitud estadística muy importante es el recorrido libre medio:

$$\boxed{\lambda = \frac{\int xP(x)dx}{\int P(x)dx} = \frac{1}{n\sigma}} \tag{5.4}$$

que representa la longitud media recorrida por la partícula antes de sufrir una colisión. Se suele escribir también $P(x) = e^{-x/\lambda} = e^{-\mu x}$, siendo $\mu = n\sigma$ el coeficiente de absorción.

Ejemplo: la sección eficaz de Thomson (colisión elástica clásica entre un fotón yunelectrón $\gamma + \mathrm{e} \rightarrow \gamma + \mathrm{e}$) vale:

$$\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_{\mathrm{e}}^2 = 0,67 \text{ barn} \tag{5.5}$$

siendo $r_{\mathrm{e}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\mathrm{e}} c^2} = 2,82$, el radio clásico del electrón, y e = 1,6 $\times 10^{-19}$C, la carga del electrón. Se llama radio clásico del electrón porque representa el radio (esférico) del electrón cuya energía potencial electrostática $U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\mathrm{e}}} = m_{\mathrm{e}} c^2$ es igual a su masa.

A partir de las definiciones de los distintos tipos de sección eficaz, se pueden calcular las longitudes (recorridos libres medios) de colisión y de absorción:

$$\lambda_{\mathrm{T}} = \frac{1}{n\sigma_{\mathrm{T}}} \qquad\qquad \lambda_{\mathrm{I}} = \frac{1}{n\sigma_{\mathrm{I}}}$$

Una recopilación de valores de estas magnitudes a alta energía se puede ver en la tabla J.1 en el apéndice correspondiente.

5.2.1 Sección eficaz de difusión en física clásica

Una colisión en física clásica suele representarse utilizando el parámetro de impacto b (véase figura 5.2). La sección eficaz diferencial en función del parámetro de impacto es $d\sigma = b\ db\ d\varphi$ y como el elemento de ángulo sólido es $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, se tiene para la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \qquad (5.6)$$

El valor absoluto se introduce para evitar el signo en elúltimo término.

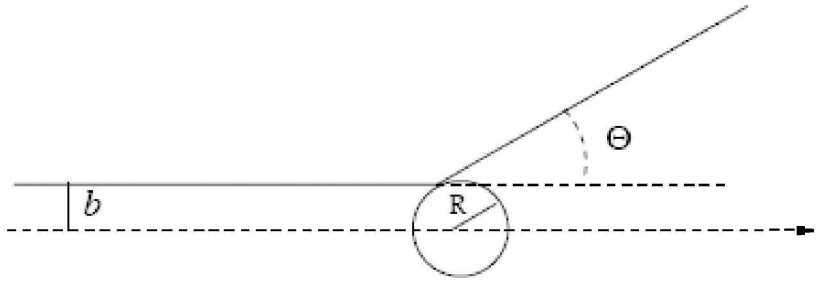


Figura 5.2: Parámetro de impacto b yángulo de difusión θ.

Ejemplo: Difusión clásica de un proyectil con una esfera de radio R. Se cumple que $b = R\cos\frac{\theta}{2}$. Así pues la sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$, no depende del ángulo θ, y la sección eficaz total es $\sigma = \pi R^2$. Se observa que clásicamente, la sección eficaz coincide con la sección del blanco vista por el proyectil.

5.2.2 Sección eficaz de difusión en física cuántica

Una partícula moviéndose según el eje z, con un momento $p = \hbar k$, tiene una energía cinética $T = p^2/(2m)$ y un número de ondas $k = \sqrt{2mT}/\hbar$. Puede representarse por una onda plana entrante Ψ_{in} =

Ce^{ikz}, siendo C una constante. Después de la interacción (que se describe con un potencial), la onda resultante será una onda esférica que puede escribirse $\Psi_{out} = Cf(\theta,\phi)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$. El efecto del potencial está representado por la llamada amplitud de difusión $f(\theta, \varphi)$, que representa la amplitud de probabilidad de difusión en θ y φ. La función de ondas de Schrödinger será de la forma $\Psi(r,\theta,\phi) \approx C(e^{ikz} + f(\theta,\phi)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r})$ para valores grandes de r (véase figura 5.3). El significado de la amplitud de difusión puede obtenerse igualando la probabilidad de encontrar la partícula antes ydespués de la colisión: $dP = |\Psi_{in}|^2 dV = |C|^2(vdt)d\sigma$ y $dP = |\Psi_{out}|^2 dV = \frac{|C|^2 f^2}{r^2}(vdt)r^2 d\Omega$ dando:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2} \qquad (5.7)$$

Esta última expresión muestra la relación entre la sección eficaz diferencial que se mide experimentalmente y la amplitud de difusión que se obtiene teóricamente resolviendo la ecuación de Schrödinger.

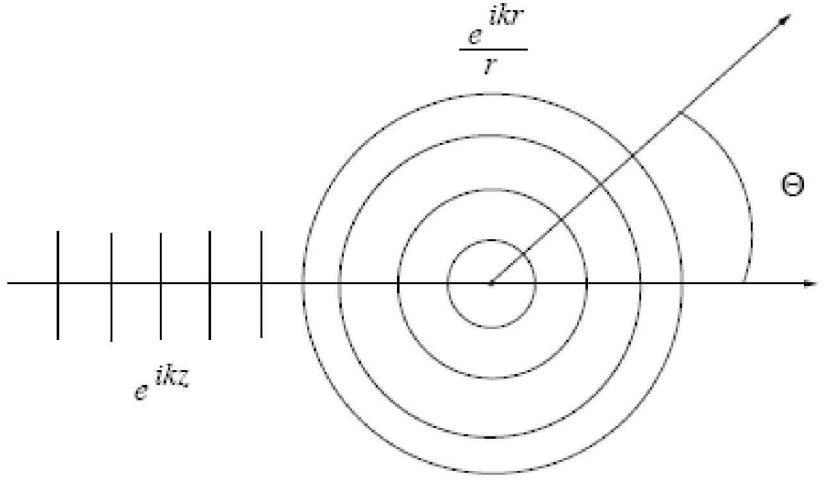


Figura 5.3: Interpretación ondulatoria de una colisión de una partícula por un potencial; la onda plana incidente e^{ikz} y la onda esférica resultante $\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$.

El cálculo teórico de la amplitud de difusión puede realizarse utilizando la aproximación de Born. En efecto, la ecuación de Schrödinger para la difusión de una partícula por un potencial *V* se escribe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi$$

e introduciendo $Q = \frac{2m}{\hbar^2}V\Psi$ se puede reescribir:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = Q$$

que en el caso $Q = 0$ es la llamada ecuación de Helmholz, en cuyo caso la solución coincide con la función de ondas de una partícula libre, Ψ_0. Se suele utilizar la función de Green, $G(r)$, solución de la anterior ecuación pero con una función delta en el origen,

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \delta^3(r)$$

Esta ecuación tiene por solución:

$$G(\vec{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

La función de Green permite redefinir la ecuación de ondas a través de una integral $\Psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0)Q(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0$, así que añadiendo una solución de la ecuación homogénea, $\Psi_0(\vec{r})$, se llega a la solución general de la ecuación de Schrödinger:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0)\Psi(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0 \qquad (5.8)$$

que ahora toma la forma de una ecuación integral. La amplitud de difusión se obtiene al suponer que el potencial está en el origen y que a grandes distancias ($r \gg r_0$) la onda incidente es una onda plana $\Psi_0(\vec{r}) = Ce^{ikz}$ y la exponencial en el interior de la integral se simplifica, de forma que:

$$\Psi(\vec{r}) = Ce^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0)\Psi(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0$$

luego se puede escribir:

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 C}\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0)\Psi(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0 \qquad (5.9)$$

Puede resolverse iterativamente. La primera aproximación de Born supone que el potencial es débil y se puede sustituir $\Psi(\vec{r}_0) \approx \Psi_0(\vec{r}_0) = Ce^{ikz_0} = Ce^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}$ con $\vec{k}' = k\hat{z}$. Se introduce el momento transferido en la colisión $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ (véase la figura 5.4) con lo que la dependencia angular de la amplitud de difusión viene dada por $q = 2k\sin(\theta/2)$. Queda pues,

$$\boxed{f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0} \qquad (5.10)$$

y por lo tanto en la aproximación de Born, la amplitud de difusión es la transformada de Fourier del potencial.

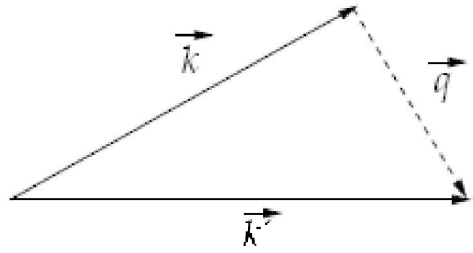


Figura 5.4: La definición del momento transferido $\vec{q}$ en la aproximación de Born.

Muchos potenciales presentan simetría esférica con lo que la amplitud de difusión es más sencilla: $f(\theta)$ ya que no depende de φ y al integrar queda:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int rV(r)\sin(qr)dr \qquad (5.11)$$

Otra simplificación muy útil es para bajas energías, en donde se cumple $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_0} \sim 1$, y la aproximación de Born queda:

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0 \qquad (5.12)$$

Ejemplos: 1) Difusión con una esfera de radio *a* (llamada débil porque el potencial es finito). O sea $V(r) = V_0$ si $r \leq a$ y $V(r) = 0$ para $r > a$.

Se aplica directamente la expresión de difusión a baja energía, quedando

$$f(\theta,\phi) = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \qquad (5.13)$$

La sección eficaz diferencial no de penderá de los ángulos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2 \tag{5.14}$$

y tras integrar, la sección eficaz total es $\sigma = 4\pi \left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2$. 2)

Cálculo de la sección eficaz con un potencial de Yukawa, como el de la ecuación (15.22), que es simétricamente esférico, $V(r) = \beta\frac{e^{-\mu r}}{r}$, y conduce a una amplitud de difusión,

$$f(\theta) = -\frac{2m\beta}{q\hbar^2}\int_0^\infty e^{-\mu r}\sin(qr)dr = -\frac{2m\beta}{\hbar^2(q^2+\mu^2)} \tag{5.15}$$

5.2.3 Sección eficaz utilizando la regla de oro de Fermi

Teóricamente las secciones eficaces también se calculan utilizando la regla de oro de Fermi, que se obtiene en teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, da la probabilidad de interacción (transición del estado $i \to f$) por unidad de tiempo:

$$\boxed{\lambda_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \mid \langle f|H'|i\rangle \mid^2 \rho(E_f)} \tag{5.16}$$

a partir del elemento de matriz del hamiltoniano de interacción H'_{fi} y la densidad de estados finales $\rho(E_f)$. La sección eficaz se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$\boxed{\sigma_{i\to f} = \frac{\lambda_{i\to f}}{F}} \tag{5.17}$$

siendo F el flujo de partículas incidentes (en cm^{-2} s^{-1}, con lo que la sección eficaz tiene unidades de superficie).

En el caso de la colisión $a + X \rightarrow b + Y$,

$$\sigma_{a\rightarrow b} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \mid \langle H'_{fi} \rangle \mid^2 \frac{p_b^2}{v_a v_b} \qquad (5.18)$$

que podría haberse escrito también $\sigma_{X\rightarrow Y}$. Las variables p_b, v_a y v_b vienen dadas todas ellas en el centro de masas. Salvo constantes, representan el espacio fásico disponible en el estado final de la reacción, $\rho(E_f) = \frac{dN_b}{dE}$, como de costumbre. El término $\langle H'_{fi} \rangle$ es el elemento de matriz del hamiltoniano responsable de la interacción estudiada.

Si se aplica la expresión (5.18) a las reacciones con neutrones incidentes, por ejemplo, se tienen las siguientes propiedades:

1) en la difusión elástica, reacción de tipo (n, n): $v_a = v_b = p/m_n$, con lo que σ es independiente de la energía,

2) en la producción de partículas α; reacción de tipo (n, α): p_b y v_b son independientes de v_a, con lo que

$$\sigma \propto \frac{1}{v_a}$$

o sea, inversamente proporcional a la velocidad del neutrón incidente. También es aplicable a otros proyectiles como se verá por ejemplo en el estudio de la fusión nuclear.

Para ilustrar el concepto de sección eficaz, se han escogido una serie de procesos representativos de las interacciones entre partículas (ya sean hadrones, fotones, leptones), bien conocidos, que permiten realizar una comparación de los diversos valores que toma esta magnitud para cada una de las interacciones conocidas.

5.2.4 Secciones eficaces de interacción fuerte

La sección eficaz neutrón+protón a baja energía es muy bien conocida. Su característica más importante es que es prácticamente constante en un amplio rango de energías: σ = 20 barn, entre T_n = 1 y 10^4 eV, como puede comprobarse en la figura 5.5, que ya se ha visto en el tema en el que se estudia el deuterón. Esta sección eficaz ha sido de gran valor histórico pues permitió comprender las propiedades de la interacción fuerte. La ventaja de su estudio es que como el neutrón no tiene carga, no sufre interacción electromagnética (o culombiana). Las secciones eficaces de proyectiles cargados a muy baja energía están dominadas por la interacción culombiana y deben de tenerse en cuenta hasta que la energía del proyectil es suficientemente grande de forma que sólo interviene la interacción fuerte. Esto se apreciará en las próximas curvas.

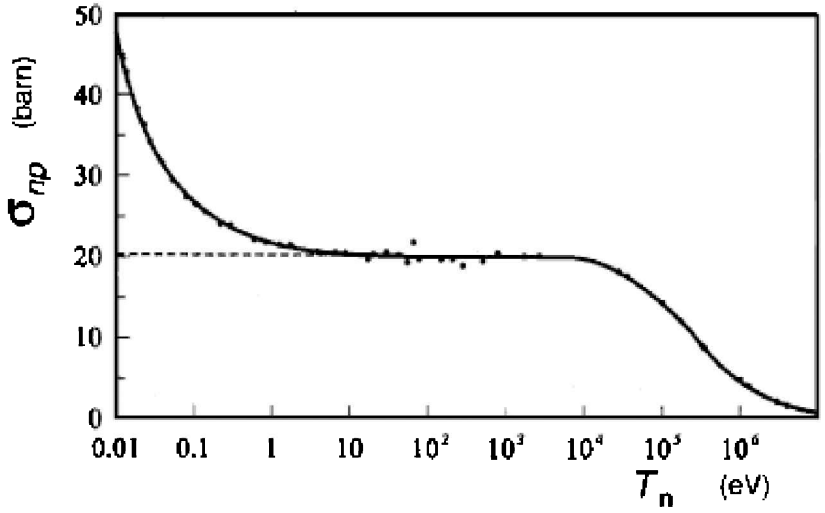


Figura 5.5: Curva de sección eficaz de difusión n+p en función de la energía cinética del neutrón, en eV.

Los experimentos con aceleradores de partículas han permitido medir las secciones eficaces más elementales. En la figura 5.6 pueden verse las secciones eficaces totales partícula (antipartícula) + protón, es decir, $p(\bar{p}) + p$; $\pi^+(\pi^-) +$ p; $K^+(K^-)$ + p. Estas secciones eficaces pueden parametrizarse, siguiendo las ideas de la teoría de Regge (en la que las

interacciones proceden mediante el intercambio de trayectorias de Regge) y de la matriz S, mediante expresiones en función de la energía total en el cdm, $\sqrt{s}$ del tipo

$$\sigma^{ab} = A + B\log^2(s/s_0) + C(s_1/s)^{\eta_1} \mp D(s_1/s)^{-\eta_2}$$

siendo *A*, *B*, *C*, *D*, constantes que dependen del tipo de hadrones, s_0, s_1 escalas de energía (se toma s_1 = 1 GeV) y el signo $\mp$ se aplica según que *a* sea la partícula o su antipartícula. La tabla de partículas (*Review of Particle Physics*, Particle Data Group, *Phys. Lett.*, B592 (2004) 1-1109; véase también su página Web http://pdg.lbl.gov/) contiene los parámetros y tablas para todas las reacciones conocidas.

De la observación de las curvas de la figura 5.6 se constata que:

a) excepto en el caso K^+ + p, las secciones eficaces disminuyen con la energía incidente, hasta unos 100 GeV/c, en donde las secciones eficaces toman valores entre 20 y 40 mb. A partir de esta energía, aumentan logarítmicamente con la energía total en el cdm, *s*, lo que se asocia con el mecanismo de intercambio del *Pomerón*[1] y

b) las secciones eficaces partícula y antipartícula tienden a igualarse a gran energía. Sucede que cuando la partícula es negativa tiene una sección eficaz ligeramente superior respecto a su compañera positiva.

Por otra parte, la figura 5.7 muestra con más detalle, pero en escala logarítmica, las secciones eficaces protón+protón total y elástica. Esta última desciende en función de la energía hasta los 100 GeV/c y mantiene un valor aproximado igual al 16 % de la sección eficaz total.

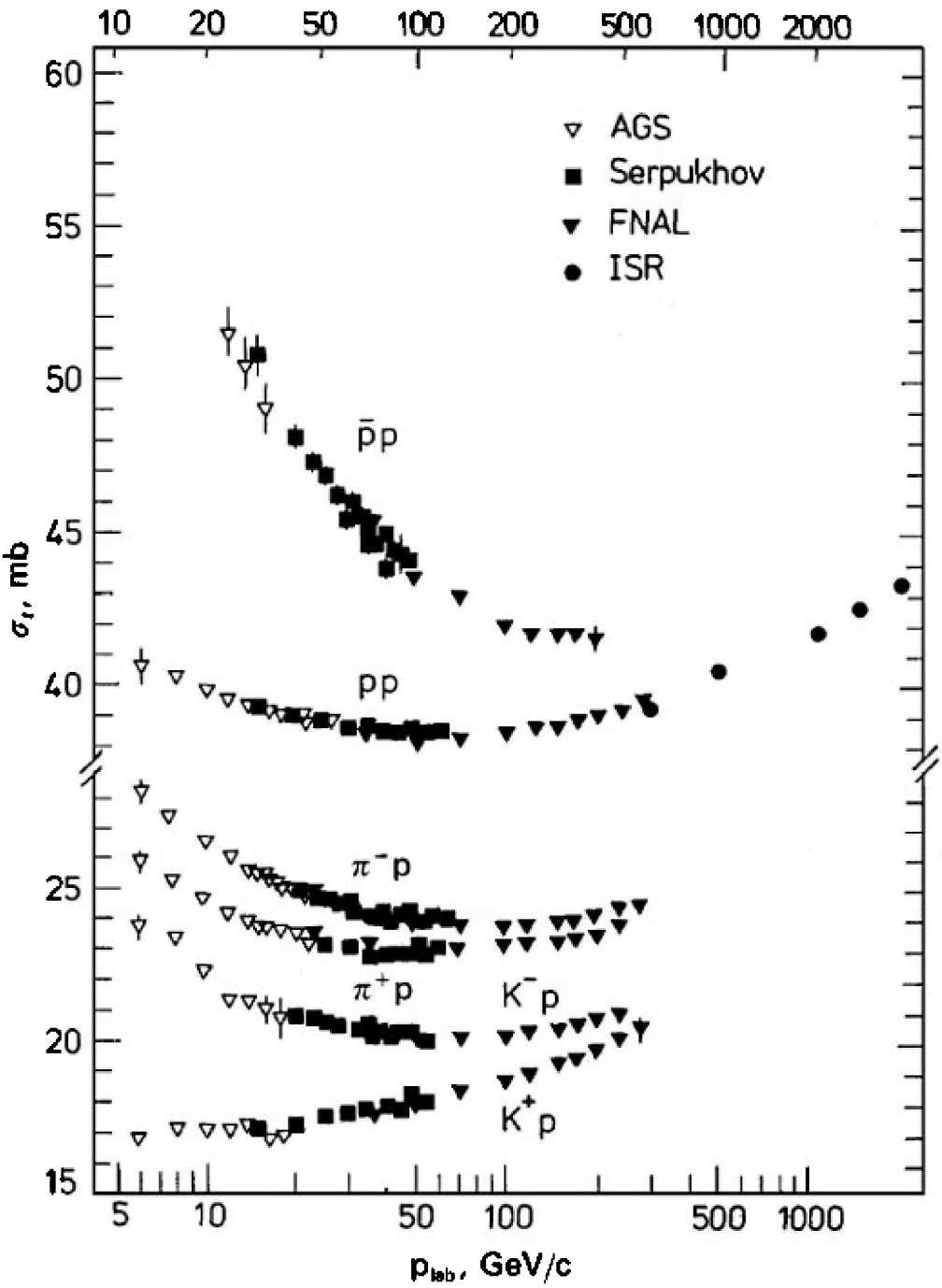


Figura 5.6: Sección eficaz total, σ_t, partícula (antipartícula) + protón. En el eje de abscisas, abajo, la escala da el momento del proyectil en el sistema laboratorio; arriba, la energía total en el cdm, $\sqrt{s}$. Fuente de secciones

eficaces: tablas del Particle Data Group (http://pdg.lbl.gov/).

También se conocen las secciones eficaces pión + protón y kaón + protón, tal como se muestra en la figura 5.8. En este caso, se observa con mayor nitidez las estructuras que aparecen entre 1 y 2 GeV de energía en el centro de masas y que corresponden a la producción de resonancias en la zona de baja energía. Estas resonancias están bien identificadas; corresponden a hadrones, partículas compuestas por quarks y cuya naturaleza es similar a la de los nucleones (bariones).

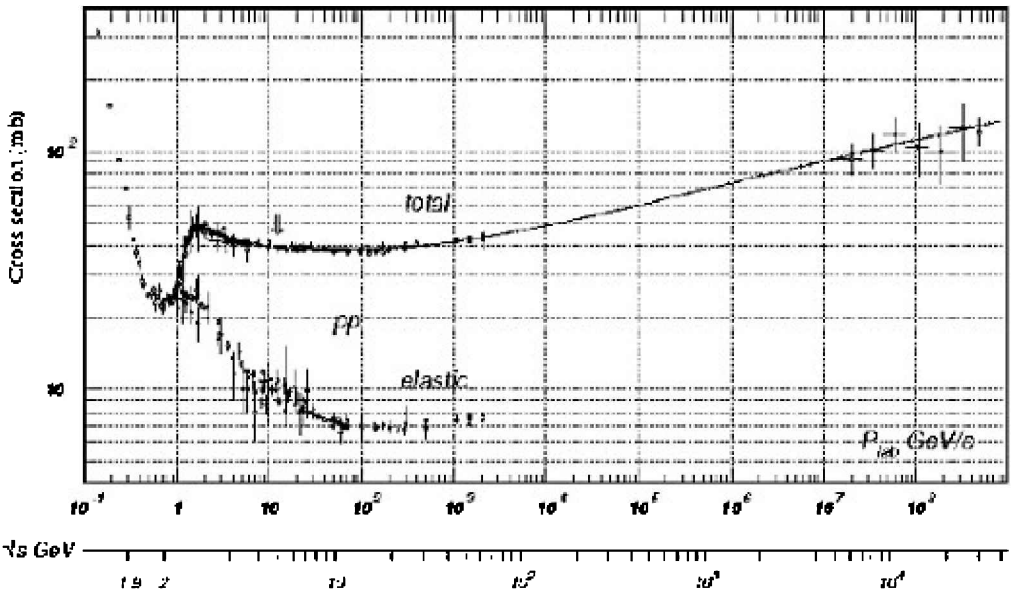


Figura 5.7: Sección eficaz total y elástica protón + protón.

Las secciones eficaces determinan el ritmo de colisiones I, a partir del ritmo de partículas incidentes del haz I_0;

$$I = I_0 \left(\frac{\rho N_A x}{A} \right) \sigma_T$$

siendo ρ, x y A la densidad, el espesor y el peso atómico del material que compone el blanco. Así, el recorrido libre medio de colisión se calcula

$\ell_{col} = A/(\rho N_A \sigma_T)$.

Cuando se trata de blancos nucleares, la sección eficaz geométrica puede estimarse a partir de $\sigma = \pi r_n^2$, tomando para los núcleos la expresión conocida de su radio: $r_n = r_0 A^{1/3}$. Esta sección eficaz representa muy bien las medidas de la absorción nuclear. O sea, parametrizando $\sigma = \sigma_0 A^{\alpha}$, el mejor ajuste a los datos experimentales da σ_0 = 41, 2 mb y α = 0, 711. Puede comprobarse que este exponente se aproxima bien a la forma del radio nuclear que se ha tomado.

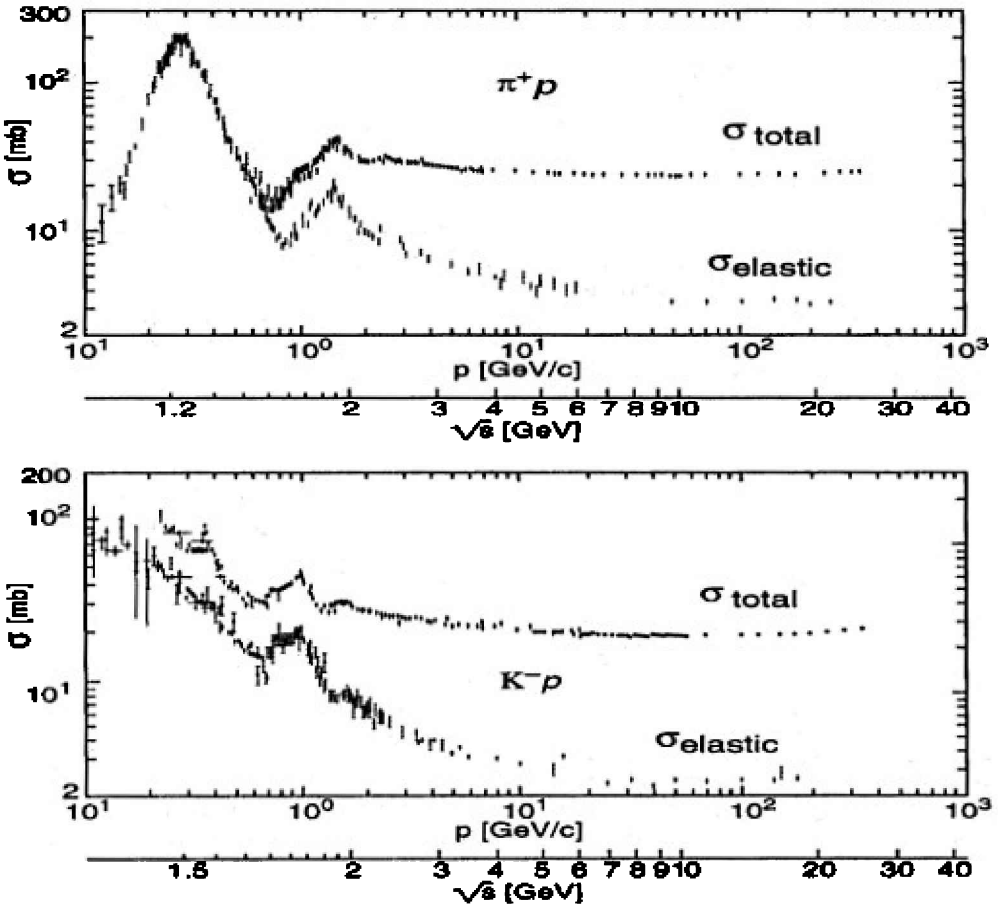


Figura 5.8: Secciones eficaces total y elástica para las colisiones π^+ + p y K^- + p. $\sqrt{s}$ es la energía total en el cdm.

5.2.5 Secciones eficaces de interacción débil

La interacción débil es unos 11 órdenes de magnitud más pequeña que la interacción fuerte, a energías del orden del GeV. A estas energías, las interacciones de neutrinos se interpretan (abusivamente) como colisiones elásticas con los nucleones; así, si un haz de neutrinos incide en blancos nucleares se identifica la interacción por la producción de un μ^- en el estado final: $\nu_\mu + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mu^-$ y si el haz es de antineutrinos, entonces se produce un μ^+ en el estado final: $\overline{\nu}_\mu + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \mu^+$. Se denominan *corrientes cargadas* porque en ambas reacciones se intercambia un bosón cargado. Las colisiones con nucleones tienen una energía umbral de unos 112 MeV. Según el modelo de partones, la interacción tiene lugar sobre los quarks q = u, d. Además de corrientes cargadas, existirán colisiones elásticas de tipo *corriente neutra*: $\nu_\mu + q \rightarrow \nu_\mu + q$ y $\overline{\nu}_\mu + q \rightarrow \overline{\nu}_\mu + q$. En la figura 18.11, del capítulo donde se estudian las interacciones débiles, se puede observar que las secciones eficaces de colisión de neutrinos y de antineutrinos con los nucleones crecen linealmente con la energía en un amplio rango. En efecto, según la teoría V-A la sección eficaz para corrientes cargadas de neutrinos y de antineutrinos es, respectivamente:

$$\sigma_{\nu_\mu} = \frac{G^2}{\pi(\hbar c)^4} s \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\overline{\nu}_\mu} = \frac{G^2}{3\pi(\hbar c)^4} s \tag{5.19}$$

con $s = 2m_e c^2 E_\nu$, la energía al cuadrado en el centro de masas. Si se representa $\sigma_{\nu\mu}/E_{\nu\mu}$ se obtendrá una constante como en la figura.

De estos resultados se desprende que los nucleones están compuestos por entes puntuales (los partones), con los que colisionan los neutrinos. La teoría VA predice que las interacciones de antineutrinos (por corriente cargada) son un factor 3 más pequeñas que las del neutrino. La figura 18.11 muestra las secciones eficaces de interacción de los neutrinos y antineutrinos obtenidos en aceleradores. Puede comprobarse en dicha

figura, que experimentalmente el cociente entre las secciones eficaces de neutrino y antineutrino sobre nucleones es sólo 2, ya que se incluyen también corrientes neutras. El cálculo teórico confirma este resultado. En todo caso, se observa que el valor de las secciones eficaces es muy pequeño.

5.2.6 Secciones eficaces de interacción electromagnética

La disponibilidad de haces secundarios de fotones ha permitido medir las secciones eficaces de fotoproducción de hadrones (o sea la producción de hadrones tras el choque de un fotón contra un protón o un deuterón). Un haz etiquetado de fotones se consigue a partir de un haz de electrones extraido de un acelerador (véase figura 5.9).

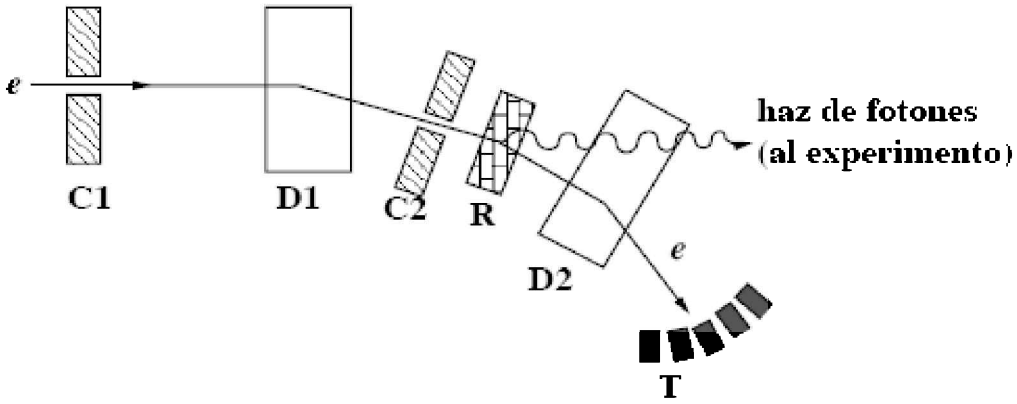


Figura 5.9: Elementos de un haz secundario de fotones, con sistema de etiquetado; (D1, D2) imanes dipolares; (C1, C2) colimadores; (R) material radiador; (T) detectores de electrones para etiquetar los fotones.

El haz se colima mediante colimadores y se selecciona en momento con imanes dipolares. Al pasar por un radiador (normalmente un blanco de plomo), los electrones emiten fotones por *bremsstrahlung* que inciden en el experimento. El electrón difundido se detecta en los contadores de etiquetado (*tagger*): conociendo el contador, se conoce la cinemática del

proceso y por lo tanto el momento del fotón. Este es el principio utilizado en los experimentos WA4 y NA14 del CERN.

La figura 5.10 presenta las secciones eficaces fotón+protón y fotón+deuterón. Son práctimente constantes y su valor es de unos 100 μ b para γ + p hasta energías de unos 20 GeV, es decir dos órdenes de magnitud inferior que la sección eficaz de interacción entre hadrones. Esta es una propiedad del fotón que recuerda que, en cierta manera, se acopla como un bosón vectorial y tiene una probabilidad de comportarse como un hadrón (bosón con espín paridad 1^-).

Medidas más recientes conciernen resultados de la aniquilación en colisionadores e^+e^- o $p\bar{p}$. Los primeros han servido para comprobar la teoría QED (intercambio de fotón) y la teoría electrodébil (intercambio de *Z*). Así la figura 17.15, en el tema dedicado al estudio de la espectroscopía de hadrones, muestra los resultados obtenidos con el colisionador PETRA de DESY (Hamburgo) en los años 1980, y se observa el buen acuerdo con la predicción teórica ($\sigma = 4\pi\alpha^2/(3s)$).

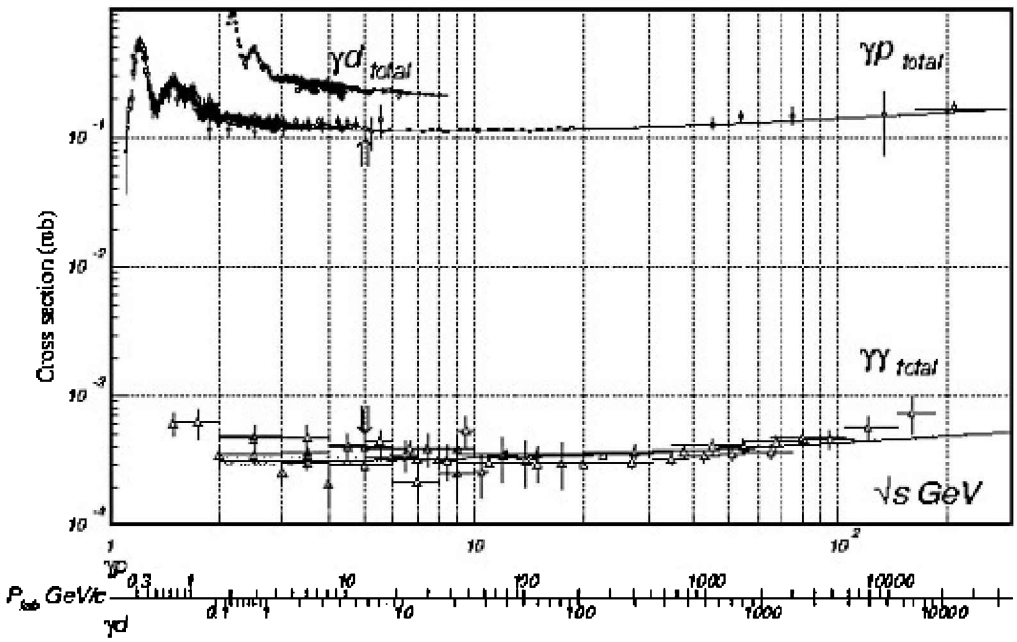


Figura 5.10: Curva de sección eficaz del proceso γ + γ, así como de la fotoproducción de hadrones sobre protón γ + p y sobre deuterio γ + d en

función de la energía del fotón, en GeV.

5.3 Interacción de partículas cargadas con la materia

El funcionamiento de los detectores de partículas explota generalmente fenómenos electromagnéticos; es decir, está basado en el conocimiento de la interacción electromagnética de las partículas cargadas con el material (gas, líquido o sólido) que compone el propio detector. Uno de los fenómenos más frecuentes es el de la ionización, en el que la energía perdida por la partícula es utilizada para arrancar electrones de los átomos (ionizar) de la materia.

La interacción electromagnética es la más probable de las interacciones, aunque no es la más intensa. Su alcance es infinito y la sección eficaz de ionización es del orden de 10^{-16} a 10^{-17} cm^2, o sea ¡entre 10^7 y 10^8 barn! Para el estándar de secciones eficaces nucleares estos valores son gigantescos.

Los fenómenos producidos por el paso de partículas cargadas a través de la materia suelen clasificarse según la masa del proyectil en:

partículas cargadas masivas
- **colisiones con e^-: pérdida de energía**
- **colisiones con núcleos: cambio de dirección**

partículas cargadas ligeras ($e^{\pm}$)
- **colisiones con e^-: pérdida de energía**
- **colisiones con núcleos: cambio de dirección**
- ***bremsstrahlung*: emisión de radiación gamma**

Las partículas neutras no tienen interacción electromagnética (exceptuando el fotón, que aunque tiene carga nula, es el mediador del campo electromagnético con lo que tiene interacción electromagnética) y, por lo tanto, puede suceder que atraviesen un detector sin dejar ninguna señal observable. En particular no ionizan. La detección de las

partículas neutras se realiza indirectamente gracias a que sufren otros tipos de interacción que dan lugar en el estado final a la aparición de partículas cargadas.

He aquí tres casos frecuentes ilustrados con ejemplos del tipo de interacción de partículas neutras:

ión de particulas neutras:

fotones (γ)	interacción electromagnética; a través de los fenómenos: efecto fotoeléctrico, efecto Compton, creación de pares
neutrones (n)	interacción fuerte; por ejemplo: $n + p \rightarrow n + p$ (elástica)
neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ)	interacción débil; ejemplo: $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$

que producen secundarios cargados, y que una vez detectados, permiten calcular las magnitudes físicas de las partículas neutras.

El objetivo de este capítulo será pues abordar de una manera completa los fenómenos más frecuentes que se producen cuando las partículas atraviesan la materia, de forma que puedan utilizarse las señales inducidas en los detectores.

La electrodinámica cuántica (abreviadamente QED) es la teoría que describe la interacción electromagnética entre partículas cargadas. En ella, la magnitud física que entra en juego es la carga eléctrica. La interacción se describe mediante el intercambio de fotones, partícula *gauge* de la propia teoría QED, invariante *gauge* (véase la Sección 15.4, más adelante). Será la interacción entre la carga de la partícula y los átomos del detector (electrones o núcleos) la que dará una señal observable. La forma de la señal dependerá del tipo de detector que se utilice.

5.4 Interacción partícula-átomo

La interacción partícula-átomo puede visualizarse gracias al parámetro de impacto, *b*, que clásicamente se utiliza para medir la distancia entre la trayectoria del proyectil y el blanco (véase figura 5.11) y que corresponde cuánticamente al momento transferido en la colisión. El tipo de interacción queda identificado si se compara el parámetro de impacto con el radio medio de la órbita de un electrón atómico, r_e. Si $b > r_e$ entonces es muy probable que el electrón del átomo quede excitado. En el caso en que $b \approx r_e$ se produce una colisión de la partícula con el e^-; el e^- puede ser arrancado y hay ionización. Por último, si $b < r_e$ se produce una difusión culombiana; es decir, una interacción con la carga del núcleo.

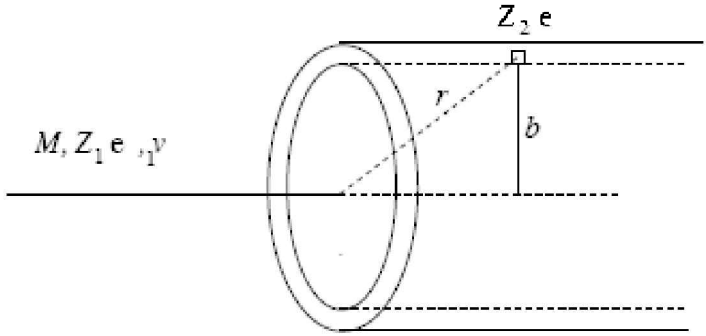


Figura 5.11: Parámetro de impacto *b*.

Ya se ha visto anteriormente que la interacción de una partícula cargada con los átomos dará lugar a dos fenómenos distintos:

- pérdida de energía por ionización y excitación (colisiones con e^-), o
- cambio de dirección (difusiones elásticas con núcleos).

El primero de estos fenómenos viene descrito por la fórmula de Bethe-Bloch, asociándose prácticamente a las colisiones con los electrones del medio y el segundo por la ecuación de Rutherford, que explica las

colisiones (cambios de dirección) con los núcleos. Se verá a continuación la pérdida de energía debida a la ionización del medio atravesado por la partícula.

5.5 La fórmula de Bethe-Bloch

Una partícula cargada, moderadamente relativista, pierde energía en la materia principalmente por ionización. Para ilustrar el fenómeno de pérdida de energía es muy apropiado seguir el cálculo clásico de Bohr.

Sea una partícula masiva, con masa $M > m_e$, velocidad v y carga Z_1e. Incide sobre un átomo de un material (cuyo número atómico del núcleo es Z_2) y el parámetro de impacto es b. La figura 5.11 anterior muestra el convenio de carga del proyectil Z_1 e y blanco Z_2e. Se supondrá de momento que la colisión tiene lugar sobre un electrón atómico, que en primera aproximación se trata como si estuviera libre. La energía cinética T_e transferida en la colisión es:

$$T_e = \frac{p^2}{2m_e}$$

siendo p el momento transferido

$$p = \int F dt = Z_2 e \int \mathcal{E}_\perp dt = Z_2 e \int \mathcal{E}_\perp \frac{dx}{v}$$

donde para el electrón Z_2 = 1. Sólo interviene, por simetría, la componente perpendicular del campo eléctrico $(\mathcal{E}_\perp)$ a la trayectoria de la partícula. Aplicando el teorema de Gauss tomando la superficie infinita del cilindro que contiene al electrón, se cumple:

$$\int \mathcal{E}_\perp 2\pi b dx = 4\pi Z_1 e \qquad \text{con lo que} \qquad p = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{bv}$$

dando lugar a:

$$\boxed{T_{\mathrm{e}}(b) = \frac{2Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m_{\mathrm{e}} v^2 b^2}} \qquad (5.20)$$

Conviene ahora comparar la pérdida de energía por colisiones con electrones y con núcleos de masa M_n:

$$\frac{Z_2 T_{\mathrm{e}}}{T_N} = \frac{Z_2/m_{\mathrm{e}}}{Z_2^2/(2Z_2 m_{\mathrm{p}})} \approx 4000 \qquad (5.21)$$

ya que $M_n \sim 2Z_2 m_{\mathrm{p}}$ y la dependencia con la carga en el caso del núcleo es $Z^2{}_2$. Se concluye pues que la pérdida de energía es debida a las colisiones con los electrones del medio. Teniendo en cuenta a todos los electrones en el volumen $dV = 2\,\pi b\,db\,dx$ en la expresión (5.20), queda:

$$-dE(b) = T_{\mathrm{e}}(b) n_{\mathrm{e}} dV = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_{\mathrm{e}} v^2} n_{\mathrm{e}} \frac{db}{b} dx$$

donde $n_{\mathrm{e}} = Z_2 \frac{\rho \mathcal{N}_A}{A}$ es el número de electrones por unidad de volumen (N_A es el número de Avogadro, ρ la densidad y A es el peso atómico del material), con lo que queda:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_{\mathrm{e}} v^2} n_{\mathrm{e}} \ln \frac{b_{\max}}{b_{min}}$$

habiendo realizado la integral sobre el parámetro de impacto entre los valores que tienen sentido físico; o sea, escribiendo $\beta = v/c$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$:

- $b_{min} = \frac{Z_1 e^2}{\gamma m_{\mathrm{e}} v^2}$, dado por el valor máximo de la energía transferida en una colisión frontal, $T_{\max} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} (2v)^2 \approx 2m(\gamma\beta c)^2$, y

- $b_{\max} = \frac{\gamma v}{\overline{\nu}}$, que se obtiene al suponer el tiempo de interacción $t \sim \frac{b}{\gamma v}$ milar al de la frecuencia orbital media de los electrones, $\tau \sim \frac{1}{\overline{\nu}}$, quedando finalmente:

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{Z_1 e^2 \overline{\nu}}} \qquad (5.22)$$

Esta es la llamada fórmula de Bohr. En las fórmulas anteriores, se ha introducido el factor γ relativista para corregir el cálculo clásico.

Como se acaba de ver, la pérdida de energía de las partículas cargadas cuando atraviesan un medio material es debida a colisiones con los electrones, perdiendo una energía T_e en cada colisión. Ese choque es el que produce ionización o excitación atómica. Lo más frecuente es que la pérdida de energía en una colisión sea pequeña (en el 90 % de los casos, la pérdida es menor de 100 eV). Por la definición de parámetro de impacto (véase también (5.6)), se cumple $\frac{d\sigma}{db} db = 2\pi b db$ con lo que utilizando el parámetro de impacto de la fórmula (5.20), se puede calcular la sección eficaz clásica para que la partícula pierda una energía T obteniéndose $\frac{d\sigma}{db} db = \frac{d\sigma}{dT} dT$, y quedando:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{2\pi e^4 Z_1^2 Z_2^2}{m_e v^2 T^2}$$

El cálculo cuántico de la sección eficaz para que una partícula incidente de espín 0 y de energía E, pierda una energía T en un choque con un electrón es:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{2\pi e^4 Z_1^2 Z_2^2}{m_e c^2} \frac{(1 - \beta^2 T / T_{max})}{\beta^2 T^2} \qquad (5.23)$$

donde T_{max} es la máxima energía cinética que puede transferirse al electrón en el choque. Esta ecuación fue modificada por Bethe, para incluir los efectos de la ligadura a los átomos (baja energía) así como los efectos de polarización del medio. Conocida la sección eficaz de interacción, entonces la probabilidad de colisión en un pequeño recorrido δx en el medio es: $n_e \delta x \int (d\sigma/dT) dT$. Incluso se pueden definir los momentos $M_k(\beta) = n_e \delta x \int T^k (d\sigma/dT) dT$, que tienen un significado evidente: M_0 proporciona el número medio de colisiones, M_1 la energía media perdida, $M_2 - M_1^2$ la varianza de la T perdida, todos ellos en el intervalo δx.

Bethe clasificó las colisiones con los electrones según un corte de energía definido por el parámetro $\eta \sim 50$ keV, en colisiones *suaves* (*soft*) tomando los átomos como blancos, que representan las excitaciones:

$$-\left.\frac{dE}{dx}\right|_{T<\eta} = n_a \sum_n \int T_n d\sigma_n$$

y en colisiones *duras* (*hard*) con los electrones, en las que existe ionización:

$$-\left.\frac{dE}{dx}\right|_{T>\eta} = n_e \int_\eta^{T_{max}} T \frac{d\sigma}{dT}(E, T) dT$$

Si la velocidad de la partícula incidente es mayor que la de los electrones orbitales ($\sim \alpha c$), y no se trata de un electrón incidente, con lo que no existe radiación de frenado (*bremsstrahlung*), entonces la pérdida específica media de energía, $M_1/\delta x$, al realizar un cálculo relativista completo, viene dada por:

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = D_e n_e \left(\frac{Z_1}{\beta}\right)^2 \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2\right]} \qquad (5.24)$$

que es la fórmula de Bethe-Bloch, y es válida para energías comprendidas entre 0,05 < $\beta\gamma$ < 500. A baja energía porque la velocidad de la partícula es comparable a la del electrón atómico y entonces domina la excitación sobre la ionización. A alta energía (~ 1 TeV para muones), domina el bremsstrahlung. La representacion gráfica de la fórmula de Bethe-Bloch puede verse en la figura 5.12.

La constante $D_e = 4\pi r_e^2 m_e c^2 = 5.0989 \times 10^{-25}\ \text{MeV} \cdot \text{cm}^2$;; I es el potencial de excitación del material, llamado también potencial medio de excitación. Se ha medido experimentalmente y en función del número atómico del material Z_2,

$$I = 12\ Z_2 + 7 \qquad \text{[eV]} \quad (Z_2 < 13)$$

$$I = 9{,}76\ Z_2 + \frac{58{,}8}{Z_2^{0,19}} \qquad \text{[eV]} \quad (Z_2 \geq 13)$$

También se puede aproximar por $I \sim 16 \times Z_2^{0,9}$ (eV).

Ejemplos: I_{aire} = 86 eV, I_{Al} = 166 eV. Puede verse en la tabla J.2 el potencial medio de excitación *I* para varios elementos.

La pérdida específica de energía se suele denominar también *poder frenante* y, como se verá inmediatamente, se acostumbra a hablar de longitud reducida $d\varepsilon = \rho dx$, con lo que el recorrido en el medio se mide en g cm^{-2}.

En la fórmula de Bethe-Bloch (5.24) se observan claramente las siguientes propiedades:

1 Es independiente de la masa, *M*, delapartícula incidente.

2 Es proporcional al cuadrado de la carga, Z_1^2, de lapartícula incidente.

3 A baja energía varía con la velocidad como $1/v^2$.

4 A gran energía ($\gamma = E/M$) varía como ln γ^2.

5 La dependencia con el medio de la pérdida de energía másica

$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}$ es pequeña.

6 Tiene un mínimo $\frac{dE}{d\epsilon} \approx 1{,}5\ \text{MeV/(g cm}^{-2}\text{) para } \gamma\beta \sim 3\ (\beta \approx 0{,}96)$.

De la observación de la curva de Bethe, se puede extraer una expresión empírica para la dependencia del poder frenante con la energía que describe la caída de la pérdida de energía hasta el mínimo (por ejemplo para protones entre 0,1 y 1000 MeV), y que es, sencillamente:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{C}{E^{\alpha}}$$

siendo C una constante y $\alpha \sim 0{,}8$. De gran ayuda para realizar estimaciones numéricas con facilidad. Recuérdese que en estas expresiones E representa la energía cinética de la partícula. La curva 5.13 muestra el valor mínimo del poder frenante, $\langle dE/dx \rangle_{min} = 2{,}38 - 0{,}28 \ln Z$ MeV $g^{-1}cm^2$, para distintos elementos, calculado con la fórmula de Bethe.

Ejemplos: el mínimo del poder frenante $\langle dE/dx \rangle_{min}$ es 1,82 MeV/(g cm^{-2}) para el aire y 1,13 MeV/(g cm^{-2}) para el Pb. El aire de la atmósfera terrestre equivale a 1000 g cm^{-2}, con lo que sólo protones cósmicos con una energía ≥ 2 GeV podrán alcanzar el nivel del mar (sólo considerando ionización). A baja energía la pérdida de energía es grande; un protón de 10 MeV se para completamente en 0,25 mm de Cu.

Para colisiones de partículas ultrarrelativistas con medios densos es necesario corregir la fórmula de Bethe, añadiendo unos términos empíricos cuya magnitud es pequeña. El corchete de la ecuación (5.24) quedaría:

$$\left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z_2}\right]$$

en donde δ representa el efecto densidad que para partículas muy energéticas se aproxima a 2 ln γ más una constante y C representa la corrección de capas, importante cuando la velocidad de la partícula es ~ αc, o sea, del orden de la velocidad orbital de los electrones atómicos. La precisión de la fórmula de Bethe es de unos varios %. Estas correcciones relativistas y cuánticas reducen el aumento de *dE/dx* con la energía, por lo que tiene sentido hablar de partículas en el mínimo de ionización y partículas mínimo ionizantes (*mip*). Así, después del mínimo aparece el llamado *plateau* de Fermi. Para cálculos muy refinados debería consultarse la literatura especializada.

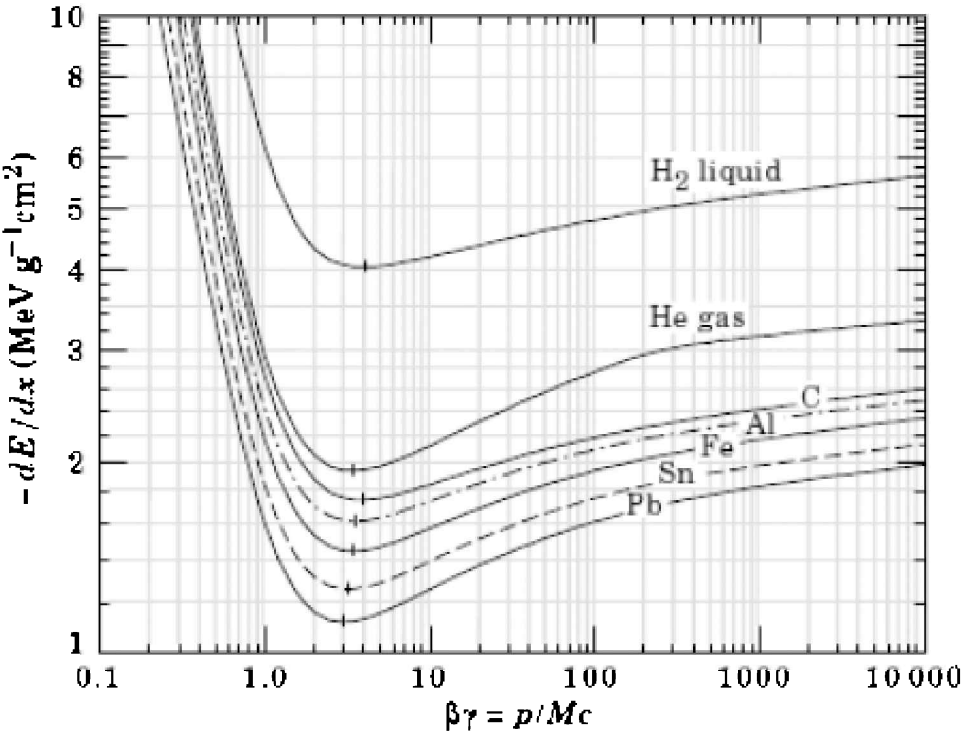


Figura 5.12: La pérdida de energía media $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$ dada por la fórmula de Bethe-Bloch para distintos materiales. *Fuente*: J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), *Phys. Rev.*, D86, 010001 (2012).

5.5.1 Consecuencias de la fórmula de Bethe-Bloch

Ley de mezclas

Para una mezcla de elementos con peso atómico A_i, si n_i es el el número de átomos del elemento *i* en la molécula de la mezcla, entonces $w_i = n_i \frac{A_i}{A_m}$ es la fracción de peso molar de cada uno de ellos y $A_m = \sum w_i A_i$, se cumple la regla de suma de Bragg:

$$\frac{dE}{d\epsilon} = \sum w_i \left| \frac{dE}{d\epsilon} \right|_i$$

donde se observa que se utiliza el poder frenante másico $\frac{dE}{d\epsilon}$, prácticamente independiente del material, y que está relacionado con el poder frenante lineal $\frac{dE}{dx}$ a través de $\varepsilon = \rho x$. La misma regla puede usarse para calcular:

$$\frac{dE}{d\epsilon} = \sum w_i \left| \frac{dE}{d\epsilon} \right|_i$$

Relación alcance-energía

La ionización provoca una pérdida gradual de la energía de las partículas. Es un fenómeno estadístico ya que el número de colisiones fluctúa de un evento al otro. Se define el alcance medio *R* para partículas de energía E_0:

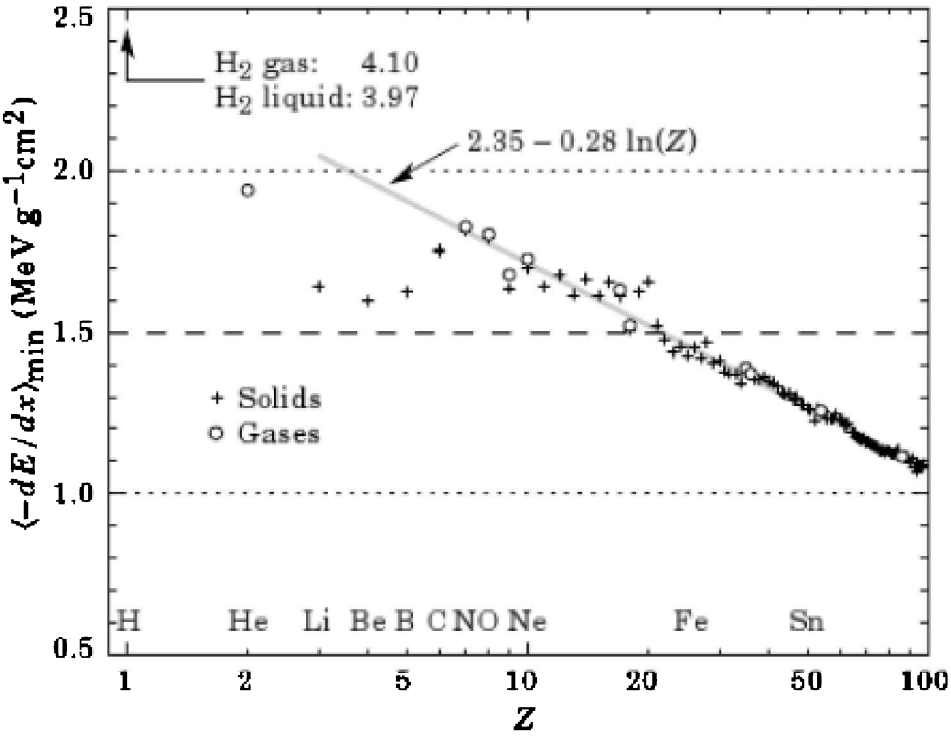


Figura 5.13: El valor mínimo $\langle \frac{dE}{dx} \rangle_{min}$ de la fórmula de Bethe-Bloch para distintos materiales. *Fuente*: J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), *Phys. Rev.*, D86, 010001 (2012).

$$R = \int_0^{E_0} \frac{1}{(dE/dx)} dE$$

De hecho se utiliza una fórmula semiempírica:

$$R(T_0) = R(T_{min}) + \int_{T_{min}}^{T_0} \frac{1}{(dE/dx)} dE$$

ya que la fórmula de Bethe es válida sólo a partir de un valor T_{min} de la energía.

Para determinar el alcance de una partícula, debe medirse experimentalmente la curva de transmisión. Sea I_0 el flujo de partículas

que incide sobre un material de anchura R; y sea I el flujo de partículas que atraviesa el material. Se llama coeficiente de transmisión al cociente I/I_0. La curva de transmisión depende del tipo de partícula. Para partículas cargadas pesadas (protón, núcleos alfa, etc.) se observa que la curva de transmisión pasa suavemente de 1 a 0 (véase figura 5.14). El alcance es la anchura de material cuando la transmisión es el 50 %. De hecho el espectro del alcance para una energía determinada T_0, sigue una distribución gaussiana. Es lo que se denomina *straggling*, y está directamente relacionado con el *straggling* de energía debido a que la fórmula de Bethe estima un valor medio, válido estadísticamente, que es:

$$\langle E - \overline{E} \rangle^2 = \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \langle R - \overline{R} \rangle^2$$

Para los electrones, la bajada de la curva de transmisión es mucho más ancha y por ello no es tan clara la noción de alcance y se introduce el *alcance extrapolado*, que se calcula por extrapolación del punto medio, obteniéndose R_e tal y como puede verse en la figura 5.14.

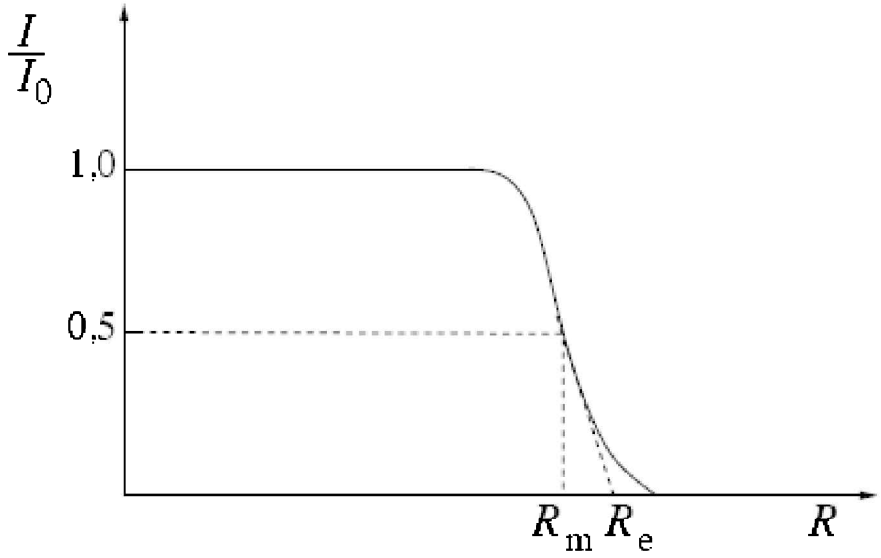


Figura 5.14: La curva de transmisión, donde se observa el alcance medio R_m y el alcance extrapolado R_e.

Ejemplos de alcances

Se sabe que $R \propto T^{\alpha+1}$ con $\alpha \approx 0{,}8$ ya que $dE/dx \propto T^{-\alpha}$, siendo T la energía cinética. Existen varias expresiones fenomenológicas para el alcance:

- para protones y partículas α de baja energía en el aire (si en condiciones STP,[2] $\rho_{\text{aire}} = 1{,}293 \times 10^{-3}\text{gcm}^{-3}$):

$$R(\text{m}) = (T/T_0)^{1,8}$$

  con $T_0(p) = 9{,}3$ MeV y $T_0(\alpha) = 37{,}2$ MeV.

- para partículas α tales que $T_\alpha < 200$ MeV en el aire, donde T_α viene dada en MeV:

$$R_\alpha(\text{mg cm}^{-2}) = 0{,}4\, T_\alpha^{3/2} \quad \text{o} \quad R_\alpha(\text{cm}) = (0{,}005 T_\alpha + 0{,}285)\, T_\alpha^{3/2}$$

- para electrones en materiales (Al, Cu,…),

$$R_e(\text{g cm}^{-2}) \approx 0{,}5\, T_e - 0{,}1 \qquad [T_e \text{ en MeV}]$$

En general las relaciones alcance–energía han sido muy utilizadas para calcular la energía de las partículas. También son importantes para calcular el tamaño de los blindajes contra la radiación.

La curva de Bragg

La curva de Bragg da la ionización en función de la profundidad. Es de gran interés médico: la ionización aumenta hacia el final de la trayectoria de la partícula (v pequeña), con lo que sirve para tratar tumores, localizados, sin dañar excesivamente el resto del cuerpo.

También se conoce como curva de ionización específica; o sea, el número de pares de iones, $N_\pm$, producidos en función de la profundidad x alcanzada por la partícula (véase la figura 5.15). El cálculo del número de pares de iones es muy sencillo; sea w la energía necesaria para crear

un par $e^{-}X^{+}$ (en el aire, $w \sim 35{,}5$ eV, y en gases $w \approx 25 - 50$ eV), entonces, si ΔE es la energía total perdida, el número total de pares $N_{\pm} = \frac{\Delta E}{w}$.

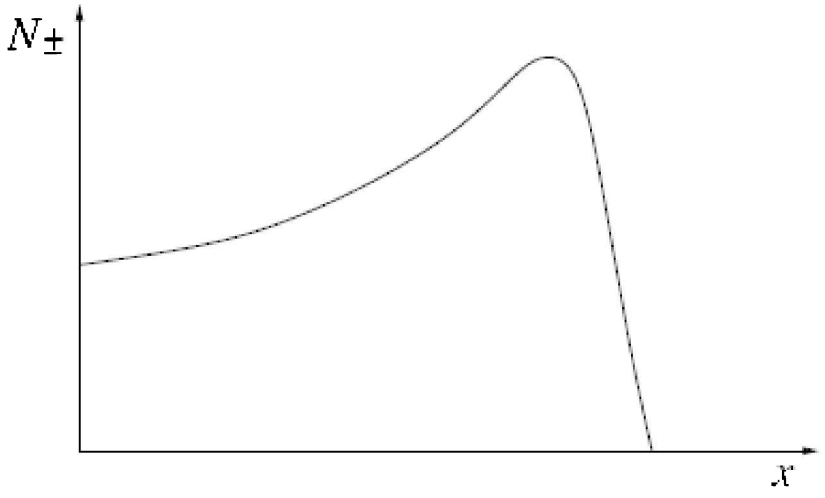


Figura 5.15: La curva de Bragg.

La ley de Bragg-Kleeman

La ley de Bragg permite relacionar alcances entre distintos medios, para una misma partícula, exceptuando electrones y positrones:

$$\boxed{\frac{R\rho}{\sqrt{A}} = \text{cte}} \qquad (5.25)$$

con lo que conocido para un medio como por ejemplo el aire (tómese por ejemplo esta vez la densidad del aire a una temperatura de 15^{o}C y una presión atmosférica igual a 1 atm: $\rho_{\text{aire}} = 1{,}226 \times 10^{-3}$ g cm^{-3} y $\sqrt{A_{\text{aire}}} = 3{,}82$), se tiene para otro material:

$$R_1(\mathrm{cm}) \approx 3{,}2 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{A_1}}{\rho_1} R_{\mathrm{aire}}(\mathrm{cm})$$

expresión que reproduce los resultados con un error inferior al 15 %.

Reglas de escala

A partir de la dependencia $dE/dx = Z_1^2 f(\beta) = Z_1^2 g(E/M)$, que conduce a $R(E/M) = \frac{M}{Z_1^2} h(E/M)$, donde *f*, *g* y *h*, son funciones, pueden demostrarse fácilmente las siguientes relaciones de escala:

$$\frac{dT_b}{dx}(T_b) = \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \frac{dT_a}{dx}\left(T_b \frac{M_a}{M_b}\right)$$

$$R_b(M_b, Z_b, p_b) = \frac{M_b}{M_a}\left(\frac{Z_a}{Z_b}\right)^2 R_a\left(M_a, Z_a, p_b \frac{M_a}{M_b}\right)$$

5.5.2 Difusión múltiple o culombiana. Fórmula de Rutherford

Según la fórmula de Bethe, la dependencia de la pérdida de energía varía como M^{-1}, siendo *M* la masa del blanco. La pérdida de energía por ionización debida a colisiones con núcleos es despreciable (véase (5.21)) comparada a la de las colisiones con los electrones. Por el contrario, la difusión con los núcleos puede introducir cambios importantes en la trayectoria de la partícula incidente. Como es bien sabido, la sección eficaz diferencial de Rutherford es:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{1}{4}\left(Z_1 Z_2 r_e \frac{m_e c}{\beta p}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{5.26}$$

válida para partículas de espín 0. En el caso de partículas de espín 1/2, la sección eficaz viene dada por la fórmula de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R (1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2}) \tag{5.27}$$

La fórmula de Rutherford, además de probar la existencia del núcleo en el famoso experimento de Geiger y Marsden, sirvió para determinar la carga de los núcleos. En 1920 Chadwick la utilizó para medir Z_{Cu} = 29,3 ±0,45 y Z_{Pt} = 77,4 ±0,77.

Se puede observar que según la fórmula de Rutherford:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right)_R = \frac{1}{4}\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

la probabilidad de difusión es mayor para ángulos pequeños, pero pueden existir difusiones a gran ángulo con los núcleos ya que la sección eficaz es proporcional a Z_2^2, mientras que para los electrones es proporcional a Z_2, puesto que cada uno interviene con carga 1.

Cuando una partícula cargada atraviesa un medio material, sufre muchas difusiones con un ángulo pequeño. La mayoría de estas difusiones son de tipo culombiano (siguen la ley de Rutherford). La trayectoria de la partícula no es rectilínea, sino tortuosa, de forma que después de atravesar un recorrido *L*, el ángulo de salida será en promedio el mismo ángulo de entrada, pudiendo calcularse la probabilidad de salida con un ángulo distinto. A este cambio de trayectoria dominada por difusiones con los núcleos se denomina difusión múltiple o también difusión culombiana (véase la figura 5.16). Esta difusión debe ser tratada

como un fenómeno estadístico. Para muchas difusiones, cada una de ellas con ángulo pequeño, la distribución de probabilidad del ángulo de difusión Θplano en el plano de colisión sigue la distribución de Gauss (que se estudia en la Sección 7.3.4), y que toma la forma:

$$P(\Theta)d\Theta = \frac{1}{\Theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Theta^2_{\text{plano}}}{2\Theta_0^2}} d\Theta_{\text{plano}} \qquad (5.28)$$

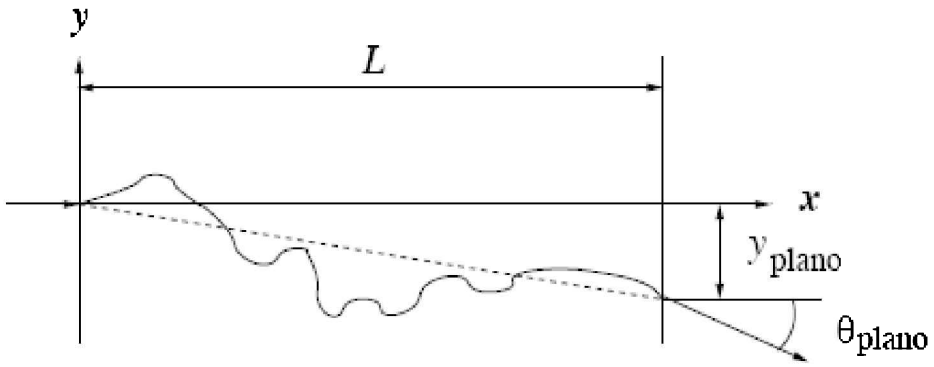


Figura 5.16: Representación de la trayectoria de una partícula al atravesar un medio de espesor L debida a la difusión múltiple. Obsérvese el ángulo de salida Θplano.

El parámetro Θ_0 da la anchura de la distribución gausiana cuyo valor cuadrático medio $\overline{\Theta}^2_0$viene dado por:

$$\overline{\Theta}_0^2 = L n_a \int \Theta^2 \left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_R d\Omega$$

siendo L la longitud recorrida en el medio, con densidad volúmica de blancos nucleares n_a. La relación entre el ángulo en el plano y el ángulo espacial es sencillamente $\Theta_{\text{plano}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_{\text{espacio}}$. Con ello se tiene:

$$\overline{\Theta}_0^2 = 8\pi r_e^2 L n_a Z_1^2 Z_2^2 \left(\frac{mc}{\beta p}\right)^2 \ln \frac{2}{\alpha^2 \sqrt[3]{A Z_2}}$$

que, aproximadamente, es:

$$\overline{\Theta}_0^2 = \frac{4\pi}{\alpha} Z_1^2 \left(\frac{mc}{\beta p}\right)^2 \frac{L}{X_0}$$

En el cálculo del ángulo medio de difusión múltiple interviene X_0, un parámetro llamado *longitud de radiación*, que depende del material Z_2 y cuyo valor es:

$$\boxed{\frac{1}{X_0} = 4\sigma_0 n_a \ln \frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}}} \qquad (5.29)$$

siendo $\sigma_0 = \alpha r_e^2 Z_2^2$. Su aparición en esta fórmula es casual. Será estudiado en el próximo apartado, donde se comprenderá su significado físico.

Definiendo $E_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} mc^2 = 21.2$ MeV, se obtiene la ecuación de Rossi–Greisen, que da una estimación del valor medio de la anchura de la distribución del ángulo de difusión múltiple:

$$\overline{\Theta}_0 = \frac{E_0}{pv} Z_1 \sqrt{\frac{L}{X_0}} \qquad (5.30)$$

Por último, la desviación cuadrática media del desplazamiento lateral de la partícula después de recorrer una distancia L en el medio (y_{plano} en la figura 5.16) se demuestra que vale: $\overline{y}_{\text{plano}} = \frac{1}{\sqrt{3}} L\Theta_0$.

5.6 Interacción de e^+ y e^- con la materia

La pequeñez de la masa de los electrones (m_e = 0,511 MeV/c^2) introduce ciertas diferencias en la pérdida de energía respecto a las partículas de mayor masa (piones, protones, etc.). Hay que tener en cuenta también que son partículas idénticas a los electrones del material. Lo más notable es que en presencia de campos eléctricos intensos (la carga nuclear), los $e^\pm$ son frenados bruscamente y por ello pueden emitir fotones (radiación denominada *bremsstrahlung*, del alemán: radiación de frenado). Este fenómeno tiene el mismo origen que el que sucede en los aceleradores de electrones con trayectoria curvada (los sincrotrones) en los que existe emisión de radiación *sincrotrón*, consecuencia de la aceleración centrípeta. La expresión de la pérdida de energía en el caso de los electrones y positrones será pues:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{col}} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}}$$

en donde aparecen dos términos, uno para cada tipo de pérdida de energía.

5.6.1 Pérdida de energía de $e^\pm$ por colisión

En el límite relativista, la pérdida de energía de electrones y positrones por unidad de recorrido en un medio homogéneo debida a las colisiones con los electrones del medio es muy similar, aunque no es idéntica por lo dicho en el párrafo anterior, a la pérdida de energía de partículas de masa elevada $M > m_e$ dada por la fórmula de Bethe-Bloch:

$$\boxed{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{col}} = \frac{1}{2} D_e n_e \left(\frac{1}{\beta^2}\right) \left[2 \ln \frac{2 m_e c^2}{I} + 3 \ln \gamma - 1.95\right]} \qquad (5.31)$$

5.6.2 Radiación de frenado. Longitud de radiación X_0

Es bien sabido, en electromagnetismo clásico, que la potencia radiada (ondas electromagnéticas emitidas) por una carga *e* con aceleración *a* viene dada por la conocida fórmula de Larmor:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

o sea, la energía perdida por la carga eléctrica por unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de su aceleración.

La radiación de frenado (*bremsstrahlung*) es el mecanismo dominante de pérdida de energía de los electrones y positrones a alta energía. En presencia de un campo eléctrico intenso los electrones, consecuencia de la brusca desaceleración son frenados y emiten fotones. Este es el origen del espectro continuo de fotones que aparece junto a los espectros de rayos X (generados por el bombardeo de electrones contra un material) o de la radiación sincrotrón en trayectorias curvas de los aceleradores. El electrón de energía E_i emite un fotón de energía E_γ tal que $E_\gamma = E_i - E_f$. El ángulo de emisión es independiente de E_γ y vale $\theta_\gamma \sim \frac{m_e c^2}{E_i}$.

El cálculo semiclásico de la sección eficaz de *bremsstrahlung* para partículas relativistas resulta:[3]

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \approx 5\frac{e^2}{\hbar c} Z_1^4 Z_2^2 \left(\frac{m}{M\beta_1}\right)^2 \frac{r_e^2}{E_\gamma} \ln \frac{M\beta_1^2 c^2 \gamma^2}{E_\gamma}$$

en donde *M* es la masa de la partícula y *m* la del electrón atómico, luego la sección eficaz es proporcional a M^{-2}, por lo que sólo es importante para $e^{\pm}$. También se observa que la dependencia con el medio es según Z_2^2. El cálculo de la sección eficaz de este proceso, según la teoría QED y por lo tanto relativista, se realiza teniendo en cuenta el apantallamiento de la carga nuclear que realizan los electrones del

átomo, lo que se caracteriza por una variable:

$$\xi = \frac{100 m_e c^2 E_\gamma}{\sqrt[3]{Z_2} E_i E_f}$$

y donde $\xi = 0$ representa apantallado total y $\xi \gg 1$, sin apantallamiento. Para energías relativistas (> MeV), la sección eficaz de *bremsstrahlung*, según Koch y Motz,[4] es:

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma}\left\{\left[(1+\epsilon^2)\left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z_2 - f(Z_2)\right] - \frac{2}{3}\epsilon\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z_2 - f(Z_2)\right]\right\}\right.$$

con $\epsilon = \frac{E_f}{E_i}$, $\sigma_0 = \alpha Z_2^2 r_e^2$, y en donde φ_i son dos funciones de apantallamiento que se calculan en el marco del modelo de Thomas-Fermi habiéndose obtenido por Y. S. Tsai[5] los valores aproximados (mejor que el 0,5 %):

$$\phi_1(\xi) = 20{,}863 - 2\ln[1 + (0{,}55846\xi)^2] - 4[1 - 0{,}6e^{-09\xi} - 0{,}4e^{-1{,}5\xi}]$$
$$\phi_2(\xi) = \phi_1(\xi) - \tfrac{2}{3}(1 + 6{,}5\xi + 6\xi^2)^{-1}$$

en donde

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) + \tfrac{2}{3} = 4\ln 183$$
$$\phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) \to 19{,}19 - 4\ln\xi \qquad \text{para} \qquad \xi \to \infty$$

y $f(Z_2)$ es una pequeña corrección culombiana a la aproximación de Born, que da cuenta de la interacción del electrón emitido con el núcleo. El propio Bethe calculósu valor,

$$f(Z) = a^2[(a^2+1)^{-1} + 0{,}20206 - 0{,}0369a^2 + 0{,}0083a^4 - 0{,}002a^6]$$

siendo $a = \alpha Z$.

Partiendo de la fórmula relativista ($E_i \gg mc^2$) de bremsstrahlung, se suelen calcular dos expresiones límite según el nivel de apantallamiento,

a) para $\xi \gg 1$ (sin apantallamiento),

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma}\left(1+\epsilon^2-\frac{2}{3}\epsilon\right)\left[\ln\frac{2E_iE_f}{m_2c^2E_\gamma}-\frac{1}{2}-f(Z_2)\right]$$

b) y para apantallamiento total ($\xi = 0$), se cumple:

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma}\left[\left(1+\epsilon^2-\frac{2}{3}\epsilon\right)\left[\ln\frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}}-f(Z_2)\right]+\frac{\epsilon}{9}\right]$$

La pérdida de energía por radiación será:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = \int_0^{E_\gamma^{\max}} E_\gamma \cdot n_a \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$$

siendo $E_\gamma^{\max} = E_i - mc^2$. Se puede extraer E_i quedando:

$$\boxed{\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = n_a E_i \sigma_{\text{rad}}} \qquad (5.32)$$

donde:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{1}{E_i}\int_0^{E_\gamma^{\max}} E_\gamma \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$$

La integración para calcular σ_{rad} puede realizarse en los dos casos límites vistos más arriba, con lo que

a) para $\xi \gg 1$ (sin apantallamiento),

$$\sigma_{\text{rad}} = 4\sigma_0\left(\ln\frac{2E_i}{m_e c^2}-\frac{1}{3}-f(Z_2)\right) \qquad (5.33)$$

b) y para apantallamiento total ($\xi = 0$), se cumple:

$$\sigma_{\text{rad}} = 4\sigma_0 \left[\ln(183 Z_2^{-1/3}) + 1/18 - f(Z_2) \right] \qquad (5.34)$$

que es independiente de E_i También puede incluirse el *bremsstrahlung* debido a la interacción con los e^- del átomo, para lo que debe cambiarse $Z_2^2 \rightarrow Z_2(Z_2 + 1)$. El resultado más importante es, pues, que la pérdida de energía por radiación aumenta linealmente con E_i. Esta es la pérdida de energía dominante de electrones y positrones a alta energía. A modo de conclusión, en la figura 5.17 se muestra el poder frenante en función de la energía para electrones en aluminio y en plomo. Las curvas contínuas representan la pérdida de energía por ionización y las curvas a trazos las pérdidas por *bremsstrahlung*.

Longitud de radiación X_0

A alta energía, dado que σ_{rad} es prácticamente constante, se puede definir un recorrido libre medio de radiación:

$$\boxed{\frac{1}{X_0} = n_\alpha \sigma_{\text{rad}}} \qquad (5.35)$$

que sólo depende del medio y que se denomina longitud de radiación cuyo significado físico se puede comprender al integrar la expresión $\frac{dE}{E} = \frac{dx}{X_0}$, resultando:

$$\boxed{E = E_i e^{-x/X_0}} \qquad (5.36)$$

es decir la pérdida de energía de un electrón o positrón por *bremsstrahlung* es exponencial, con un recorrido libre medio dado por la

longitud de radiación X_0, que sólo depende del medio atravesado. Para calcular X_0 se utiliza la expresión (5.35), sustituyendo el valor de la sección eficaz dada en (5.34). Una recopilación de longitudes de radiación ha sido calculada y tabulada por Y. S. Tsai y dichos valores pueden calcularse gracias a la fórmula:

$$X_0 = \frac{716.4\ A}{Z_2(Z_2+1)\ln(287/\sqrt{Z_2})}\ \ [\mathrm{g\ cm^{-2}}].$$

Por lo que se acaba de ver, para electrones (y positrones) de alta energía, la anchura del material atravesado se suele medir en unidades de longitud de radiación. Esta es la distancia media en la que la energía E del electrón disminuye un factor E/e por *bremsstrahlung*. Obsérvese que es más conveniente utilizar las densidades superficiales; o sea, longitud por densidad (g cm^{-2}) que directamente longitudes (cm) al hablar de longitudes de radiación ya que entonces, los ritmos de pérdida de energía son independientes del medio. Ejemplos de longitudes de radiación son:

$$L_0(\mathrm{Pb}) = 0.56\ \mathrm{cm}. \qquad L_0(\mathrm{Aire}) = 300.5\ \mathrm{m} \quad \mathrm{y} \quad L_0(\mathrm{NaI}) = 2.59\ \mathrm{cm}.$$

En la tabla J.2, del correspondiente apéndice, se pueden encontrar otros valores de L_0 o X_0 y una relación de varias propiedades electromagnéticas de algunos elementos.

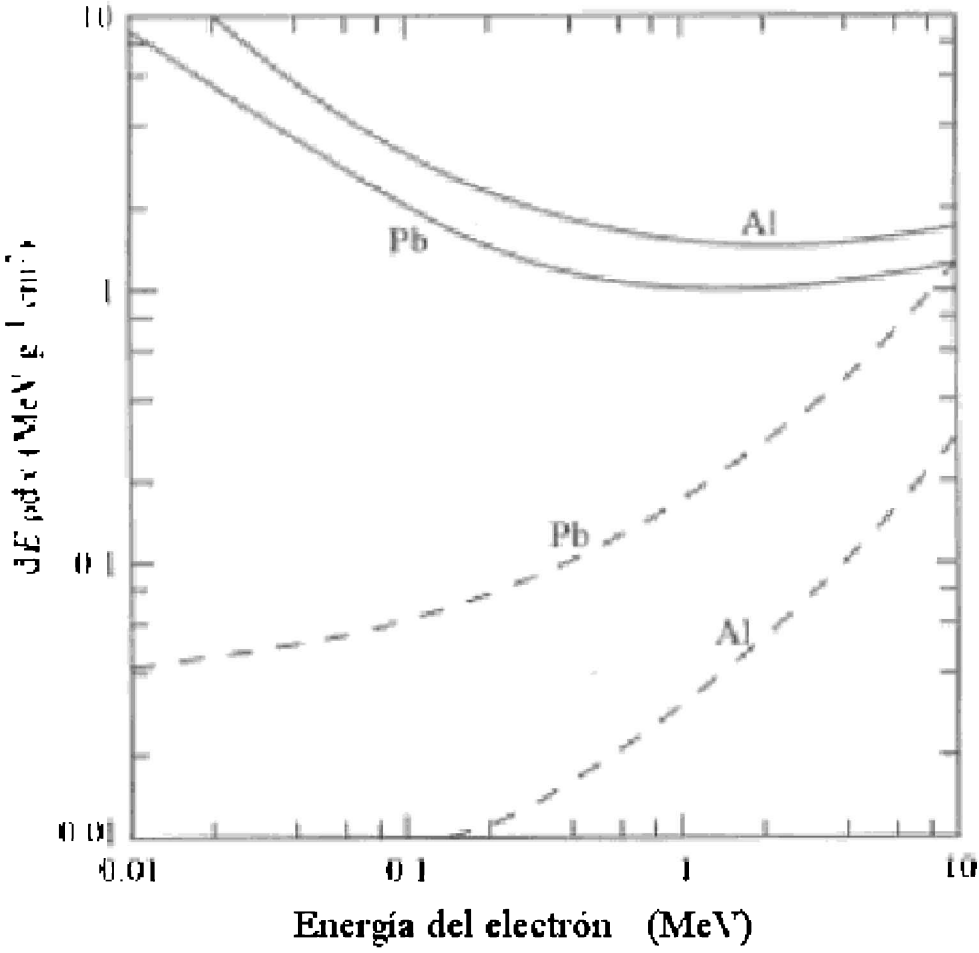


Figura 5.17: Poder frenante para electrones en aluminio y plomo. Curva contínua, poder frenante debido a ionización; curva a trazos, debido a radiación de *bremsstrahlung*.

Energía crítica

Se define la *energía crítica* como aquélla para la que las pérdidas por ionización igualan a las de radiación. O sea que, como

$$\frac{(dE/dx)_{\text{col}}}{(dE/dx)_{\text{rad}}} = \frac{1600\, mc^2}{Z_2 E_i}$$

se igualan para la energía crítica:

$$\boxed{E_c = \frac{800}{Z_2}\ \text{MeV}} \qquad (5.37)$$

dando, por ejemplo, para el Pb un valor de unos 10 MeV. En la figura 5.17 se puede comprobar, en particular, que para el plomo la energía crítica es efectivamente 10 MeV.

Como curiosidad experimental, se produce un fenómeno que es muy interesante para realizar una práctica de laboratorio. Se puede hablar de la absorción de electrones β, que es consecuencia de la forma del espectro de desintegración β. La ley de atenuación es la típica exponencial: $I = I_0 e^{-\mu_m x}$. Se da también la circunstancia que la medida del coeficiente de absorción μ_m permite determinar el *end point* del espectro β, que en este caso es E_m; o sea, este valor puede utilizarse para calcular la masa del neutrino. Se encuentra un valor empírico para el coeficiente:

$$\mu_m = \frac{17}{E_m^{1,14}}\ [\text{cm}^2\ \text{g}^{-1}]$$

5.6.3 Aniquilación de positrones. El orto- y para-positronio

Los positrones de gran energía tienen pérdidas por ionización y radiación igual que los electrones. A muy baja velocidad, el e^+ acaba frenándose y es capturado por un e^- atómico del material, formando el *positronio*, un estado ligado muy parecido al átomo de hidrógeno, pero las energías de sus estados ligados son dos veces menos espaciadas que las del hidrógeno:

$$\boxed{E = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{2n^2}} \tag{5.38}$$

es decir: $E \approx -\frac{6{,}8}{n^2}$ eV, ya que la masa reducida del positronio es $\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{2}$, la mitad que la del átomo de hidrógeno.

El positronio se desintegra con una probabilidad igual a la de la superposición de las funciones de onda. Este fenómeno se denomina *aniquilación*. Definiendo $\gamma = \frac{E_+}{mc^2}$, siendo E_+ la energía del positrón, la sección eficaz de aniquilación en función de γ es:

$$\sigma_{an} = \pi r_e^2 \frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]$$

que tiene un máximo alrededor de $\gamma = 1$.

La aniquilación del positronio puede tener lugar a través de un proceso de emisión de dos fotones:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

en el que el positronio está en estado singlete (espín $J = 0$), denominado *parapositronio*. La energía de cada fotón es de 0,511 MeV (aniquilación en reposo). La vida media de este estado es:

$$\tau = 2\hbar/(m_e c^2 \alpha^5) = 1{,}244 \times 10^{-10}\ \text{s}$$

Si la desintegración se realiza en el estado triplete (espín del sistema $J = 1$), se denomina entonces *orto-positronio*. Su desintegración es a través de tres fotones:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$$

y su vida media es:

$$\tau = \frac{9\pi\hbar}{2m_e c^2 \alpha^6(\pi^2 - 9)} = 1{,}386 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Un positrón que aparezca en la materia, acabará siempre aniquilándose con un electrón, dando fotones en el estado final, después de un brevísimo tiempo en el que ha formado el estado llamado positronio.

5.6.4 Retrodifusión. Albedo

Una consecuencia de la difusión múltiple para e^+ y e^- es el fenómeno de la retrodifusión. Es un fenómeno que se produce principalmente para energías inferiores a 1 MeV. Un electrón o positrón, al entrar en un material, puede sufrir difusiones a gran ángulo, que pueden llegar a difundirlo en la dirección opuesta a la de incidencia (de ahí el nombre de retrodifusión).

El coeficiente de retrodifusión $\mathcal{A}$, también llamado albedo, mide la probabilidad del fenómeno; suele ser constante hasta energías del orden de 1 MeV y se anula para valores de unas decenas de MeV. Es característico del material. Para metales como Au, Ag, etc. se tiene $A \approx$ 50%.

Este fenómeno explica pérdidas importantes en la detección de electrones de muy baja energía. Así, con un detector de NaI, cerca del 80 % de los electrones emitidos por fuentes radiactivas son retrodifundidos y, por tanto, no dan señal en el detector.

5.6.5 Alcance para $e^{\pm}$

La consecuencia de todos los fenómenos estudiados para $e^{\pm}$ es que el alcance al atravesar un material es ahora mucho más impreciso que para las partículas masivas. Por una parte, es debido a la difusión múltiple

que, en este caso, es muy importante con los electrones atómicos, dando lugar a trayectorias más tortuosas. Por otra parte, la radiación de *bremstrahlung* afecta al alcance y por último el fenómeno de retrodifusión que se acaba de describir y que es importante a baja energía (≤ 1 MeV). Por todo ello, para electrones suele hablarse de alcance extrapolado (véase su definición en la figura 5.14). En la figura 5.18, se puede ver el alcance medido experimentalmente para electrones de menos de 10 MeV en aluminio que, al estar expresado en g cm^{-2}, es aproximadamente válido para cualquier elemento.

Puede comprobarse en esta curva que una buena aproximación para alcances de $e^{\pm}$ es

$$R_e(\text{g cm}^{-2}) \approx 0{,}5\, T_e - 0{,}1 \qquad [T_e \text{ en MeV}]$$

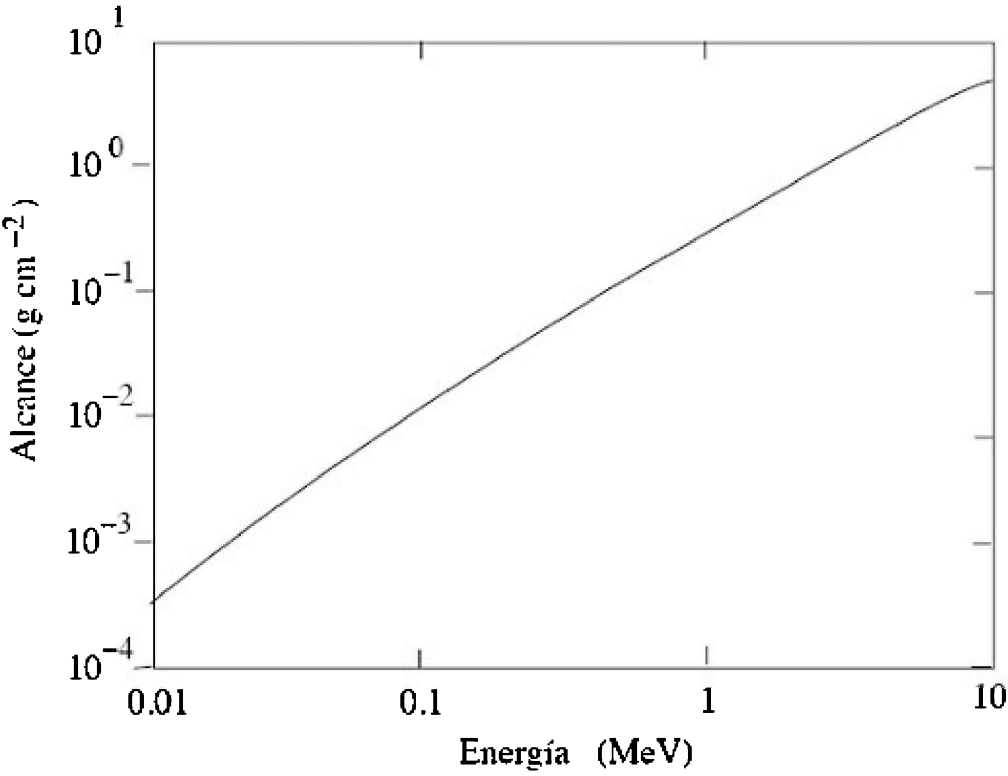


Figura 5.18: Curva experimental de alcance de electrones en aluminio. Datos obtenidos de L. Katz and A. S. Penfold, *Rev. Mod. Phys.*, **24** (1952) 1.

El resumen de la pérdida fraccionaria de energía para electrones y positrones en plomo, donde se ven todos los fenómenos descritos, incluida la aniquilación de los positrones, se puede observar en la figura 5.19.

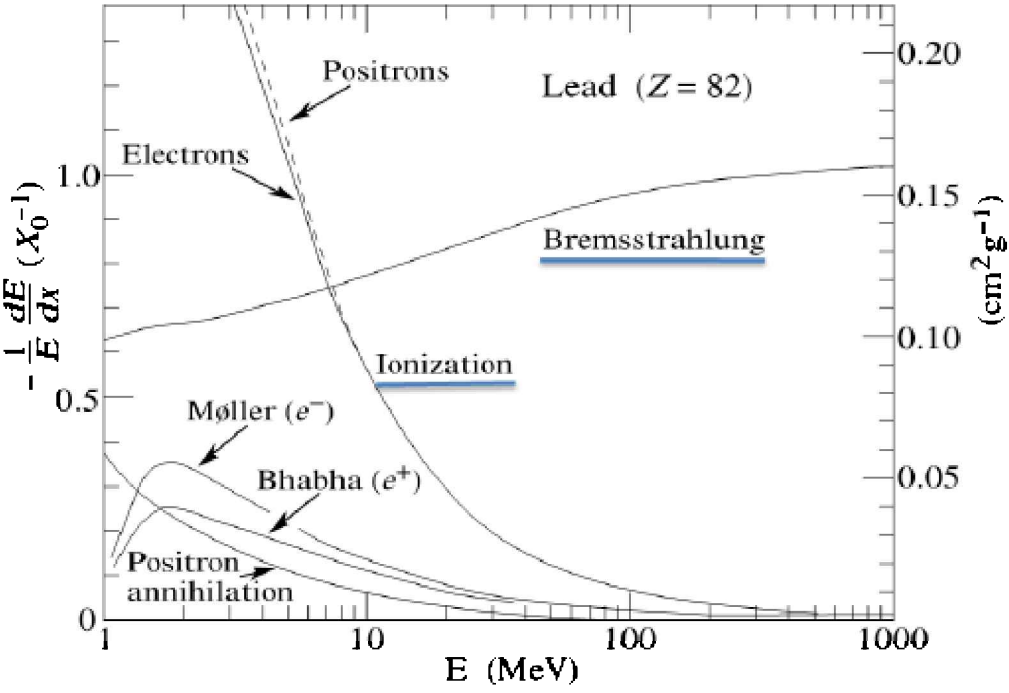


Figura 5.19: Pérdida fraccionaria de energía para $e^{\pm}$ en plomo.

5.6.6 Poder frenante para μ^+

Como conclusión al estudio del paso de partículas cargadas por la materia, véase la figura 5.20, que se ha extraido de las tablas del PDG.

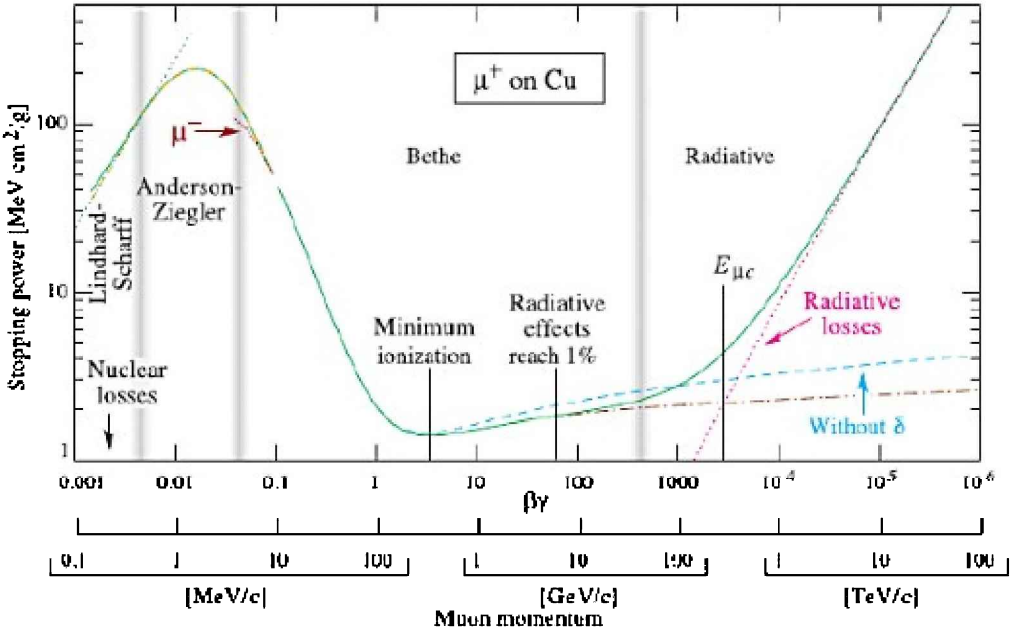


Figura 5.20: Poder frenante para muones en cobre. *Fuente*: J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), *Phys. Rev.*, D**86**, 010001 (2012).

Esta figura muestra la recopilación del poder frenante para muones en cobre hasta energías de 100 TeV, ilustrando el buen conocimiento que se tiene de todos los fenómenos estudiados, incluyendo la zona de muy baja energía ($\beta\gamma$ < 0,02) en la que se observa una bajada del poder frenante. Se puede ver que la fórmula de Bethe explica muy bién la zona de energías intermedias definida por 0,05 ≤ $\beta\gamma$ ≤ 500, marcada por sendas barras verticales. A altas energías ($\beta\gamma$ > 500) domina la radiación *bremsstrahlung* y el poder frenante crece linealmente con la energía del muón.

5.7 Interacción de fotones con la materia

En la interacción de partículas cargadas con la materia, se ha visto que si bien van frenando y acaban parándose, su naturaleza no cambia. Un fotón, para poder ser detectado, debe interaccionar y dar lugar a

partículas cargadas.

Las interacciones de los fotones con la materia siempre se abordan bajo su aspecto corpuscular. Se habla de propiedades corpusculares de la radiación.

Tres son los fenómenos físicos que describen la interacción de los fotones con la materia, con secciones eficaces que tienen un comportamiento energético distinto:

- efecto fotoeléctrico, $\approx 1/E_{\gamma}^{3,5}$, importante para $E_{\gamma} < 500$ keV,
- efecto Compton, $\approx 1/E_{\gamma}$, que es máximo para $E_{\gamma} \sim 1$ MeV, y
- creación de pares e^+ e^-, constante con E_{γ} y domina para $E_{\gamma} > 50$ MeV.

Otros fenómenos son: la difusión coherente (difusión Rayleigh), que es una difusión con los electrones del material, sin llegar a excitarlos (fenómeno despreciable a partir de energías de rayos X), y la absorción fotonuclear, proceso en el que se arranca un neutrón del núcleo y es importante en la región conocida como la de la resonancia gigante (se produce a energías entre 10 y 25 MeV).

Es tradicional relacionar la naturaleza de la radiación γ con su energía de acuerdo con la siguiente tabla:

infrarroja	0,01	-	1	eV
visible	1	-	3	eV
ultravioleta	3	-	100	eV
rayos X	0,1	-	100	keV

5.7.1 Efecto fotoeléctrico

El fotón es absorbido totalmente por un átomo que al desexcitarse emite un electrón. El proceso debe tener en cuenta el átomo para que se

conserve la energía y el momento:

$$\gamma + A \rightarrow A^* \rightarrow A^+ + e^-$$

La energía del e^- (denominado fotoelectrón) será $E_e = E_\gamma - E_b$, en donde E_b es la energía de ligadura del e^-. Normalmente se emitirá un electrón de la capa K, cuya energía de ligadura para un material con número atómico Z_2 es $E_b = 13{,}6(Z_2 - 1)^2$ eV. Einstein propuso $E_\gamma = h\nu$ y explicó los experimentos de Millikan en los que se pusieron de manifiesto las frecuencias de corte dependientes del material (o sea, las energías de ligadura atómicas).

Como la energía del electrón emitido es $E_e = E_\gamma - E_b$, al detectar el electrón se obtiene un pico para este valor de la energía, E_e; es el llamado fotopico. Como el átomo ha quedado con un hueco en la posición del electrón arrancado, se producirá emisión de un rayo X característico del elemento (o de un electrón Auger, por conversión interna).

Los cálculos de la sección eficaz son complejos. Por encima de la capa K pero para $E_\gamma << m_e c^2$, en la aproximación de Born, la sección eficaz del efecto fotoeléctrico por átomo es:

$$\sigma_\phi = \sigma_{Th} 4\sqrt{2}\alpha^4 Z_2^5 \left(\frac{mc^2}{E_\gamma}\right)^{7/2} \qquad (5.39)$$

con $\sigma_{Th} = \frac{8}{3}\pi r_e^2$, la llamada sección eficaz de Thomson que da el límite clásico de la difusión elástica $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$ y, como se ve, depende de la constante llamada radio clásico del electrón, cuyo valor es $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}82$ fm. Se observa, en particular, una fuerte dependencia con el Z_2 del material $(\sim Z_2^5)$. En el caso de Pb, por ejemplo, $\sigma_\varphi(E_\gamma = 1\ \text{MeV}) \approx 1$ barn y sube hasta ~ 1 Kbarn cerca del pico de la capa *K* (88 keV).

Existen picos para los valores de E que coinciden con los de las capas K, L, M, … Así, en el Pb, para $E_\gamma > 88$ keV ya se pueden arrancar e^- de la capa K, pero si la energía es inferior, sólo se podrán arrancar electrones de las capas L, M, etc, cuyas energías se pueden aproximar por las expresiones $13{,}6(Z_2 - 5)^2/4)$ y $13{,}6(Z_2 - 13)^2/9$ eV, respectivamente. Puede verse la forma de los picos de la sección eficaz del efecto fotoeléctrico en la curva 5.23, obtenida tomando como blanco un cristal centelleador de NaI.

Para energías $E_\gamma > m_e c^2$ la sección eficaz del efecto fotoeléctrico depende más suavemente de la energía:

$$\sigma_\phi = \tfrac{3}{2}\sigma_{\mathrm{Th}}\alpha^4 Z_2^5\left(\frac{mc^2}{E_\gamma}\right) \qquad (5.40)$$

5.7.2 Efecto Compton

El efecto Compton trata la difusión elástica $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, como si el electrón atómico estuviera libre; en efecto, supone que el fotón tiene una energía muy superior a la de ligadura del electrón en el átomo $E_\gamma > E_b$, de forma que lo puede arrancar (el átomo queda ionizado). En caso contrario, el fotón es reemitido con la misma longitud de onda; es el caso de la difusión Thomson o Rayleigh, que explican clásicamente el proceso.

La conservación del cuadrivector energía-momento (véase la figura 5.21) se escribe:

$$\begin{aligned} E_\gamma + m_e c^2 &= E'_\gamma + E_e \\ \vec{p}_\gamma &= \vec{p}'_\gamma + \vec{p}_e \end{aligned} \qquad (5.41)$$

donde se observa que el electrón inicial se considera en reposo y se puede escribir $E_e = \gamma m_e c^2$ y $p_\gamma = E_\gamma/c$. Suponiendo que el fotón es

difundido según el ángulo θ, y escribiendo $\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$ (energía reducida del fotón) y $x = 1 - \cos\theta$ se obtiene:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon x} \tag{5.42}$$

con lo que la máxima energía del fotón difundido $(E'_\gamma = E_\gamma)$ se obtiene para $\theta = 0$ y la mínima $(E'_\gamma \approx mc^2/2)$ para $\theta = 180°$. Si se escribe en términos de longitudes de onda del fotón $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ entonces la constante $\lambda_e = \frac{h}{mc} = 0{,}0243$ Å recibe el nombre de longitud de onda Compton del electrón.

La sección eficaz, basada en la teoría QED, fue calculada por Klein-Nishina:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{KN} = \frac{r_e^2}{2}\frac{1}{(1+\epsilon x)^2}\left(1 + \cos^2\theta + \frac{\epsilon^2 x^2}{1+\epsilon x}\right) \tag{5.43}$$

que al integrarla queda:

$$\sigma_c = \frac{3}{8\epsilon}\sigma_{Th}\left\{\left[1 - \frac{2(\epsilon+1)}{\epsilon^2}\right]\ln(2\epsilon+1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\epsilon} - \frac{1}{2(2\epsilon+1)^2}\right\} \tag{5.44}$$

donde σ_{Th} es la sección eficaz de Thomson, vista más arriba. Se verifica que cuando $\varepsilon \to \infty$, o lo que es lo mismo, $E_\gamma >> m_e c^2$ se cumple que $\sigma_c \to \frac{3}{8\epsilon}\sigma_{Th}\left(\ln 2\epsilon + \frac{1}{2}\right)$; o sea, que para alta energía del fotón y por átomo va como Z_2/E_γ.

Análogamente, como en (5.41) se cumple que $E_e = T_e + m_e c^2$, siendo E_e la energía total del electrón y T_e su energía cinética, puede

comprobarse que:

$$T_e = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \left(1 - \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon x}\right)$$

También se observa que existe un valor máximo de la energía del electrón (llamado el *Compton edge*), para un choque con cos $\theta = -1$, y que como $mc^2 \approx 0{,}5$ MeV, se tiene:

$$T_e^{\max} = \frac{4E_\gamma^2}{1 + 4E_\gamma}$$

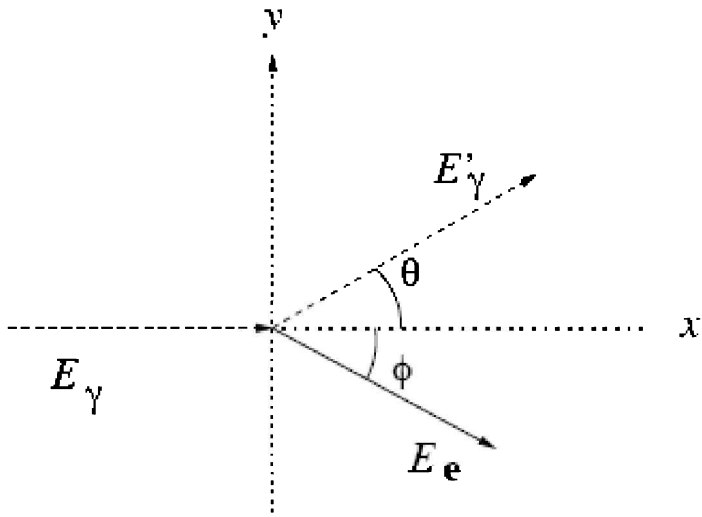


Figura 5.21: Colisión Compton entre un fotón y un electrón.

Este máximo corresponde al mínimo de la energía del fotón difundido:

$$E_\gamma'^{\min} = \frac{E_\gamma}{1 + 4E_\gamma}$$

que suele aparecer en los espectros de las fuentes radiactivas γ como un pico muy ancho, llamado pico de *backscattering*, puesto que corresponde

al efecto fotoeléctrico en el detector de los fotones con energía $E_\gamma'^{\min}$, emitidos tras una difusión hacia atrás del fotón inicial E_γ. Para valores elevados de E_γ el pico de *backscattering* tiende a $E'_\gamma \approx mc^2/2$, es decir, cercano a unos 250 keV. En la figura 5.22, la distancia entre E_γ y el *Compton edge* viene dada por E_c, que tiene un valor igual a $E_\gamma'^{\min}$.

Los espectros de fuentes emisoras de fotones suelen ser más complejos que el caso mostrado en la figura 5.22. Así por ejemplo, si se mide el espectro de una fuente tal que la energía de los fotones es suficiente para crear pares e^+ e^-, entonces la aniquilación de los positrones produce la aparición de otros fotopicos que se superponen al fondo Compton. En efecto, si se mide el e^- y los dos fotones del e^+, aparecerá el pico con la energía del fotón. Pero, si uno de los fotones escapa del detector, aparecerá otro pico en $E - 0{,}511$ MeV (el llamado pico de escape simple) y, si los dos fotones escapan, aparecerá el pico de escape doble en $E - 1{,}022$ MeV.

El espectro Compton se obtiene a partir de la sección eficaz de Klein-Nishina, y su expresión es:

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \frac{\pi r_e^2}{mc^2\epsilon^2}\left[2 + \frac{t^2}{\epsilon^2(1-t)^2} + \frac{t}{1-t}\left(t - \frac{2}{\epsilon}\right)\right]$$

en donde se ha escrito $t = \frac{T_e}{E_\gamma}$ y, como antes, $\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$.

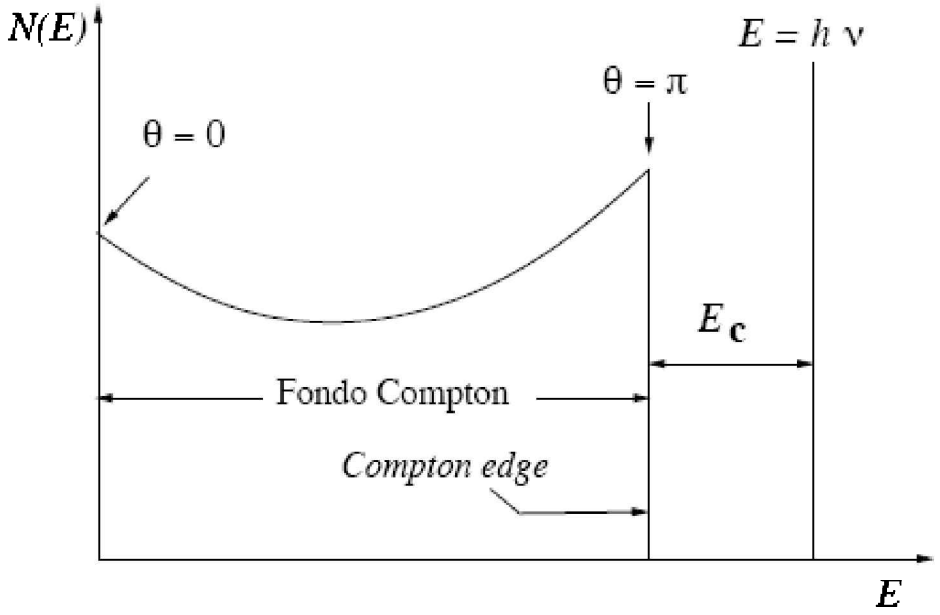


Figura 5.22: Espectro energético (teórico) de los electrones producidos en el efecto Compton. La distancia entre $E_\gamma = h\nu$ y el *Compton edge* viene dada por E_c, que tiene un valor igual a $E'^{\min}_{\gamma}$, definido en el texto.

5.7.3 Creación de pares $e^+ e^-$

El proceso $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$, en presencia de un campo eléctrico intenso (de un núcleo, por ejemplo), es posible si $E_\gamma \geq 1{,}022$ MeV ya que la conservación de la energía exige que:

$$E_\gamma = T_+ + mc^2 + T_- + mc^2$$

y el ángulo de emisión del par $e^\pm$ a alta energía sigue la ley $\theta \sim \frac{mc^2}{E_e}$. El umbral de creación de un par es mayor ($4m_e c^2$) si tiene lugar en presencia del campo de un electrón en vez de un núcleo masivo.

La energía total del electrón es $E_- = T_- + mc^2$ y la del positrón $E_+ = T_+ + mc^2$. El ángulo de emisión del par $e^\pm$ respecto a la dirección del fotón, a

alta energía, cumple $\theta \sim \frac{mc^2}{E_\pm}$; es decir, a muy alta energía, electrón y positrón se emiten a muy pequeño ángulo. Se trata del proceso dominante para $E_\gamma \geq 5$ MeV. Físicamente se trata del proceso inverso del *bremsstrahlung*. El cálculo, hecho por Bethe y Heitler, tiene de nuevo en cuenta el apantallamiento de la carga nuclear. Para ello se usa el parámetro $\xi = \frac{100\, mc^2 E_\gamma}{E_+ E_- Z^{1/3}}$, que cuando $\xi \approx 0$ representa apantallamiento total.

Para energías relativistas y con apantallamiento arbitrario, utilizando la aproximación de Born, se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma^3}\left([E_+^2 + E_-^2]\left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z_2 - f(Z_2)\right] + \frac{2}{3}E_+E_-\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z_2 - f(Z_2)\right]\right)$$

en donde la función $f(Z_2)$ se introduce para tener en cuenta la interacción de los pares creados con la carga nuclear. Como se hizo con el cálculo de la sección eficaz de bremstrahlung en la Sección 5.6.2, ahora se pueden obtener ecuaciones límite:

a) para $\xi >> 1$ (sin apantallamiento),

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma^3}\left(E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3}E_+E_-\right)\left[\ln\frac{2E_+E_-}{m_e c^2 E_\gamma} - \frac{1}{2} - f(Z_2)\right]$$

b) y en el caso de apantallamiento total ($\xi = 0$), la sección eficaz diferencial para producir un positrón de energía E_+ es:

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4\sigma_0}{E_\gamma^3}\left[\left(E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3}E_+E_-\right)\left[\ln\frac{183}{\sqrt[3]{Z_2}} - f(Z_2)\right] - \frac{E_+E_-}{9}\right]$$

donde σ_0 la misma constante vista en (5.29).

Normalmente para obtener la sección eficaz total debe realizarse una integración numérica de las expresiones vistas más arriba. En los casos límites se puede integrar analíticamente, resultando:

a) sin apantallamiento ($\xi >> 1$)

$$\sigma_{\text{par}} = 4\sigma_0 \left\{ \frac{7}{9} \left[\ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} - f(Z_2) \right] - \frac{109}{54} \right\}$$

b) y, en el caso de apantallamiento total, se obtiene:

$$\sigma_{\text{par}} = 4\sigma_0 \left\{ \frac{7}{9} \left[\ln(183/Z_2^{1/3}) - f(Z_2) \right] - \frac{1}{54} \right\}$$

Como cabía esperar, la materialización del fotón o creación de pares es prácticamente el mismo proceso que el bremsstrahlung, salvo que:

$$\sigma_{\text{par}} = \frac{7}{9}\sigma_{\text{rad}}$$

También puede incluirse la creación de pares por interacción con los e^- del átomo; para ello debe cambiarse $Z_2^2 \rightarrow Z_2(Z_2+1)$.

5.7.4 Atenuación de fotones. Longitud de conversión X_c

La probabilidad de absorción total de un fotón será:

$$\boxed{\sigma_\gamma = \sigma_{\phi} + Z_2\sigma_c + \sigma_{\text{par}}} \qquad (5.45)$$

La probabilidad de absorción por unidad de longitud será $\mu = n_a \cdot \sigma_\gamma = \frac{N_A}{A}\rho\sigma_\gamma$, llamado coeficiente de absorción total. Si se representa la variación con la energía del coeficiente de absorción

total de los fotones se encuentra la dependencia que se muestra en la figura 5.23, donde se ha tomado como blanco un centelleador NaI.

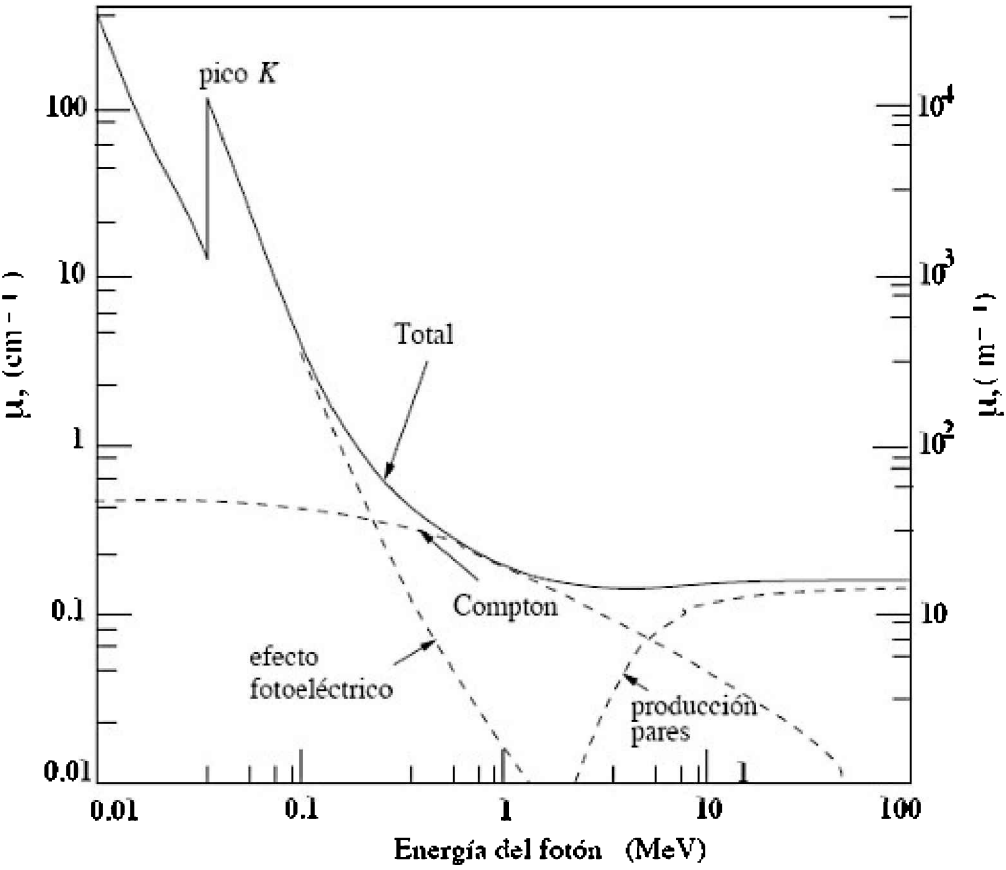


Figura 5.23: Coeficiente de absorción, μ, para fotones en un detector de NaI.

Esta figura contiene la dependencia de todos los efectos estudiados: fotoeléctrico, Compton y creación de pares.

La fracción de fotones que sobrevive al atravesar un recorrido x de materia es:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\mu x} \tag{5.46}$$

y es válida para toda energía. Se suele utilizar también el coeficiente de absorción másico, $\mu_m = \mu/\rho$ (cm^2/g).

Por ejemplo, la teoría de Klein-Nishina da el coeficiente de absorción para energías del fotón $E_\gamma >> m_e c^2$, puesto que la sección eficaz vista en (5.44) se simplifica, y como $\mu/\rho = Z_2 n \sigma_c$, se obtiene:

$$\mu_m = \mu/\rho = \frac{Z_2}{A}\frac{0{,}077}{E(\mathrm{MeV})}(1{,}86 + \ln E) \qquad [\mathrm{cm^2\ g^{-1}}]$$

que, por ejemplo, para el agua resulta ser $\mu_{\mathrm{agua}} = \frac{4{,}3}{E}(1{,}86 + \ln E) \qquad [\mathrm{m^{-1}}]$. Esta sería la contribución de la interacción Compton al coeficiente de absorción.

Longitud de conversión X_c

A altas energías, domina la producción de pares, y como σ_{par} es constante se puede proceder como en el *bremsstrahlung* y se puede introducir la longitud de creación de pares o longitud e conversión X_c:

$$\frac{1}{X_c} = n_a \sigma_{\mathrm{par}} = \frac{7}{9} n_a \sigma_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\frac{9}{7} X_0}$$

que está relacionada con la longitud de radiación X_0 inversamente a la relación existente entre las secciones eficaces, $\sigma_{\mathrm{par}} = \frac{7}{9}\sigma_{\mathrm{rad}}$.

Por ejemplo, para el centelleador NaI, que tiene una densidad de 3,67 g cm^{-3}, se ha visto que X_0 = 2,59 cm (9,49 g cm^{-2}), o sea X_c = 3,33 cm (12,20 g cm^{-2}).

Por lo tanto, para alta energía:

$$\boxed{I = I_0 e^{-x/X_c}} \qquad (5.47)$$

la intensidad de un haz de fotones se atenúa exponencialmente.

La figura 5.24 muestra el coeficiente de atenuación másico μ/ρ, en función de la energía del fotón para cinco elementos, desde el aluminio al plomo.

Por último, se podría hablar de alcance de fotones, definiéndolo como aquel recorrido en el que la intensidad (exponencial) disminuye de un factor 2. Así, por ejemplo, se puede comparar el alcance en el aluminio (ρ_{Al} = 2,7 g cm^{-3}) para varios tipos de partículas de 1 MeV de energía, dando:

$$R_\alpha \approx 3\ \mu\text{m},\ R_\beta \approx 1{,}6\ \text{mm},\ R_\gamma \approx 4{,}3\ \text{cm}.$$

5.8 Otros fenómenos: *Channeling*, Efecto Cherenkov

Se estudian aquí, otros fenómenos que pueden tener lugar cuando las partículas atraviesan la materia, pudiendo ser utilizados para su detección: se trata del fenómeno llamado *channeling* y el conocido efecto Cherenkov.

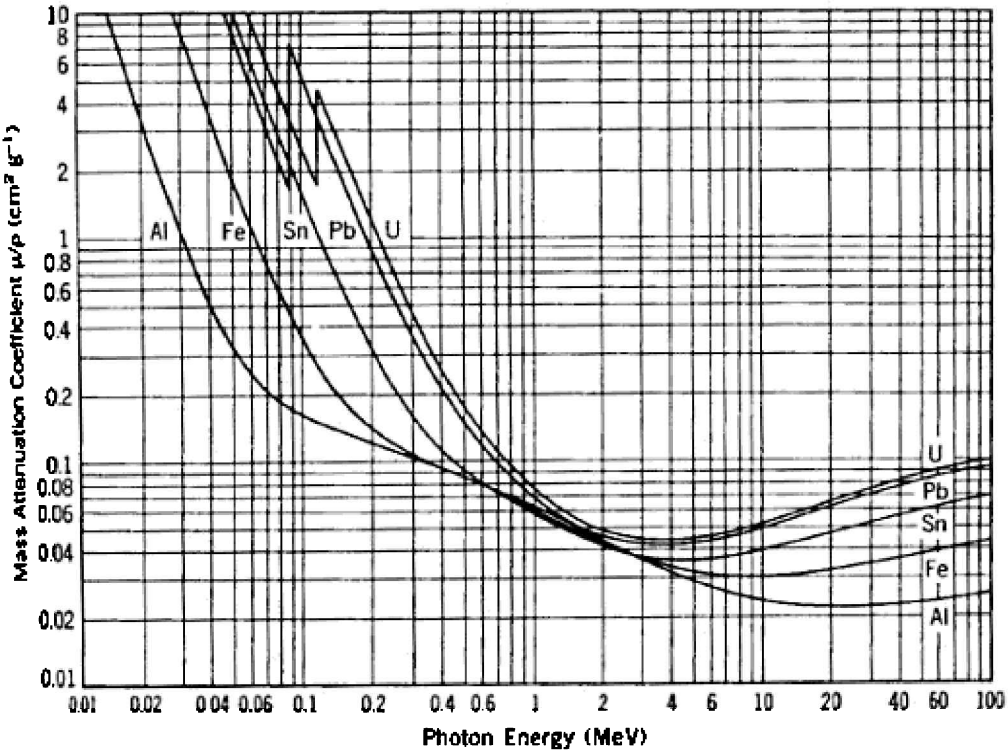


Figura 5.24: Coeficiente de atenuación másico μ/ρ en función de la energía del fotón, para cinco elementos. Fuente de datos: tablas del Particle Data Group (http://pdg. lbl. gov/).

5.8.1 *Channeling*

El fenómeno de *channeling* es debido a la estructura cristalina de ciertos materiales. En caso de que las partículas incidan sobre el cristal con un ángulo respecto al eje de simetría del cristal menor que el ángulo crítico, dado por:

$$\phi_c = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2 a_0 A d}}{1670 \beta \sqrt{\gamma}}$$

entonces la pérdida de energía es despreciable. No se cumple la ley de Bethe. Es como si la partícula no encontrara electrones en su trayectoria.

En la anterior fórmula, a_0 es el radio de Bohr y d es la separación interatómica. Para ángulos $\varphi > \varphi_c$ no existirá el fenómeno de *channeling*.

5.8.2 Efecto Cherenkov

El denominado efecto Cherenkov fue descubierto el año 1934 por el físico ruso Cherenkov, al observar las emisiones azuladas en fluidos bombardeados por la radiación de una fuente de radio. Es un fenómeno observable en las piscinas de agua de las centrales nucleares, que contienen materiales radiactivos desechados del reactor. Por este descubrimiento, le fue concedido el premio Nobel de Física en 1958 a Pavel Cherenkov junto a Il'ja M. Frank e Igor Y. Tamm.

El efecto Cherenkov es la emisión coherente de radiación (luz entre 350-500 nm, que corresponde a un rango de longitudes de onda apto para utilizar fotomultiplicadores), debida a la excitación polarizada de los átomos de un medio material, llamado radiador, cuando una partícula atraviesa dicho medio con una velocidad mayor que la velocidad de propagación de la luz en ese medio:

$$v > c/n$$

siendo n el índice de refracción del medio.

Este efecto puede visualizarse mediante la figura 5.25. Mientras la partícula recorre la distancia del punto 1 al punto O, o sea, $\ell = vt$, el frente de la onda electromagnética se ha desplazado según la esfera de radio $r_1 = \frac{c}{n}t$. El ángulo θ_c es el de emisión del cono de luz Cherenkov. Por lo tanto, la emisión de luz Cherenkov se produce a un ángulo, alrededor de la dirección del movimiento de la partícula, dado por

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n} \tag{5.48}$$

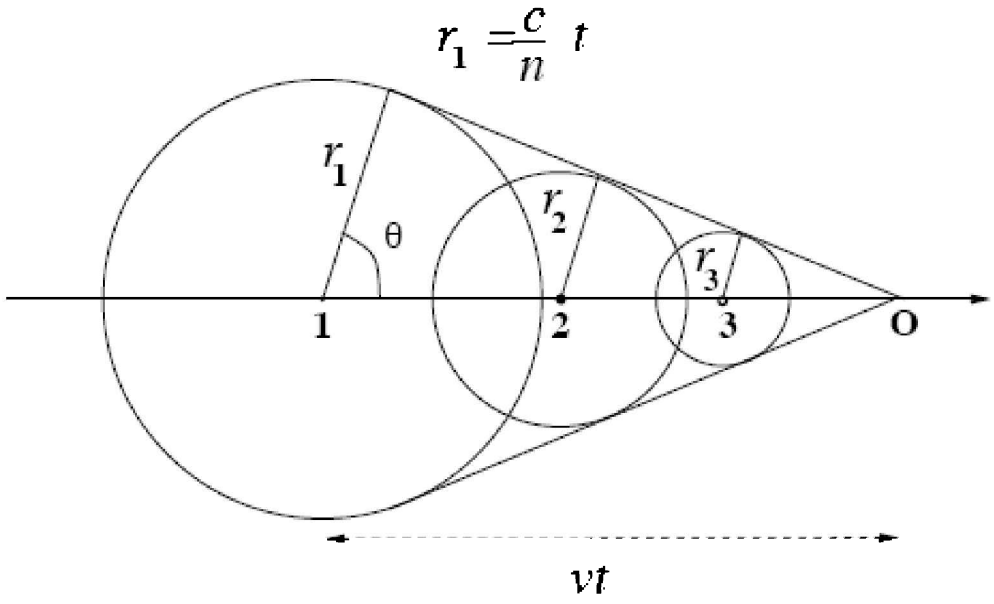


Figura 5.25: Esquema del efecto Cherenkov.

Existirá una velocidad umbral (correspondiente a un ángulo de emisión $\theta_c = 0$) a partir de la cual se producirá el efecto Cherenkov:.

$$\beta_u = \frac{1}{n} \tag{5.49}$$

lo que se traduce, equivalentemente, en una energía umbral:

$$E_u = \gamma_u mc^2 = mc^2 \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{5.50}$$

siendo m la masa de la partícula. Por ejemplo en el agua (n = 1,33), β_u = 0, 75, osea que si se trata de electrones, la energía cinética umbral, que es la mínima será $T_u^{(e)} = E_u - m_e c^2 = (\gamma_u - 1) m_e c^2 = 0,26$ MeV. El ángulo de emisión variará con β, o sea con la energía, hasta llegar a un valor máximo (en teoría es para β = 1, aunque inalcanzable para las partículas) que vendrá dado por $\cos \theta_c^{\max} = \frac{1}{n}$; en el caso del

agua vale $\theta_c^{\max} = 41{,}2^{\circ}$.

Este fenómeno es particular a este tipo de emisión y se distingue de la luz de centelleo que, por el contrario, se emite de manera isótropa.

La electrodinámica clásica (cálculos realizados por Frank y Tamm en 1937) permite probar que la energía perdida por la partícula al atravesar un espesor L, emitiendo fotones de frecuencia w es,

Image

Suponiendo L muy delgado, puede tomarse $L = dx$ con lo que esta última expresión se puede integrar para las frecuencias w de emisión de luz Cherenkov con lo que se obtiene la pérdida de energía por unidad de recorrido,

Image

integral que tiene por límites $\lambda_1 = 350$ nm y $\lambda_2 = 550$ nm, es decir fotones con longitudes de onda que van desde el ultravioleta hasta el color verde. Así pues, se puede concluir que la pérdida de energía por unidad de recorrido vale, para partículas con número de carga $Z_1 = 1$:

image

Por ejemplo, para el agua, $n = 1, 33$, una partícula relativista pierde, por emisión de fotones Cherenkov) unos 590 eV/cm, cifra que es del orden de 10^{-3} veces más pequeña que la pérdida de energía por ionización. En efecto; la cantidad de energía emitida sólo representa $\sim 10^{-3}$ MeV / g $\cdot$ cm^{-2}. Por lo tanto, en los materiales sólidos (≥ 1 g $\cdot$ cm^{-2}) la pérdida de energía debida al efecto Cherenkov es unas mil veces menor que la de ionización. ¶

El espectro de fotones Cherenkov (dado que $E = N\hbar w$) sigue la ley

Image

o sea que, en el espectro visible, el número de fotones emitidos por efecto Cherenkov por unidad de recorrido es

image

El número de fotones emitidos es muy pequeño; por ello su detección es más difícil que en el caso del centelleo. Si se compara el número de fotones emitidos por efecto Cherenkov, con el número de fotones de centelleo, por cada MeV de energía perdida por la partícula, se obtiene un factor 10^{-2}. Estos fotones son detectados por fotomultiplicadores, al igual que en el caso de los centelleadores. Sin embargo, al existir un número de fotones mucho menor, la eficiencia de los detectores de Cherenkov puede ser menor que la de los centelleadores. El número de fotoelectrones será $N_e = N_0 L \sin^2 \theta_c$, siendo N_0 un parámetro que depende del diseño del detector y L la longitud del mismo. Suponiendo que el número de fotoelectrones N_e es tan sólo $N_e = 5$, la eficiencia del detector se calcula utilizando la estadística de Poisson; la probabilidad de detectar 0 fotoelectrones cuando se espera una media de 5 es $f_P(0, 5) = e^{-5}$. La eficiencia será $\varepsilon = 1 - e^{-5}$; es decir $\varepsilon = 99\ \%$.

A los detectoresCherenkovse les suelen dar tres tipos de utilización: como detectores umbral, diferenciales o RICH.

Los detectores Cherenkov de tipo umbral suelen instalarse en experimentos de blanco fijo. Si dan señal luminosa, la partícula tiene una velocidad superior a la velocidad umbral, que dependerá del material radiador según (5.49). Un ejemplo de diseño de contador umbral puede verse en la figura 5.26. Se observa que el espejo refleja la luz Cherenkov de la partícula incidente, independientemente del ángulo cherenkov.

Los detectores Cherenkov diferenciales, permiten medir el ángulo del cono de luz Cherenkov, por lo tanto, pueden seleccionar partículas de una energía determinada. Se suelen instalar en los haces de partículas con lo que ayudan a discriminar si la partícula incidente en un blanco de un experimento es un protón, kaón o pión. Para ello, la luz sólo pasa por las rendijas situadas a un radio R de eje, como puede verse en la figura 5.26

b), con lo que se puede seleccionar el tipo de partícula. Si el espejo es esférico, con radio de curvatura $2f$, la distancia focal es f y la imagen proyectada del cono sobre la superficie de detección es un anillo de radio $R = f \tan \theta$ en el plano focal. Se puede colocar un diafragma en forma de círculo de radio R y anchura ΔR, cuya función sea la de dejar pasar sólo la luz Cherenkov producida a ese ángulo a los fotomultiplicadores. El correspondiente ángulo aceptado será $\Delta\theta = \cos^2 \theta \Delta R/f$ lo que corresponde a una resolución en la medida de la velocidad: $\Delta\beta/\beta = tg\theta\Delta\theta$.

image

Figura 5.26: Esquema de a) detector Cherenkov umbral y b) detector Cherenkov diferencial.

Los detectores RICH son los más modernos y completos. Están diseñados para medir la proyección del cono de luz sobre una de sus paredes, con lo que pueden identificar la partícula (conocer su energía y su masa) que ha atravesado el detector. Suelen utilizarse en todos los nuevos espectrómetros instalados en los colisionadores.

5.8.3 Descubrimiento del antiprotón

Se describe a continuación el experimento en el que se descubrió el antiprotón (O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand y T. Ypsilantis[6]). Es un bello ejemplo del uso combinado de centelleadores y de detectores Cherenkov. Fue resultado de la necesidad de responder a la pregunta: ¿tiene el protón su correspondiente antipartícula, igual que la tiene el electrón? Si así fuera, leptones y bariones tendrían todos la antipartícula correspondiente. Para responder esta pregunta fundamental se necesitaron dos ingredientes: 1) Diseñar y construir un acelerador para producir suficientes antiprotones y utilizar por ejemplo la reacción p + p

$\rightarrow$ p + p + p + Image , cuya energía umbral es $E_p = 7m_pc^2$. Las búsquedas en las interacciones de rayos cósmicos no dieron resultado positivo porque no presentan una producción significativa de antiprotones. Así, E. Lawrence y E. MacMillan, en los años 1950, lideraron el proyecto del Bevatrón[7] en el laboratorio de Berkeley. 2) Construir un espectrómetro de partículas que identifique los antiprotones; partículas con la masa del protón, pero con carga eléctrica negativa. Para ello O. Chamberlain *et al.*,, diseñaron el espectrómetro detallado en la figura 5.27, donde se observan los tres instrumentos utilizados: a) un imán selector del momento de las partículas, b) un sistema TOF, de medida del tiempo de vuelo y c) un sistema de detectores Cherenkov para identificar los piones y antiprotones.

La detección de los antiprotones se basó, en primer lugar, en una selección del momento (1,19 GeV/c) de las partículas negativas producidas en la interacción p + p a 7.2 GeV/c, gracias a dos imanes dipolares (M1 y M2 en la figura 5.27) junto con la medida del tiempo de vuelo de las partículas entre dos planos de centelleadores (S1 y S2) separados por una distancia d = 12 m y su identificación en dos detectores Cherenkov en modo umbral ($C1$ y $C2$).

image

Figura 5.27: Esquema del experimento de Chamberlain *et al.*,.

El tiempo de vuelo es Image ns, es decir, t_π = 40 ns para los piones y t_p = 51 ns para los protones, de forma que con una resolución temporal $\sigma_t \approx$ 1 ns, es suficiente para su separación. Por otra parte, la velocidad de los piones es β_π = 0, 99 mientras que la de los antiprotones es β_p = 0, 78. El detector Cherenkov $C2$, tenía el umbral de los piones (los protones no daban señal) y el detector Cherenkov $C1$, sólo era sensible a los protones, porque se seleccionó el umbral y el ángulo Cherenkov correspondiente a los protones. De esta manera el paso de un pión por el espectrómetro

queda identificado con la coincidencia Image y el paso de un antiprotón por la coincidencia Image. En la figura 5.28 puede verse el espectro obtenido, donde se identifica con claridad el pico de antiprotones. Por este descubrimiento, Owen Chamberlain y Emilio Segrè fueron galardonados con el Premio Nobel en 1959.

image

Figura 5.28: Espectro de tiempo vuelo para piones y antiprotones del experimento de Chamberlain *et al.*,.

5.9 Problemas

5.1 Energía umbral para una reacción entre partículas

Dada la reacción:

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

a) Demostrar que la energía cinética mínima de la partícula incidente a (suponiendo el blanco b en reposo) para que dicha reacción pueda tener lugar viene dada por la expresión:

Image

con Image el valor Q de la reacción.

b) Dado que la energía y la cantidad de movimiento son magnitudes que deben conservarse en un proceso de producción de pares, demostrar que dicho proceso no puede tener lugar en el vacío.

c) Demostrar, así mismo, que la energía mínima que debe tener un fotón para producir un par electrón–positrón en la vecindad de un núcleo es ligeramente superior a $2m_e c^2$, mientras que si la

materialización tiene lugar en la vecindad de un electrón la energía mínima necesaria es $4m_e c^2$.

5.2 Dispersión elástica relativista

Resolver el problema de la dispersión elástica relativista de una partícula de masa m que incide en un blanco en reposo de masa M. Para ello se pide:

a) Demostrar que la energía cinética máxima $W_{\text{máx}}$ transferida al blanco inicialmente en reposo puede escribirse como:

Image

donde $\eta = \beta\gamma$.

b) Discutir el resultado del apartado anterior en el caso en que $m \sim M$. Obtener también una forma aproximada para $W_{\text{máx}}$ en los casos que satisfagan $\beta \ll 1$ y $m \gg M$.

c) Calcular $W_{\text{máx}}$ para el caso de la dispersión por electrones de un muón incidente de energía cinética $T = 100$ MeV y para una partícula α de energía cinética $T = 5,3$ MeV. Tomar $m_\mu = 105,66$ MeV/c^2 y $m_\alpha = 3,727$ GeV/c^2.

d) Obtener la energía final de la partícula dispersada m en función de su energía inicial y al ángulo de dispersión θ en el referencial del blanco estacionario. Tomar en este caso la aproximación ultrarelativista para la partícula incidente. ¿Cuál es el efecto de retroceso del blanco?

5.3 Interacción de partículas α con la materia

Considérese una fuente radiactiva de ^{210}Po con una actividad de 1 μCi situada entre las paredes de un condensador como el indicado en la figura 5.29. El dispositivo permite detectar todos los iones producidos por cada partícula α. Si se supone la emisión isótropa y que la energía necesaria para producir un par

de iones en el aire es de 35 eV en condiciones normales, se pide:

Figura 5.29: Diagrama del dispositivo empleado en el Problema 5.3 para la detección de partículas α emitidas por una fuente de ^{210}Po.

a) ¿Cuál es la corriente que se mide en el electrómetro *A*?

b) Sabiendo que las partículas α consideradas liberan en el aire 2900 pares de iones por mm recorrido en condiciones normales de presión y temperatura, determinar el poder de frenado del aire en MeV cm^2/g.

c) Evaluar el número de pares de iones por milímetro que se liberan en el aire, también bajo condiciones normales, al ser atravesado por deuterones de la misma velocidad que las partículas α anteriormente consideradas.

d) A continuación se extrae la fuente de partículas α del dispositivo y se sitúa, entre un colimador, ante una lámina delgada de Au, en incidencia normal. El número N de partículas α difundidas bajo ángulos superiores a 90°, es decir, partículas α reflejadas por el blanco (backscattering), se mide con un contador adecuado. La medida se repite bajo las mismas condiciones reemplazando la lámina de Au por otra de Ag de idéntico espesor. Calcular el valor de la relación N(Au)/N(Ag).

e) Obtener la velocidad de las partículas α emitidas por la fuente de ^{210}Po si se asume que no son relativistas y estimar el error introducido en este caso.

Datos: E_α = 5,3 MeV, m_α = 3,7 GeV/c^2, ρ_{aire} = 1,225 × 10^{-3} g/cm^3, e = 1,602×10^{-19} C, ρ_{Au} = 19,32 g/cm^3, ρ_{Ag} = 10,50 g/cm^3, M(Au) = 196,97 u, M(Ag) = 107,87 u.

5.4 Radiación de *bremsstrahlung*

Cuando una partícula cargada atraviesa el campo Coulombiano de un núcleo sufre una deceleración y en consecuencia pierde energía por emisión de radiación electromagnética. El fenómeno se conoce como radiación de frenado o *bremsstrahlung*, y afecta en gran manera a los electrones, dado que la pérdida de energía por radiación varía con la inversa del cuadrado de la masa de la partícula incidente. Bethe y Heitler establecieron la expresión para la sección eficaz diferencial de producción de fotones de radiación de frenado en la banda de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$ para núcleos de carga Ze y electrones relativistas con energía cinética $T \gg m_e c^2$ (energía en reposo del electrón) en la forma:

Image

donde ξ es un parámetro que varía con Z, pero que se puede considerar constante e igual a 1,3, α es la constante de estructura fina y r_e el radio clásico del electrón. Se pide:

a) Calcular el número promedio de fotones, $N(\nu)d\nu$, emitidos en la banda de frecuencias entre ν, y $\nu + d\nu$, creados por un electrón que atraviesa un espesor elemental dx de un medio con n átomos idénticos por unidad de volumen. Calcular la energía media perdida por el electrón incidente en su recorrido dx, sabiendo que la energía máxima del fotón de frenado no puede exceder la energía cinética del fotón.

b) Obtener la expresión de la energía del electrón en función del espesor atravesado en el medio. A partir de esta ecuación obtener también una expresión para la longitud de radiación L_{rad}. ¿Cuánta energía pierde un electrón de 1 GeV al atravesar una longitud de radiación en plomo?

c) Suponer que un haz de electrones de 500 MeV atraviesa en incidencia normal una lámina de plomo con un espesor de 1/10 L_{rad}. Mostrar que la distribución angular de los fotones

producidos viene dominada por la dispersión múltiple de Coulomb de los electrones incidentes y no por la distribución angular de los fotones radiados por *bremsstrahlung*.

d) Considérese ahora un medio material compuesto por una mezcla uniforme de átomos de diferentes especies. Denotemos por Z_i y n_i el número atómico y el número de átomos por unidad de volumen para la especie *i*, respectivamente. Demostrar que la ley de evolución de la energía cinética del electrón tiene la misma forma que en el apartado **b)**. ¿Que relación existe entre la longitud característica del medio compuesto y las longitudes características de cada especie? Obtener el valor de dicha longitud para electrones en agua.

Datos: M(H) = 1,00794 u, M(O) = 15,9994 u, L_{rad}(H) = 63,04 g cm^{-2} y L_{rad}(O) = 34,24 gcm^{-2}.

5.5 Poder de frenado para muones y electrones

El poder de frenado másico para muones cósmicos puede parametrizarse en cálculos y estimaciones numéricas como:

Image

donde el término α representa la contribución contínua debida a procesos de ionización del medio, que resulta prácticamente constante e independiente de la energía, mientras que el término $-E/\xi$, con ξ constante, corresponde a las contribuciones discretas de *bremsstrahlung*, interacciones fotonucleares y producción de pares e^+ e^-. Se pide:

a) Calcular el valor de la energía crítica para muones cósmicos que atraviesan un medio material como el granito. Tómese para ello $\alpha \sim 2$ MeV/ (g/cm^2) y $\xi \sim 2{,}5 \times 10^5$ g/cm^2.

b) Los muones cósmicos pueden ser observados en minas y experimentos subterráneos a más de 1 km de profundidad.

Estimar la energía mínima inicial que deben tener estos muones para atravesar granito, cuya densidad es ρ = 2,75 g/cm^3 y poder ser detectados a esta distancia.¿Porqué no se observan rayos cósmicos de protones o piones en este tipo de experimentos subterráneos? Calcúlese también el alcance de muones con una energía inicial de 100 GeV.

c) Un electrón con una energía de 10 GeV atraviesa una placa de aluminio (ρ = 2,70 g/cm^3) de 1 cm de espesor. Estimar cuanta energía se pierde e indicar si está por encima o por debajo de su energía crítica. Tómese para estos electrones los valores α = 2,19 MeV/(g/cm^2) y ξ = 24,7 g/cm^2.

d) Estimar el espesor necesario de una placa de aluminio para absorber completamente electrones de una energía cinética de 1 MeV.

5.6 Efecto fotoeléctrico

Un dispositivo fotoeléctrico consta de una célula fotosensible de 1 mm de anchura y 10 cm de longitud, que se ilumina con un foco puntual, de flujo esférico, de 0,038 W y luz monocromática de 4600 Å con una eficiencia del 3%. El foco se sitúa a una distancia de 5 cm normal a uno de los extremos de la cinta.

a) Si el rendimiento fotoeléctrico es de 0,327 electrones/fotón, ¿cuál será en μA la corriente eléctrica acusada en el dispositivo?

b) Si el umbral fotoeléctrico del sodio que forma la célula es de 5420 Å calcular la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos.

c) Demostrar, aplicando conservación de energía–momento, que el efecto fotoeléctrico no puede tener lugar sobre un electrón libre.

5.7 Cinemática del efecto Compton

Resolver el problema de la dispersión Compton entre un fotón incidente de energía $E_\gamma = h\nu$ y un electrón casi libre inicialmente en reposo, en términos de:

a) Las energías máxima y mínima del fotón difundido para los casos en que $\alpha = 1$ y $\alpha \gg 1$ donde:

Image

es la denominada energía reducida del fotón incidente.

b) El valor máximo del desplazamiento Compton (variación entre las longitudes de onda del fotón difundido e incidente).

c) La energía cinética de los electrones de retroceso. ¿Cuál es su valor máximo y los ángulos de emisión del fotón y del electrón de retroceso en este caso? Supóngase que $\alpha = 1$.

d) ¿Bajo qué ángulo se observarán los electrones de retroceso correspondientes a los fotones difundidos normalmente a la dirección de incidencia? Supóngase también que $\alpha = 1$.

5.8 Sección eficaz del efecto Compton La sección eficaz diferencial presentada por un electrón para la difusión Compton de un fotón incidente de energía E, por unidad de ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección del ángulo polar θ, viene dada por la siguiente expresión, original de Klein y Nishina, y válida para fotones incidentes no polarizados:

Image

a) Establecer la expresión para la sección eficaz diferencial correspondiente a la emisión de un fotón difundido con una energía comprendida entre E' y $E' + dE'$.

b) Integrando la expresión anterior, determinar la sección eficaz total del efecto Compton, σ_C, para fotones de energía reducida α.

c) Obtener una expresión asintótica para σ_C, válida para muy altas energías ($\alpha \gg 1$), y una aproximación válida para muy bajas energías ($\alpha \ll 1$) limitándose a los términos de segundo orden en α. Como aplicación calcular σ_C para $\alpha = 10^{-2}$, 1 y 10^2.

d) Trazar la curva del espectro energético de los electrones de retroceso para fotones incidentes de energías $\alpha = 1$, $\alpha = 2{,}35$ y $\alpha = 5{,}4$.

e) Considerando un gran número de difusiones Compton obtenidas a partir de fotones incidentes de la misma energía α, establecer la expresión de la energía media de los fotones difundidos, $\langle E' \rangle$, y la fracción de energía que se transfiere por término medio a los electrones. Aplicar para el caso $\alpha = 1$.

5.9 Absorción de fotones en la materia

La expresión para la sección eficaz total de absorción de fotones en un determinado medio de número atómico Z viene dada por la suma de las contribuciones:

$$\sigma = \sigma_{ph} + Z\sigma_C + \sigma_{pair}$$

con σ_{ph}, σ_C y σ_{pair} las secciones eficaces atómicas del efecto fotoeléctrico, Compton y producción de pares, respectivamente.

a) Mostrar que el coeficiente de absorción másico Image resulta prácticamente constante e independiente del tipo de material en el dominio energético donde el efecto Compton es dominante

b) Considerar un haz complejo de fotones compuesto por dos componentes de energías bién definidas E_1 y E_2 ($E_1 > E_2$) e igual intensidad. Si se se sitúa entre el haz un absorbente de 55 cm de espesor de aluminio ($\rho = 2{,}7$ g/cm^3) se observa que la intensidad de la componente menos penetrante se reduce un 10 % con respecto a la intensidad de la más penetrante. A continuación se sitúa un absorbente adicional de aluminio de 7,1 cm de espesor y

se observa que la intensidad residual del haz se reduce a la mitad de su valor. Calcular los coeficientes de absorción lineales y másicos del aluminio para las dos componentes de energías E_1 y E_2.

c) Estimar el error introducido en los resultados del apartado anterior si la intensidad de la componente menos penetrante después de atravesar el primer espesor de aluminio se considera despreciable.

---

[1]El *Pomeron* describe una trayectoria en el plano masa-espín. Es parte del modelo de Regge de interacciones fuertes, utilizado en los años 1960.

[2]Las siglas STP significan *temperatura y presión estándar*, 0^o *C* y 1 atmósfera.

[3]J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York, Wiley, 1962.

[4]H. W. Koch, J. W. Motz, *Rev. Mod. Phys.*,4 (1959) 920.

[5]Y. S. Tsai, *Rev. Mod. Phys.*,46 (1974) 815

[6]O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand y T. Ypsilantis, *Phys. Rev.*, **100 (1955) 947**.

[7]Los norteamericanos usaban el BeV, en vez del GeV, por su costumbre de llamar *Billion* a los mil millones.

6. Detectores de partículas

6.1 Generalidades sobre detectores de partículas

El principio de funcionamiento de un detector es sencillo: una partícula cargada al atravesar el material del detector, ioniza el medio (además de producir excitaciones), pierde energía y como consecuencia da una señal observable y accesible al observador.

Se presentan brevemente a continuación los fenómenos más importantes que sufren las partículas cargadas y los fotones al atravesar la materia. Estos fenómenos serán los fundamentos del funcionamiento de los detectores que se estudiarán más adelante.

6.1.1 Clasificación de detectores de partículas

He aquí una clasificación de detectores de partículas cargadas:

a) Detectores de ionización, eléctricos. Los e^- emitidos por ionización son acelerados por un potencial y a su vez producen más ionización, con lo cual la señal final es amplificada. Si el medio es un gas, funcionan por las descargas en gases (cámaras de ionización, contadores proporcionales, tubos de Geiger–Müller). Entre los líquidos se encuentra el argón, que debe mantenerse a 80K, por lo tanto es necesario un sistema criogénico. El argón líquido se usa sobre todo en calorímetros.

En los cristales semiconductores, son los pares e^-–hueco creados por el paso de la partícula los que determinan la señal. Son usados como detectores de trazas o de vértices (se llaman entonces, detectores de microvértice).

b) Contadores de centelleo, Cherenkov y radiación de transición. Las partículas cargadas excitan los átomos del medio. La emisión luminosa producida en la desexcitación es convertida en pulso eléctrico por efecto fotoeléctrico y amplificada en un fotomultiplicador. En la radiación de transición, los fotones tienen energías de rayos X blandos (2 a 20 keV) y se detectan en contadores de gas.

c) Detectores de trazas. La trayectoria de la partícula se hace visible; por ejemplo, en cámaras de niebla o de Wilson, de burbujas, de chispas, emulsiones fotonucleares, etc.

La única manera de poder detectar partículas neutras es conseguir que interaccionen con el detector y que se produzcan en el estado final partículas cargadas. Gracias a la detección de las partículas cargadas (secundarias) se podrán reconstruir las características de la partícula neutra incidente. Los detectores que se diseñen para partículas neutras deben ser sensibles a las interacciones siguientes:

- Si se quiere detectar fotones (γ), hay que aprovechar la interacción electromagnética de dichos fotones, es decir, el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton o la creación de pares.

- Si se quiere detectar neutrones (n), hay que utilizar la interacción fuerte, por ejemplo, la colisión elástica $np \rightarrow np$, de forma que el protón adquiere energía y es el que se detecta.

- Si se pretende detectar neutrinos (ν), debe existir previamente interacción débil. Pero esto es sólo posible si se dispone de flujos

muy intensos ya que la probabilidad de interacción de un neutrino es insignificante.

La noción de detector engloba también la electrónica asociada. El tratamiento electrónico de las señales, las computadoras, etc., juegan un papel esencial en la detección de partículas.

La información que se extrae de los detectores es muy variada; he aquí las magnitudes que se suelen medir en los detectores:

- Recuento. Es útil, por ejemplo, para medir actividades de fradiactivas.

- Identificación, o sea, conocer la masa. En detectores de trazas, normalmente la traza es debida a la ionización, que es una función f(β, Z), de la velocidad de la partícula y de su carga eléctrica. Además suele utilizarse un campo magnético $\vec{B}$, que curva las partículas en función de su momento.
  También puede identificarse una partícula gracias a los detectores Cherenkov.

- Energía, midiendo alcances en detectores de trazas, o a más alta energía en calorímetros.

- Secciones eficaces de interacción o vidas medias; midiendo las longitudes medias de interacción λ_I o de desintegración λ_D en detectores de trazas.

- Dirección y tiempo de paso, con detectores de trazas, y utilizando técnicas de coincidencias.

- Flujo, contando número de partículas incidentes.

6.2 Magnitudes características de los detectores

Hay que partir de la idea de que no existe un detector de partículas universal. Para cada tipo de partícula y, dependiendo del rango de energías, interesa un tipo distinto de detector.

Existen varias propiedades físicas de los detectores que conviene analizar antes de decidir su uso. En cualquier caso, es siempre necesario conocer magnitudes tales como la resolución energética y la eficiencia. A continuación se definen una serie de magnitudes características de los detectores.

6.2.1 Sensibilidad

La sensibilidad de un detector es su capacidad para producir una señal útil. La sensibilidad depende de σ, la sección eficaz, y de la masa del detector. Ambas determinarán la probabilidad de interacción de la partícula en el medio del detector (o en el caso de fotones, la probabilidad de conversión de la radiación incidente).

Detectores con poca masa detectarán una pequeña parte de la energía y serán poco sensibles a partículas neutras. Por el contrario el material envolvente del detector y el ruido (del detector y de la electrónica) fijarán el mínimo de señal detectable.

6.2.2 Respuesta

Sea una partícula que al atravesar un detector pierde una cantidad de energía E_{rad}. La respuesta del detector se define como:

$$\rho = \frac{V}{E_{rad}} \qquad \text{o} \qquad \rho = \frac{Q}{E_{rad}}$$

siendo V o Q la señal (en voltaje o en carga) del detector. La respuesta debe ser lo más lineal posible.

6.2.3 Función respuesta

Se trata en este caso de medir la energía de las partículas. Una partícula de energía E' atraviesa un detector, depositando toda su energía. La señal del detector, que frecuentemente es un pulso electrónico caracterizable por su altura $PH(E)$ (llamado altura del pulso, en inglés *pulse height*), es la respuesta del detector. Idealmente la respuesta de un detector a partículas de energía E', debería dar un valor $E = E'$, es decir, para un detector ideal la función respuesta es una distribución delta de Dirac $\delta(E' - E)$. Si E no es igual a E', es porque el aparato, además de tener una resolución finita, puede que no haya sido calibrado correctamente. La función respuesta $\rho(E, E')$(o función de resolución energética) permite calcular la probabilidad de que una partícula de energía E' sea registrada con una energía entre E y $E + dE$; o sea, $\rho(E, E')dE$. Lo más frecuente es que la función respuesta $\rho(E, E')$ sea una función de Gauss, y a veces es más complicada. Entonces, partiendo de un espectro teórico $S(E')$ (por ejemplo, la curva de respuesta al paso de un fotón de energía E' en un detector de centelleo tipo NaI, como puede verse en la figura 6.1) el espectro experimental de alturas de pulso, $PH(E)$, que se obtendría sería el resultado de la convolución:

$$PH(E) = \int S(E')\rho(E, E')dE'$$

Normalmente esta es la expresión que se utiliza para determinar el espectro de origen $S(E')$, conocida la función respuesta del detector. Una vez medido el espectro experimental (es decir, las alturas de pulso), debe invertirse la expresión anterior, lo que se convierte en un problema de desconvolución.

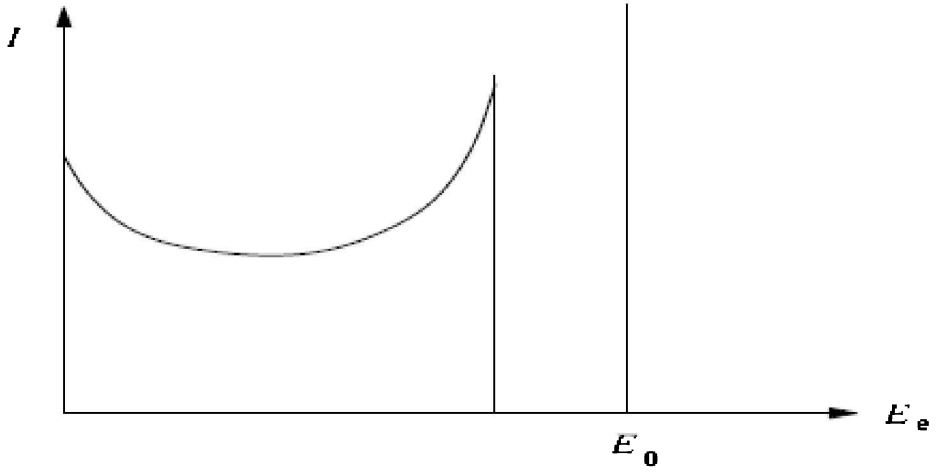


Figura 6.1: Espectro ideal de energías de electrones, medibles en un detector al paso de fotones de energía E_0 (en torno a 1 MeV, sin creación de pares). El pico en E_0 representa el efecto fotoeléctrico y la distribución continua es debida al efecto Compton con su máximo en el extremo del espectro (llamado límite Compton o *Compton edge*).

Ejemplos:

a) Sea una fuente radiactiva que emite S_0 partículas por segundo de energía E_0. El espectro teórico será $S(E) = S_0\delta(E - E_0)$. Si las partículas se miden con un detector cuya función respuesta es $\rho(E, E')$, el espectro de alturas de pulso que se obtendrá será:

$$PH(E) = \int \rho(E, E')S_0\delta(E' - E_0)dE' = S_0\rho(E, E_0)$$

b) Si se trata de un espectro teórico cuya forma sigue la función uniforme (cuadrada) entre E_1 y E_2 y la función respuesta es una función de Gauss (véase la Sección 7.3.4):

$$\rho(E, E') = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(E-E')^2}{2\sigma_r^2}}$$

cuya desviación estándar es σ_r; entonces la distribución experimental será:

$$PH(E) = \int_0^\infty dE' \rho(E.E') S(E') \quad = S_0 \int_{E_1}^{E_2} \rho(E, E') dE' =$$

$$= \frac{S_0}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{E_2 - E}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \text{erf}\left(\frac{E_1 - E}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

es decir, la distribución experimental será una suma de funciones error. Recuérdese que la función error es:

$$\text{erf}\left(\frac{E_0 - E}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{(E_0 - E)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (6.1)$$

c) Si se trata de un espectro teórico cuya forma sigue la función de Gauss $f_s(\mu = E_0, \sigma_s)$ y la función respuesta es también una función de Gauss cuya desviación estándar es σ_r, entonces:

$$PH(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' f_s \rho(E, E') = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi(\sigma_s^2 + \sigma_r^2)}} e^{-\frac{(E - E_0)^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_r^2)}}$$

es decir, la distribución experimental será una función de Gauss pero con varianza $\sigma^2_{\text{total}} = \sigma_s^2 + \sigma_r^2$.

6.2.4 Resolución energética

Se define la resolución energética de un detector como el cociente:

$$\boxed{R = \frac{\Delta E}{E_0}} \qquad (6.2)$$

siendo ΔE la anchura total a media altura (FWHM; del inglés, *full width at half maximum*) de la curva de Gauss correspondiente a la medida de un haz monoenergético de energía E_0, también llamada en este caso curva de resolución (véase la figura 6.2). Por ejemplo para γ de 1 MeV, un detector de centelleo tipo *NaI* tiene una resolución energética aproximadamente del 8 %.

Para detectores delgados (en los que la pérdida de energía por unidad de recorrido dE/dx es pequeña), el número de ionizaciones $N_{\pm}$ es pequeño y entonces se aplica la estadística de Poisson (véase la Sección 7.3.3), con lo que, partiendo de $N_{\pm} = E/w$, siendo w la energía necesaria para crear un par $e^- X^+$ se tiene que $\sigma^2 = N_{\pm}$, con lo que la resolución en energía viene dada por el error estadístico que se tiene sobre la determinación de $N_{\pm}$:

$$R = \frac{\Delta E}{E} = 2,35\frac{\sqrt{N_{\pm}}}{N_{\pm}} = 2,35\sqrt{\frac{w}{E}}$$

puesto que FWHM $= 2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma = 2,35\,\sigma$.

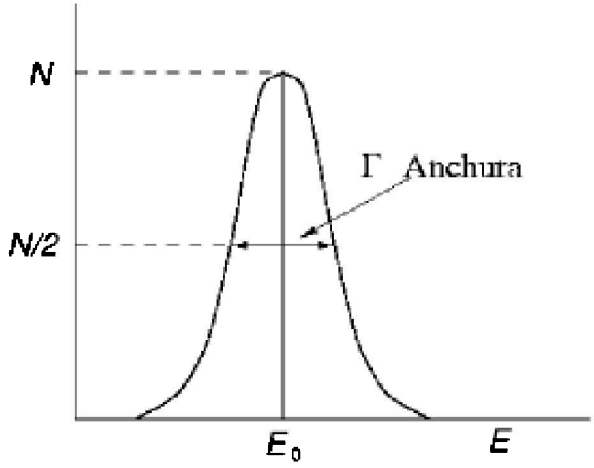


Figura 6.2: Esquema para el cálculo de la resolución energética de un detector. La anchura total a media altura $\Delta E = \Gamma$, es denominada FWHM.

Si la partícula pierde toda la energía, entonces ya no existen las fluctuaciones debidas a dE/dx y, siguiendo a Fano, se cumple que $\sigma^2 = FN_{\pm}$, siendo F el factor de Fano, que para gases vale $F \leq 0,01$, y para centelleadores $F \approx 1$. Entonces se tendrá una resolución mejor:

$$R = 2,35\sqrt{\frac{Fw}{E}} \tag{6.3}$$

El cálculo de la resolución total del detector se hará sumando cuadráticamente la resolución anterior a la debida a la electrónica y a la de otros factores que puedan intervenir. La importancia de la resolución se manifiesta en el poder de separar pulsos de radiación de distinta energía. Por ejemplo en la figura 6.3, la señal se muestra en la figura 6.3-a). El impacto de la resolución puede entenderse al comprobar que en 6.3-b) la anchura $2\Gamma < E_2 - E_1$, en 6.3-c) ya se cumple $2\Gamma = E_2 - E_1$ y los picos todavía pueden resolverse, mientras que en 6.3-d) con peor resolución Γ ya no se identifican los picos.

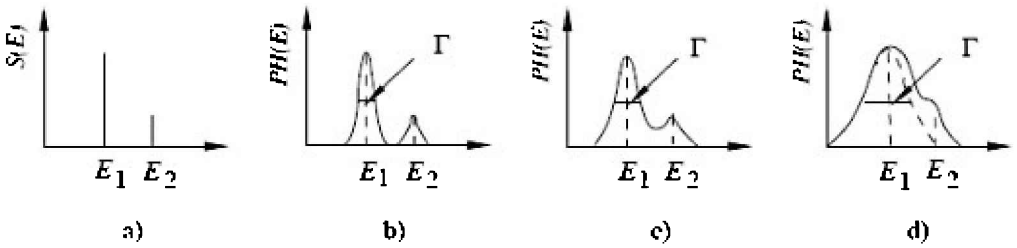


Figura 6.3: La respuesta de un detector a un espectro teórico *S(E)dE* y el efecto de la resolución sobre el espectro medido *PH(E)dE* como se discute en el texto.

6.2.5 Resolución espacial y temporal

Se suele dar en forma de desviación típica: σ_x, σ_t. Representan el poder separador espacial y temporal respectivamente.

6.2.6 Tiempo de respuesta

Es el tiempo que transcurre entre el paso de la partícula y la formación de la señal. Viene determinada por el flanco de subida del pulso electrónico. Contribuye al tiempo muerto del detector que se verá más adelante.

6.2.7 Eficiencia

Un detector no es perfecto. Generalmente, no responde al paso de todas las partículas que lo atraviesan. Para entender el concepto de eficiencia, piénsese en una fuente radiactiva de partículas (α, β o γ) y en un detector cercano. Se define la eficiencia total de un detector de partículas como el cociente entre el número de partículas detectadas y el número de partículas emitidas por la fuente de partículas. La eficiencia total se puede descomponer en eficiencia geométrica ε_{geo} y eficiencia intrínseca ε_{int}. La eficiencia geométrica, es consecuencia del tamaño finito del detector y de su distancia a la fuente de partículas. Se deduce una vez conocida la probabilidad de la emisión de la radiación en función del ángulo.

Si la emisión es isótropa, entonces:

$$d\mathcal{E}_{\text{geo}} = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi} \tag{6.4}$$

es decir, como era de esperar, la probabilidad de emisión entre un ángulo θ y $\theta + d\theta$ es $P(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta$. Dicho de otra manera, la eficiencia geométrica representa la porción de ángulo sólido que subtiende el detector. A veces se le denomina también factor geométrico.

La eficiencia intrínseca, viene dada por la probabilidad de interacción de la radiación en el detector; o sea, es función del recorrido libre medio de las partículas en el detector, λ_i, o lo que es lo mismo de la sección

eficaz de interacción, $\sigma_i = \frac{1}{n\lambda_i}$. La expresión es:

$$\varepsilon_{\text{int}} = \left(1 - e^{-x/\lambda_i}\right) \qquad (6.5)$$

con lo que la eficiencia total se puede factorizar quedando:

$$d\varepsilon_{\text{tot}} \approx d\varepsilon_{\text{geo}} \cdot \varepsilon_{\text{int}}$$

Utilizando las definiciones anteriores, se puede hablar de eficiencia absoluta y eficiencia relativa. La determinación de eficiencias absolutas es generalmente un problema muy complejo. Más fácil y frecuente es la determinación de eficiencias relativas, para las que es necesario disponer de un estándar, cumpliéndose la siguiente definición:

$$\text{eficiencia relativa} = \frac{\text{eficiencia absoluta}}{\text{estándar}}$$

En el caso de los detectores de fotones, cuando se habla de *eficiencia de un detector* hay que tener en cuenta que puede tratarse de una de las cuatro definiciones siguientes:

1 Eficiencia totaldel detector (ε_{tot}).

2 Eficiencia del detector a determinadas señales muy concretas. Sea el caso de un fotón con $E_\gamma > 1,022$ MeV. Si existe creación de pares, el positrón se aniquila y produce dos fotones de 0,511 MeV, pudiendo escapar del detector uno (escape simple) o los dos fotones (doble escape). Esto tiene como consecuencia la aparición de picos en el espectro:

   (*a*) el pico de energía total (fotopico),

   (*b*) el pico de escape simple,

   (*c*) el pico de doble escape.

Otro pico posible es el llamado de *backscattering*. Se trata de sucesos en los que el fotón sufre el efecto Compton en el exterior del detector, de forma que el electrón no es detectado pero el fotón difundido produce efecto fotoeléctrico en el detector. La energía mínima del fotón difundido hacia atrás es $E_{min} \approx mc^2/2$, alrededor de 250 keV, valor en el que hay un pico de *backscattering* (véase la ecuación 5.42).

La eficiencia total absoluta vale $\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{int} \times \varepsilon_{geo}$ siendo ε_{geo} la fracción de ángulo sólido subtendido por el detector, igual que en el caso general presentado más arriba. La eficiencia intrínseca se podría escribir:

$$\varepsilon_{int} = \left(1 - e^{-\mu(E)L}\right)$$

donde $\mu(E)$ es el coeficiente de absorción total y L la longitud del detector. La eficiencia geométrica se calcula de la misma manera que en el caso general.

Sea por ejemplo el esquema de la figura 6.4. Supóngase que el detector detecta r partículas por segundo (una vez corregido el efecto del tiempo muerto y sustraído el ruido de fondo) y que $\mathcal{A}$ es la actividad de la fuente radiactiva. La eficiencia del detector viene dada por:

$$\varepsilon(E) = \frac{r}{\mathcal{A}\Omega\mathcal{F}(E)} \qquad (6.6)$$

donde $\mathcal{F}(E) = f_a \cdot f_b \ldots$ es una combinación de factores de corrección que hay que aplicar para tener en cuenta varias pérdidas como por ejemplo, la autoabsorción en la fuente, el *backscattering*, pérdidas en el aire y en la ventana del detector, etc… A este factor $\mathcal{F}$ se le suele llamar aceptancia, y en general depende de la energía de la partícula detectada.

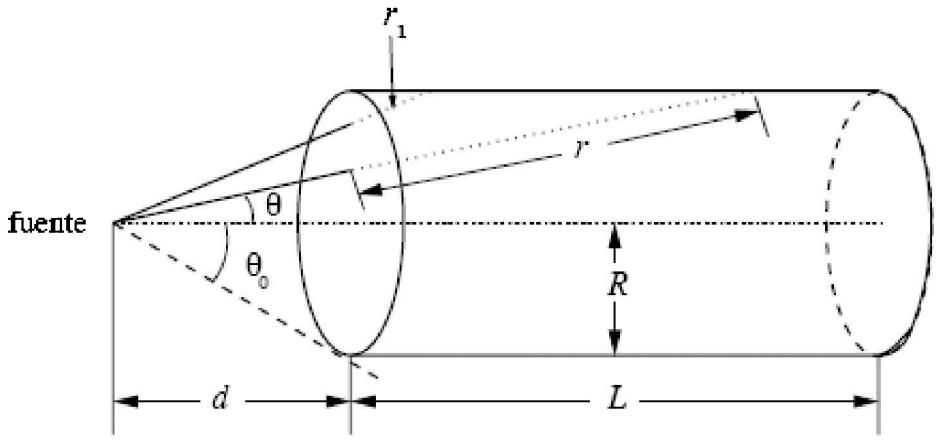


Figura 6.4: Esquema para el cálculo de la eficiencia geométrica de un detector.

El factor geométrico Ω o ángulo sólido, en el caso en el que se suponga una fuente puntual como la de la figura 6.4 es:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}\right)$$

En conclusión, al medir la actividad $\mathcal{A}$ de una fuente (el número total de partículas emitidas), se obtendrá experimentalmente un número de cuentas *r* dado por:

$$r = \Omega F(E) E \mathcal{A}$$

y todos los factores que intervienen, $\Omega F(E)E$, representan la eficiencia total del proceso, con lo que a partir de la medida de *r*, puede calcularse la actividad de la fuente simplemente despejando en la fórmula anterior $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \frac{r}{\Omega \mathcal{F}(E) \mathcal{E}} \qquad (6.7)$$

6.2.8 Tiempo muerto

El tiempo muerto representa el tiempo de inoperatividad del detector originado al pasar una partícula que crea una señal. Es importante conocer el tiempo muerto τ del detector, ya que limita la capacidad de recuento. Se suele distinguir entre tiempo muerto *extensible* y *no extensible*. En el caso extensible, si una partícula atraviesa el detector durante el intervalo en el que está elaborando la señal (es decir, durante el tiempo muerto), lo prolonga. Se estudia a continuación el caso no extensible.

En el caso de tiempo muerto *no extensible*, si durante un tiempo T el contador registra un número K de cuentas, o sea, $k = K/T$ cuentas por segundo, entonces el número verdadero de cuentas por segundo m cumple $mT = kT + mk\tau$, con lo que:

$$m = \frac{k}{1 - k\tau} \tag{6.8}$$

Para determinar τ puede utilizarse el método de las dos fuentes. Se cuentan separadamente las partículas de dos fuentes radiactivas, obteniéndose r_1 y r_2 cuentas por segundo, respectivamente. Se procede a continuación al recuento de las dos juntas, obteniéndose r_{12}, inferior a la suma por el efecto del tiempo muerto. Si los números de cuentas verdaderos son n_1 y n_2, se cumple:

$n_1 = r_1/(1 - r_1\tau)$, $n_2 = r_2/(1 - r_2\tau)$, $n_1 + n_2 = r_{12}/(1 - r_{12}\tau)$ y de aquí:

$$\tau = \frac{r_1 r_2 - \sqrt{r_1 r_2 (r_{12} - r_1)(r_{12} - r_2)}}{r_1 r_2 r_{12}} \tag{6.9}$$

Se trata de un método práctico aunque es un poco pesado y suele dar resultados con una precisión del 5-10 %.

En el caso de tiempo muerto *no extensible*, si durante un tiempo T el

contador registra un número K de cuentas, o sea, $k = K/T$ cuentas por segundo, entonces el número verdadero de cuentas por segundo m cumple:[1]

$$\boxed{k = me^{-m\tau}} \tag{6.10}$$

que es más complicada de resolver, puesto que para calcular el valor verdadero de cuentas m, hay que resolver esta ecuación iterativamente.

La corrección del efecto del tiempo muerto es, pues, inmediata. Sea el caso descrito por la ecuación (6.6). Si k es el número de cuentas · s^{-1} que se miden en el detector y b el número de cuentas · s^{-1} del ruido de fondo, entonces el valor neto de cuentas · s^{-1}, r, se calculará:

$$r = \frac{k}{1 - k\tau} - b$$

siendo τ el tiempo muerto del detector.

6.3 Detectores gaseosos. Contador Geiger–Müller

La primera idea de estos contadores se debe a Rutherford y Geiger[2] quienes observaron que era posible amplificar la señal en un detector de gas.

Estos detectores utilizan la ionización ($N_{\pm}$ pares $e^{-}X^{+}$) producida por la partícula cargada, proporcional a la energía perdida en el gas del detector. En efecto, la energía perdida dE/dx, calculable por la fórmula de Bethe, es debida a los procesos de:

(1) excitación del átomo X: $q + X \rightarrow q + X^{*}$ (para gases nobles, $\sigma \sim 10^{7}$ barn y potencial de excitación ~ 10 eV)

(2) ionización, $qX \rightarrow qX^{+}\ e^{-}$ (para gases nobles, $\sigma \sim 10^{8}$ barn, potencial

de ionización ~ 15 eV). Este proceso tiene mayor umbral que el anterior. A veces se producen e^- muy energéticos (rayos δ), que a su vez, ionizan.

La señal básica (los $N_\pm$ pares) es amplificada gracias a un campo eléctrico creado entre el ánodo y el cátodo del contador, produciendo un incremento del voltaje o sea una señal eléctrica:

$$\Delta V = \frac{A N_\pm e}{C_0 L} \tag{6.11}$$

siendo A la ganancia o factor de amplificación, L, la longitud del detector, $C_0 = 2\pi\varepsilon / \ln(r_c/r_a)$ la capacitancia por unidad de longitud del detector y ε, la constante dieléctrica del gas.

Se supone un detector de forma cilíndrica, con r_c y r_a los radios del cátodo y del hilo anódico respectivamente. La tensión aplicada al ánodo es V_0, y el cátodo, cuya pared cilíndrica es conductora, se conecta a la masa (véase la figura 6.5). Al aplicar la tensión V_0, el campo eléctrico E en el interior del contador es:

$$E(r) = \frac{C_0 V_0}{2\pi\epsilon r} = \frac{V_0}{r \ln(r_c/r_a)}$$

Se suele tener una capacidad, C, en el ánodo para aislar V_0 de la señal, cumpliéndose que $C >> C_0$, ya que $C_0 \sim 10$ pF/m, es muy pequeña.

El mismo diseño de la figura 6.5 sirve para obtener tres tipos de detectores, cuyas señales pueden compararse utilizando (véase la figura 6.6) la curva de Montgomery (1941):

1 Cámara de ionización.

2 Cámara proporcional.

3 Contador Geiger–Müller.

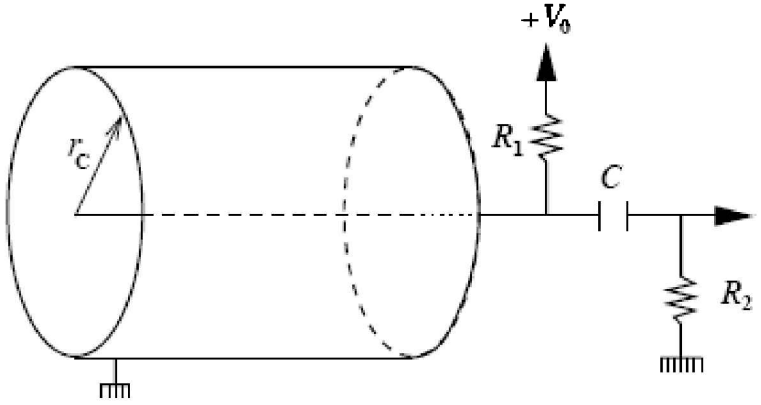


Figura 6.5: Modelo de un contador gaseoso.

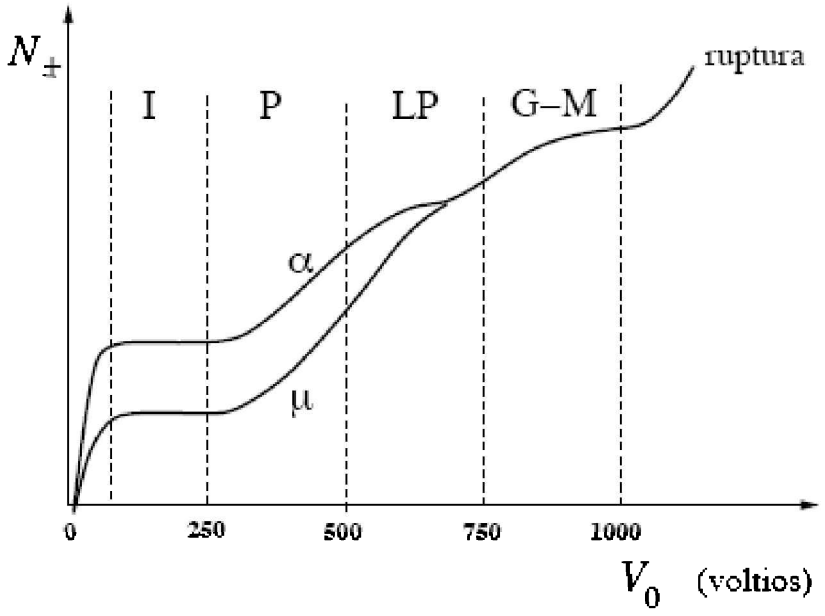


Figura 6.6: La curva de Montgomery.

Para la mejor comprensión, se tomarán dos tipos de partículas:

1) Un muón (μ) cósmico, relativista, que normalmente creará unos 50 pares $e^- X^+$ en 1 cm de gas. Recuérdese que $w \sim 35$ eV y la pérdida de energía en 1 cm de gas Ar es de unos 2 keV.

2) Una partícula α de una fuente radiactiva (~ 5 MeV), que dejará

unos 10^4 pares $e^- X^+$ al atravesar 1 cm de gas.

En función de V_0 se distinguirán los siguientes fenómenos:

a) Recombinación, fenómeno que tendrá lugar para $V_0 \sim 0$. Hay emisión de γ como consecuencia del proceso $X^+ + e^- \rightarrow X + \gamma$. El número de iones recombinados será $dn = \beta n_+ n_- dt$, con β coeficiente de recombinación que dependerá del gas. Se tendrá $dn = \beta n^2 dt$, por lo que

$$\boxed{n = \frac{n_0}{1 + \beta n_0 t}} \qquad (6.12)$$

siendo n_0 la concentración inicial de iones. La vida media de un ión (para recombinarse) $\tau = \frac{1}{\beta n_0}$ da el orden de magnitud de duración del proceso. Valores normales de β van de 10^{-6} a 10^{-8} $cm^3\ s^{-1}$.

b) Cámara de ionización (I). En la zona $V_0 < 250$ V, las señales son proporcionales a la ionización producida (que a su vez es proporcional a la pérdida de energía dE/dx). Se mantendrála relación $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu \approx 10^4/50$. Por esoreciben el nombre de cámaras de ionización.

La señal será $\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{N_\pm e}{C}$ o sea, al introducir la carga del electrón:

$$\boxed{\Delta V\,(\text{Volt}) = 1{,}6 \times 10^{-7} \frac{N_\pm}{C(\text{pF})}} \qquad (6.13)$$

una señal extremadamente débil (< mV).

c) Cámara proporcional (P). Hasta unos 500 V, la energía de los e^- primarios, acelerados por el campo eléctrico más intenso, permite ionizar a su vez. Se forma una cascada secundaria. La señal es ahora:

$$\Delta V\,(\text{Volt}) = 1,6 \times 10^{-7} \frac{A N_{\pm}}{C(\text{pF})} \qquad (6.14)$$

siendo A el factor de amplificación, o ganancia, función de V_0. Para obtener ganancias del orden de 10^6 – 10^7, es necesario mezclar gases. En el régimen proporcional se sigue teniendo $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu \approx 10^4/50$. Al aumentar la tensión hasta los 750 V, fenómenos de carga espacial limitan la señal y se entra entonces en una zona de proporcionalidad limitada (LP).

d) Contador Geiger–Müller (GM). Para valores aún mayores, alrededor de 1000 V, los átomos excitados cerca del ánodo, emiten fotones que pueden a su vez producir más electrones dando lugar a una reacción en cadena (descarga). Se entra en la región llamada de Geiger–Müller. La descarga se para gracias a la presencia de gases que puedan absorber los fotones (*quenching*). En la zona Geiger, se observa un *plateau*, en el que la saturación de la señal no permite distinguir entre distintas ionizaciones primarias. Así, ahora se tendrá que $\Delta V_\alpha / \Delta V_\mu = 1$.

Si se continúa aumentando V_0, se llega a la ruptura del contador.

En todos estos detectores gaseosos, la resolución energética es la vista en (6.3):

$$R = 2,35 \sqrt{\frac{F w}{E}}$$

con F factor de Fano para gases, $F \leq 0$, 1 y w, energía necesaria para crear un par $e^- X^+$, $w \approx 35$ eV para el aire y $w \approx 30$ eV para gases.

Estos tres tipos de detectores gaseosos todavía se usan en la práctica. En los experimentos de física de altas energías se utilizan variantes de estos detectores gaseosos tales como: las MWPC (cámaras proporcionales multi-hilos), las *cámaras de deriva* y más recientemente las TPC (cámaras de proyección temporal), capaces de medir las tres coordenadas espaciales de la trayectoria de las partículas cargadas.

6.3.1 Movimiento de cargas en gases

La teoría cinética de los gases enseña que las velocidades de e^- y X^+, en equilibrio térmico sigue una distribución de Maxwell con velocidad media:

$$v_T = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

lo que a temperatura ambiente (T = 300K), implica $v_T^- \sim 10^6$ cm s^{-1} y $v_T^+ \sim 10^4$ cm s^{-1}. Los recorridos libres medios de los iones entre choques pueden calcularse mediante la conocida expresión $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$. Si se estima la sección eficaz geométrica $\sigma = \pi R^2$ con $R \sim 1$ Å, se obtiene $\lambda \sim 10^{-5}$ cm. Los iones tienen recorridos muy pequeños entre choques.

La velocidad de deriva en presencia de un campo eléctrico es:

$$v^{\pm} = \mu^{\pm} \varepsilon$$

con $\mu^{\pm}$ la movilidad del ión correspondiente. Esta velocidad se superpone a la térmica, $eV = \frac{3}{2}kT$, que para T = 300 K vale unos 0,04 eV y, en general, es mucho más pequeña. Por ejemplo para el argón, μ^+ = 1200

cm s^{-1}/(V cm^{-1}), y μ^- (para los e^-) es unas 10^3 veces mayor. Por ejemplo para campos eléctricos intensos, de unos 4000 V/cm, la velocidad típica de deriva es $v^- \sim 5$ cm/μs.

6.3.2 Avalancha

Se llama así al proceso demultiplicación de los e^- secundarios, formando una especie de gota. Si α es la probabilidad de ionización por cm ($\lambda = 1/\alpha$ es entonces el recorrido libre medio de un e^-), por tanto, a partir de n electrones, el número de e^- creados en un recorrido dx será $dn = n\alpha dx$, con lo que:

$$n = n_0 e^{\alpha x} \tag{6.15}$$

O sea, que el factor de amplificación es:

$$A = \frac{n}{n_0} = e^{\alpha x} \tag{6.16}$$

cuyo límite es $\alpha x \approx 20$, llamado límite de Raether, que permite valores del factor de amplificación hasta $A \leq 10^8$. Más allá hay ruptura.

6.3.3 Forma del pulso electrónico

Se ha visto que para una cámara con capacitancia por unidad de longitud C_0, la señal obtenida al paso de una partícula es:

$$\Delta V = \frac{A N_{\pm} e}{C_0 L} \tag{6.17}$$

siendo L la longitud del cilindro del contador. Es fácil demostrar que la forma del pulso debido a una carga en r es $V(r) = -\frac{C_0 V_0}{2\pi\epsilon}\ln(r/r_a) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\frac{r(t)}{r_a}$, luego:

$$\boxed{V(t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon L}\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)} \qquad (6.18)$$

en donde la constante $t_0 = \frac{\pi\epsilon r_a^2}{\mu C_0 V_0}$, lo que se obtiene al integrar la velocidad de deriva $v_d = \frac{dr}{dt} = \mu\mathcal{E} = \mu\frac{V_0}{\ln(r_c/r_a)}\frac{1}{r}$, que al integrar da:

$$r = \left\{r_a^2 + \frac{2\mu V_0}{\ln(r_c/r_a)}t\right\}^{1/2}$$

Posteriormente la señal se amortigua al pasar por un circuito diferenciador con constante de tiempo $\tau = RC$, de forma que para $t = \tau$ el pulso queda reducido a $V_0/e = 0,37 \times V_0$.

6.4 Detectores de centelleo. Fotomultiplicadores

Se basan en la emisión de luz (luminiscencia) al desexcitarse los átomos, después de haber sido excitados por el paso de las partículas cargadas. Este mecanismo es complejo y diferente para materiales orgánicos e inorgánicos. En los primeros, es la desexcitación de los estados moleculares (véase la figura 6.7) la que produce radiación ultravioleta. En los segundos (cristales), la captura de electrones por impurezas (los *centros de activación* del cristal) producen emisión de luz al desexcitarse.

La emisión de luz (fotones) sigue una ley exponencial:

$$N = \frac{N_0}{\tau_d} e^{-t/\tau_d}$$

y se distinguen dos tipos de emisión: fluorescencia, muy rápida ($\tau \sim 10^{-8}$ seg.) y fosforescencia, desexcitación de estados metastables que puede llegar a $\tau_d \sim \mu$s, o incluso horas. Por supuesto, para física de partículas se prefieren los materiales con tiempos de desexcitación τ, rápidos.

El primer detector de este tipo fue el *spinthariscope* de Crookes (1903), usado por Geiger y Marsden (el famoso experimento de difusión α+ Au de Rutherford). El material era SZn. Pero con el descubrimiento del fotomultiplicador (PM), por Curran y Baker en 1944, se impuso extraordinariamente el uso de centelleadores. Su fiabilidad pronto excedió a la de los contadores gaseosos.

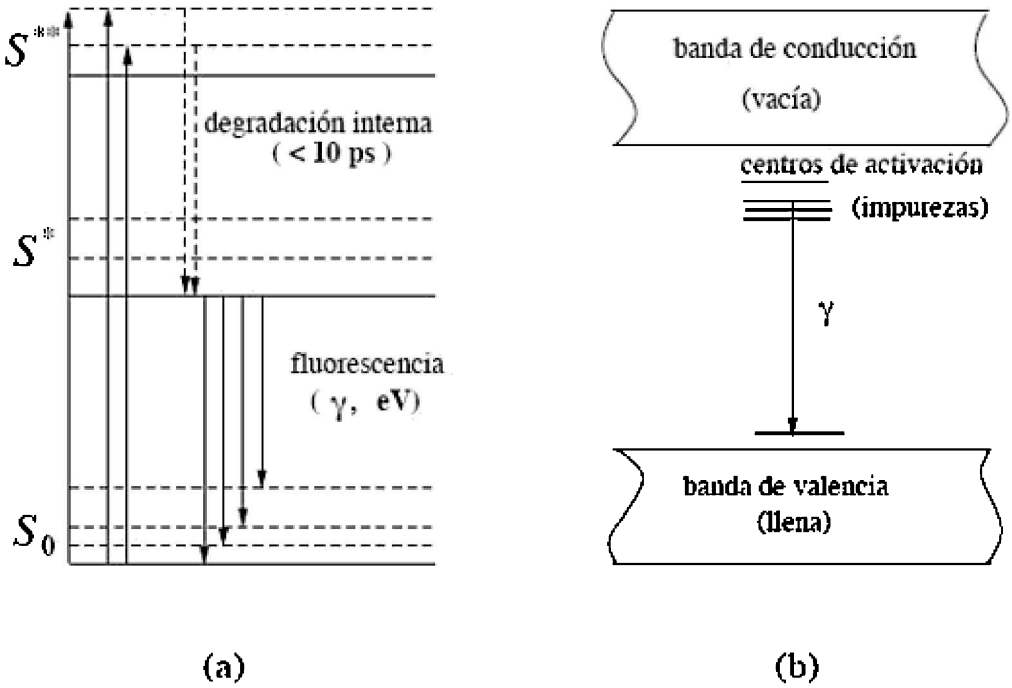


Figura 6.7: Mecanismo de emisión de luz de centelleo (fluorescencia) en materiales **a)** orgánicos y **b)** inorgánicos.

6.4.1 Características generales

Un montaje típico de un detector de centelleo puede observarse en la figura 6.8. La información que proporciona es:

1. sensible a la energía depositada (respuesta lineal),
2. respuesta rápida (buen *timing*),
3. capaz de identificar el tipo de partícula por el tipo de pulso producido (*pulse shape discrimination*).

Normalmente, se exige de ellos:

1. gran eficiencia de emisión de luz,
2. transparencia a la radiación fluorescente,
3. espectro de emisión similar al de los fotomultiplicadores y
4. tener una constante τ_d muy corta.

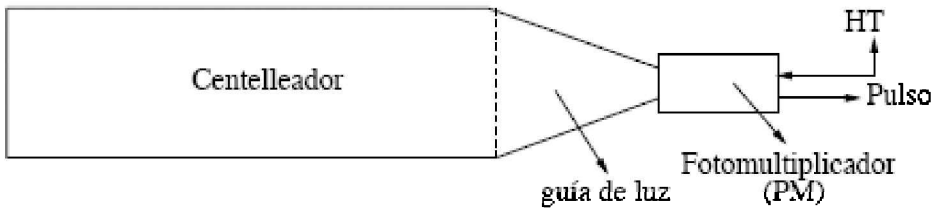


Figura 6.8: Diseño de un contador de centelleo.

6.4.2 Tipos de materiales centelleadores

A Orgánicos: son materiales compuestos de hidrocarburos aromáticos con anillos de benceno. Muy rápidos ($\tau_d \sim$ ns.). La luz de centelleo es debida a la desexcitación de electrones de valencia en orbitales π −moleculares (véase la figura 6.7). Se trata de electrones deslocalizados. Las transiciones $S^{**} \rightarrow S^{*}$, no emiten fotones; sufren una degradación interna. Los fotones de centelleo son los de fluorescencia; o sea, la luz emitida desde S^{*} a los estados vibracionales por encima de S_0, que no es absorbida ya que la energía del fotón es menor que la necesaria para excitar

el electrón desde S_0 (estado fundamental). Todas las transiciones entre estados singlete ($S^* \rightarrow S$) son rápidas. Entre tripletes (que no se muestran en la figura) son lentas, y acaban en transiciones a estados S^*. La emisión de luz de centelleo sigue una ley suma de dos exponenciales; una lenta caracterizada por un tiempo τ_s y otra rápida caracterizada por τ_f:

$$N \sim Ae^{-t/\tau_f} + Be^{-t/\tau_s}$$

siendo el término rápido (τ_f) dominante. A continuación se realiza una sencilla clasificación de los diferentes tipos de centelleadores orgánicos.

a) *Cristales*: antraceno ($C_{14}H_{10}$), patrón de luminosidad ($\tau \sim 30$ ns), compuesto por tres anillos de benceno; trans-stilbeno; naftaleno ($C_{10}H_8$). No son muy isótropos y son de difícil corte.

b) *Líquidos*: se suele usar dopante centelleador, por ejemplo: p-terfenil ($C_{18}H_{14}$), PBD ($C_{20}H_{11}ON_2$), PPO ($C_{15}H_{11}NO$),
POPOP ($C_{24}H_{16}N_2O_2$) disueltos en concentraciones del orden de 3 g/ℓ en disolventes tales como xyleno, tolueno, benceno, fenilclorohexano, etc. Se suelen utilizar como detectores de neutrones; para ello se les disuelve cadmio o boro.

c) *Plásticos*: se usan losmismos centelleadores que en el caso anterior, pero ahora se disuelven en concentraciones del orden de unos 10 g/ℓ en plásticos sólidos como poliviniltolueno, polifenilbenceno o poliestireno.

Son los más fáciles de utilizar y de obtener industrialmente. El espectro de longitudes de onda de los

γ va de unos 350 a unos 500 nm y el máximo de emisión se da en la zona de ≈ 440 nm. Son muy rápidos ($\tau \sim 2$ ns).

B Cristales inorgánicos. Son cristales alcalinos con impurezas activadoras. El más conocido es el ioduro de sodio dopado con talio (NaI(Tℓ)). También se utiliza frecuentemente el CsI(Tℓ). Son higroscópicos, por lo tanto debe evitarse su contacto con el aire (para evitar su deterioro por la humedad) y producen una señal lenta. Otros ejemplos son CsI(Na) y LiI(Eu).

El BGO (germanato de bismuto: $Bi_4Ge_3O_{12}$) y el fluoruro de bario (BaF_2) no son higroscópicos. Son más eficientes pero con respuesta luminosa menor.

C Gases. Generalmente los gases nobles. También el N_2. Emiten en el ultravioleta; por ello se necesita utilizar material que desplace la longitud de onda, llamado *wls* (*wave length shifter*).

D Vidrios. Como el silicato de boro, el óxido de bario. Entre los vidrios más utilizados para calorimetría electromagnética se encuentra el vidrio de plomo (*lead-glass*), muy eficiente y que proporciona una buena resolución energética. Fue empleado por ejemplo en el calorímetro electromagnético *forward* del experimento DELPHI en el colisionador LEP del CERN.

6.4.3 Respuesta luminosa

La respuesta luminosa de un centelleador es la energía necesaria para crear un γ de centelleo: $\epsilon = \frac{\Delta E}{N_\gamma}$. Cuanta más energía pierda una partícula al atravesar un centelleador, más fotones de centelleo se producirán. Recuérdese que en un material de densidad $\rho \approx 1$ g/cm^3,

como en el caso de los plásticos, una partícula relativista pierde aproximadamente 2 MeV/cm.

La respuesta luminosa puede entenderse como la eficiencia del detector para producir una señal. A esta eficiencia habrá que añadir la del fotomultiplicador, que suele ser < 30 %.

La siguiente tabla muestra la respuesta luminosa de materiales centelleadores frecuentemente utilizados:

material	ε =eV/γ
antraceno	60
NaI	25
plásticos	100
BGO	300

La emisión luminosa es lineal con la energía ($N_\gamma \propto E$), pero existe dependencia con la temperatura, excepto en los cristales inorgánicos.

La forma del pulso luminoso permite (en centelleadores líquidos) discriminar el tipo de partícula incidente, sobre todo entre n y γ.

6.4.4 Eficiencia en el transporte de luz

En el dispositivo de la figura 6.8, la luz producida por el paso de una partícula en cualquier punto del detector, debe llegar al fotocátodo del fotomultiplicador para que dé una señal. Existen diversas pérdidas de los fotones que hay que conocer. La propia luz de centelleo, al propagarse por el centelleador se atenúa según la ley de atenuación: $N\,x) = N_0 e^{-\mu x}$. El coeficiente μ es el coeficiente de atenuación de la luz en el medio. La propagación de la luz de centelleo se realiza por reflexión total. Sean n = 1, 58 y n_0 = 1, 0 los índices de refracción del centelleador y del aire, respectivamente. Un fotón incide con un ángulo θ. El ángulo crítico es $\sin \theta_c = \frac{n_0}{n}$, y se toma respecto a la perpendicular a la superficie del centelleador. La fracción de luz transmitida será:

$$f = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\theta_c} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right) \qquad (6.19)$$

o sea, para n = 1, 58, f = 14, 3%. También hay que tener en cuenta las pérdidas en la guía de luz, así como, por último, el teorema de Liouville, que dice que el porcentaje máximo de fotones que entrarán en el fotomultiplicador viene dado por el cociente entre las superficies de la ventana del fotomultiplicador y del lado del centelleador en el que se recoge la luz; es decir, $f_L = \frac{S_{PM}}{S_C}$.

6.4.5 Fotomultiplicadores (PM)

Son tubos electrónicos que convierten pulsos de luz en pulsos de corriente eléctrica. Sus componentes son el fotocátodo, los dínodos y el ánodo.

a) *Fotocátodo.* Hecho de material semiconductor, por ejemplo una mezcla de Sb con un elemento alcalino (Na, K, Cs), con gran probabilidad de efecto fotoeléctrico. La energía del electrón arrancado es $E_e = E_\gamma - B_e$, siendo B_e la energía de ligadura del electrón en su correspondiente capa atómica. Es la llamada función trabajo *work function*. Hablando de fotomultiplicadores es costumbre distinguir entre *fotoelectrones*, nombre que reciben los electrones emitidos por efecto fotoeléctrico, que se denominarán γ_e y los fotones que inciden en el cátodo, γ_{inc}.

La eficiencia cuántica del cátodo es:

$$\eta(\lambda) = \frac{\text{número de fotoelectrones } \gamma_e}{\text{número de fotones incidentes } \gamma_{\text{inc}}}$$

es decir, la probabilidad de efecto fotoeléctrico sobre el cátodo y

suele valer 20 ó 30 % para fotones de una longitud de onda de unos 440 nm.

b) *Dínodos*. En ellos se produce la multiplicación de electrones como consecuencia del choque de los electrones, acelerados por el campo eléctrico existente, sobre la superficie del dínodo. En cada dínodo se produce emisión secundaria de δ electrones por electrón incidente. El material de los dínodos suele estar compuesto de aleaciones tales como Ag-Mg, Cu-Be o Cs-Sb.

c) *Ánodo*. En él se recoge la avalancha final de electrones dando lugar al pulso eléctrico, que en general será un voltaje en función del tiempo, $V(t)$.

La ganancia del PM es el factor de amplificación de la cadena de dínodos:

$$G = \delta^n = (kV_d)^n \tag{6.20}$$

siendo n el número de dínodos (entre 10 y 14). Ganancias típicas son $G \approx 10^7$ y $\delta \sim 8 - 10$. V_d es el potencial entre dínodos. El mínimo voltaje total V_T para una ganancia G vale, $V_T = nV_d = \frac{n}{k}G^{1/n}$ y a partir de $\frac{dV_T}{dn} = 0$ se obtiene:

$$\boxed{n = \ln G} \tag{6.21}$$

y la variación de G respecto al V_T será:

$$\frac{dG}{G} = n\frac{dV_d}{V_d} = n\frac{dV_T}{V_T} \tag{6.22}$$

es decir, un 1 % de cambio en V_T produce un n % de cambio en la

ganancia. El control y la estabilidad de la alta tensión es un factor primordial para el buen uso de un fotomultiplicador.

Forma del pulso electrónico

El circuito equivalente de un PM es el de un generador de corriente. Si *N* es el número de fotoelectrones se tiene que cumplir:

$$I(t) = \frac{GNe}{\tau_s} e^{-t/\tau_s}$$

y como $I(t) = \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt}$, llamando $\tau = RC$, se llega a:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{GNeR}{\tau_s^2} t e^{-t/\tau_s} & \text{para} \quad \tau = \tau_s \\ -\frac{GNeR}{\tau - \tau_s}\left[e^{-t/\tau_s} - e^{-t/\tau}\right] & \text{para} \quad \tau \neq \tau_s \end{cases}$$

En general *C* se suele mantener pequeña (~ pF) para maximizar la amplitud. Una forma típica de un pulso electrónico de un detector de centelleo puede verse en la figura 6.9.

Suelen darse dos modos de operación:

- modo corriente; con amplitudes pequeñas y tiempo de subida *rise-time r* ápido. Caso $\tau << \tau_s$.
- modo voltaje; más lento y menos sensible a fluctuaciones. Es útil para bajas frecuencias y $\tau >> \tau_s$.

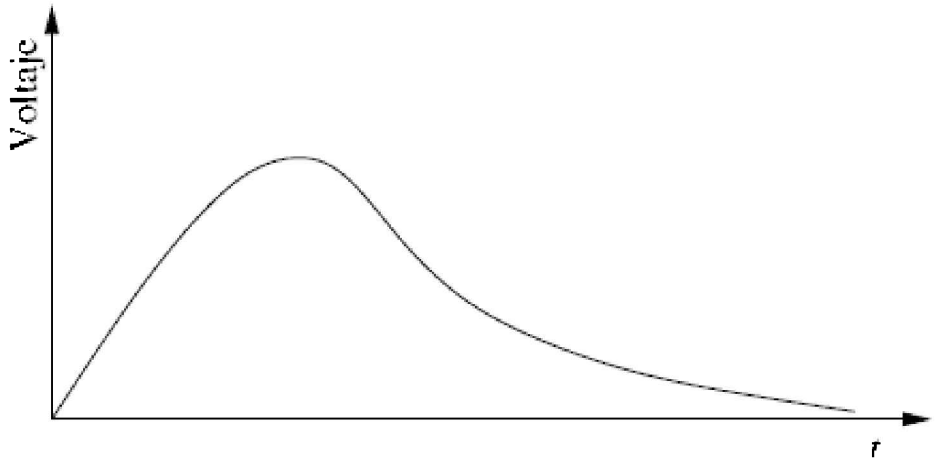


Figura 6.9: Pulso electrónico típico de un detector de centelleo. La anchura de la señal suele ser de unas decenas de nanosegundos (10^{-9} s).

Resolución temporal y medida del tiempo de vuelo (TOF)

Los centelleadores, acoplados a fotomultiplicadores, suelen ser detectores muy rápidos. Por ello tienen aplicaciones importantes en la medida de tiempos y esmuy importante conocer su resolución temporal.

La resolución temporal, en inglés *jitter*, viene causada, principalmente, por dos tipos de fluctuaciones:

- fluctuaciones del tiempo de tránsito de los electrones, debido a las trayectorias en el campo eléctrico durante la travesía de todos los dínodos. Suele valer ~ 0,5 ns.

- fluctuaciones debidas al ruido, que a su vez suele clasificarse en:
  i) ruido negro o termoiónico, es simplemente debido a la temperatura y obedece la ecuación de Richardson $I = AT^2 e^{-e\varphi/kT}$; es del orden del nA, y
  ii) ruido estadístico, debido a las fluctuaciones del número de fotoelectrones, que se traduce en fluctuaciones de corriente. La desviación cuadrática media (*rms*) viene dada en este caso por:

$$< \Delta I^2 > = Ie/\tau$$

Otros factores ambientales que afectan el funcionamiento de los PM son la luz ambiental y el campo magnético *B*. Inclusoel pequeño campo magnético terrestre (cuya magnitud es del orden del gauss) afecta a los fotomultiplicadores sensibles. Por ello, siempre se suelen proteger con un cilindro exterior metálico (*mu-metal* y hierro) para apantallarlo.

Una de las aplicaciones más importantes de los detectores de centelleo es el de la medida de tiempo de vuelo (en inglés TOF, *Time Of Flight*). Un sencillo método para determinar la resolución temporal de un detector, pude llevarse a cabo en el laboratorio, utilizando rayos cósmicos, como se muestra en la figura 6.10.

El paso de una partícula por los contadores de trigger T1 y T2 define una coincidencia que señala el paso de un rayo cósmico por el contador *C*. La señal de coincidencia T1 · T2 dispara un TDC que determinará el tiempo transcurrido *t* cuando llegue la señal del fotomultiplicador que detecta la luz del centelleador *C*. Esta misma señal abre una puerta en el circuito ADC de medida analógica del pulso del fotomultiplicador. O sea, se dispone de una medida digital del tiempo *t* y de la carga total integrada del pulso electrónico *a*.

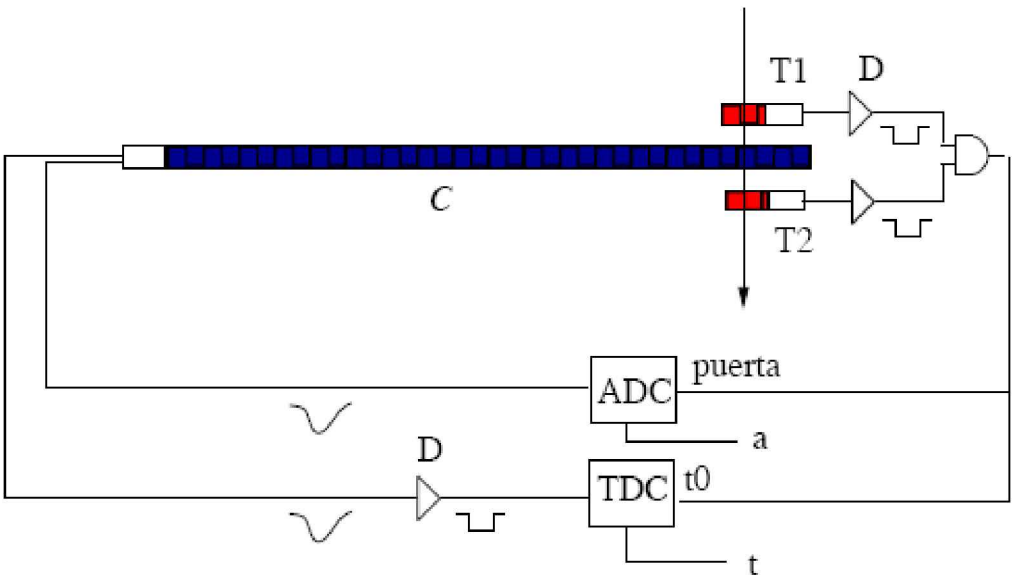


Figura 6.10: Medida de la resolución temporal de un detector de centelleo.

Los detectores T1 y T2 pueden ir moviéndose a lo largo del detector C para estudiar la resolución en función del punto de impacto (coordenada y). El tiempo de vuelo se calcula mediante la fórmula:

$$\tau = t - y/v_c - \frac{k}{\sqrt{a_0} - \sqrt{a}}$$

El último término se introduce porque permite corregir las fluctuaciones en la medida del tiempo para pulsos a de distinto tamaño. El espectro de τ, que seguirá una distribución de Gauss, dará directamente la resolución temporal σ_t. Al mismo tiempo, el análisis de datos permitirá deducir los mejores valores de las constantes de calibración k y a_0.

Los sistemas de medida del tiempo de vuelo, mejoran considerablemente si se colocan dos fotomultiplicadores, uno en cada extremo del detector, como se verá a continuación. El método de medida del tiempo de vuelo puede comprenderse siguiendo el esquema de la figura 6.11. Se sabe que la partícula ha sido producida en el instante T_0, gracias una señal externa que se genera, por ejemplo, cuando se cruzan dos haces en un colisionador. Desde el punto de colisión, la partícula tarda un tiempo τ en llegar al contador de centelleo. La luz de centelleo debe recorrer las longitudes LA y LB para dar una señal en los fotomultiplicadores PMA y PMB, respectivamente. El instante de llegada de las señales a los fotomultiplicadores PMA y PMB define el tiempo transcurrido desde T_0, respectivamente t_1 y t_2, así como las alturas de pulso respectivas, a_1 y a_2, que son proporcionales a la carga total (altura del pulso electrónico). Siempre se cumplirá que $LA + LB = L$, siendo L la longitud del detector. La medida del tiempo de vuelo, se obtiene al tener en cuenta que:

$t_1 = T_0 + \tau + LA/v_c + k_1$ y $t_2 = T_0 + \tau + LB/v_c + k_2$

siendo v_c la velocidad de la luz en el centelleador (unos 5 cm/ns), k_1 y k_2 dos términos correctivos que dependen de la altura del pulso a_i medida en el respectivo fotomultiplicador y que vale:

$$k_i = \frac{k}{\sqrt{a_0} - \sqrt{a_i}}$$

siendo a_0 un pulso estándar de calibración y k una constante. Este término k_i corrige el tiempo de llegada del pulso, reduce las fluctuaciones asociadas al tamaño del pulso y es conocido como corrección de fracción constante. La suma de tiempos $t_1 + t_2 = 2\tau + 2T_0 + L/v_c + k_1 + k_2$ está ligada a τ y la diferencia $t_1 - t_2 = (LA - LB)/v_c + k_1 - k_2$ da directamente la posición del impacto en el contador. También se puede obtener la posición a lo largo del contador utilizando la expresión: $y = \ln(a_1/a_2)$, puesto que la atenuación del pulso es exponencial (el eje y es el de la dirección del contador). Incluso, si se cumple que la pérdida de energía en el contador es $dE/dx \propto E$, se puede verificar que la energía depositada por la partícula es proporcional a $\sqrt{a_1 a_2}$.

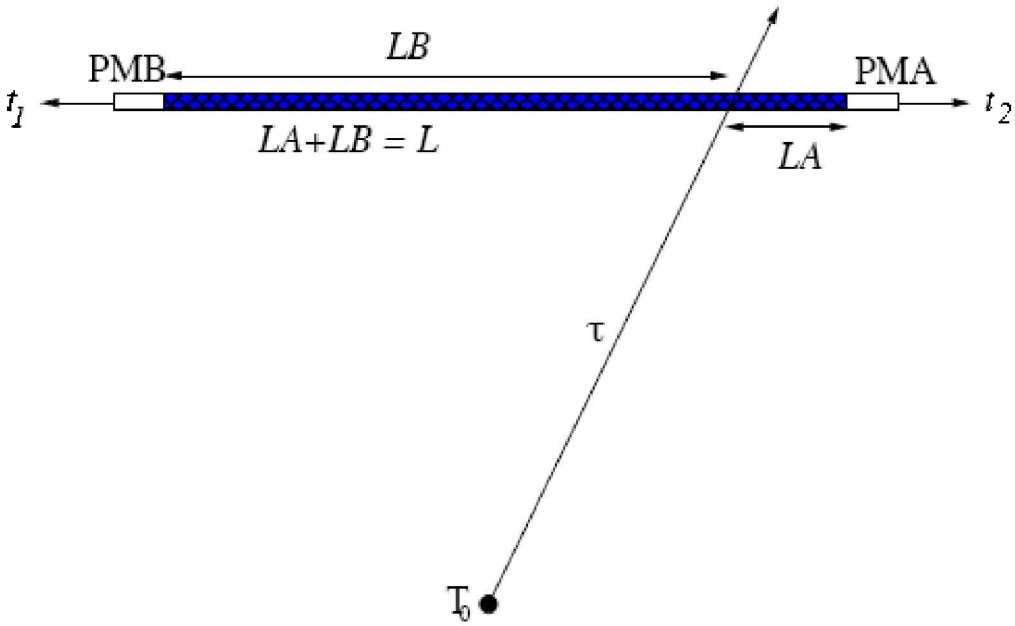


Figura 6.11: Medida del tiempo de vuelo (TOF) con un detector de centelleo.

Resolución energética

Los contadores de centelleo tienen una resolución energética que se puede determinar midiendo la altura de los pulsos, que se miden en los circuitos ADC (*Analog to Digital Converter*). Si el paso de partículas de una energía E determinada produce pulsos de una altura a, la resolución energética viene dada por:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$$

es decir, está relacionada con el número medio de fotoelectrones $\overline{n}$ detectados en el fotomultiplicador.

Resolución espacial

La resolución espacial de los centelleadores no suele ser muy elevada, ya que depende del tamaño de los mismos. La mejor solución consiste en dseñar detectores de una anchura muy pequeña (del orden del mm) y colocarlos formando un hodoscopio. Si la anchura de los detectores es x, la resolución espacial será $\sigma_x = \frac{x}{\sqrt{12}}$, que es la desviación típica que se deduce de una distribución uniforme (ver las ecuaciones 7.5). Para contadores de un tamaño grande (más de 2 metros de longitud, la determinación del punto de impacto en el contador es función de la resolución temporal: $\sigma_x = v_c \sigma_t$, siendo v_c la velocidad de la luz de centelleo en el detector.

6.5 Ejemplos de espectros de fuentes radiactivas

En las figuras 6.12 y 6.13 se muestran un conjunto de espectros de fotones obtenidos utilizando fuentes radiactivas que se encuentran normalmente en los laboratorios de radiactividad. Estas fuentes, son de elementos que se desintegran por emisión beta, con periodos que van de los meses a los años, para que sean útiles en el laboratorio. Al desintegrarse, producen núcleos (hijos) que suelen quedar en un estado excitado, con lo que se desintegran emitiendo fotones (radiación gamma). Lo que se observa, pues, son los espectros de energía de fotones que se han obtenido con un cristal de NaI, que es un detector de centelleo, acoplado a un fotomultiplicador. Los espectros representan el número de canal en el eje *x*, que es proporcional a la energía. Se observan picos, bien descritos por curvas gaussianas, de forma que el valor medio da la energía del fotón (en cuentas del multicanal utilizado) y la anchura permite calcular la resolución energética de la medida. Para conocer el valor equivalente de la energía, hay que calibrar el detector. La calibración es inmediata, ya que se conocen perfectamente las energías de los fotones de las fuentes utilizadas. Por ejemplo, el fotón del espectro del $^{137}_{55}$Cs tiene una energía de 662 keV (se trata del primer estado excitado del $^{137}_{56}$Ba. De la mismamanera, el pico del espectro del $^{54}_{25}$Mn es el del primer estado excitado del núcleo hijo ^{54}Cr con una energía de 835 keV.

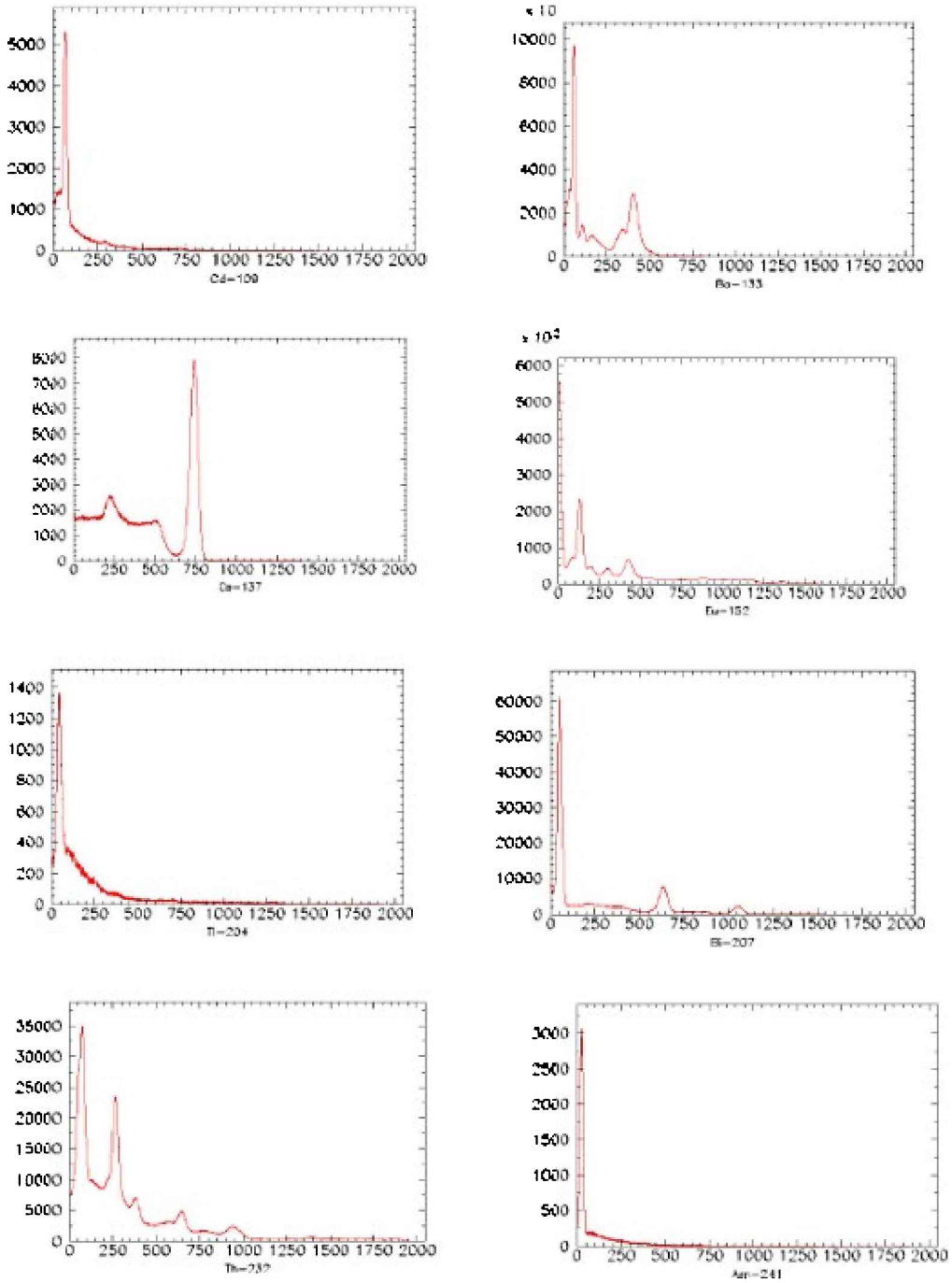


Figura 6.12: De arriba a abajo, se muestran los espectros de fuentes radiactivas de los siguientes núcleos: $^{109}_{48}\mathrm{Cd}$, $^{133}_{56}\mathrm{Ba}$, $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$, $^{152}_{63}\mathrm{Eu}$, $^{204}_{81}\mathrm{Tl}$, $^{207}_{83}\mathrm{Bi}$, $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ y $^{241}_{95}\mathrm{Am}$.

Más evidente es el pico correspondiente a 511 keV de aniquilación del positrón emitido por el $^{22}_{11}$Na; en este caso el positrón se aniquila en reposo y emite dos fotones en direcciones opuestas de 511 keV cada uno.

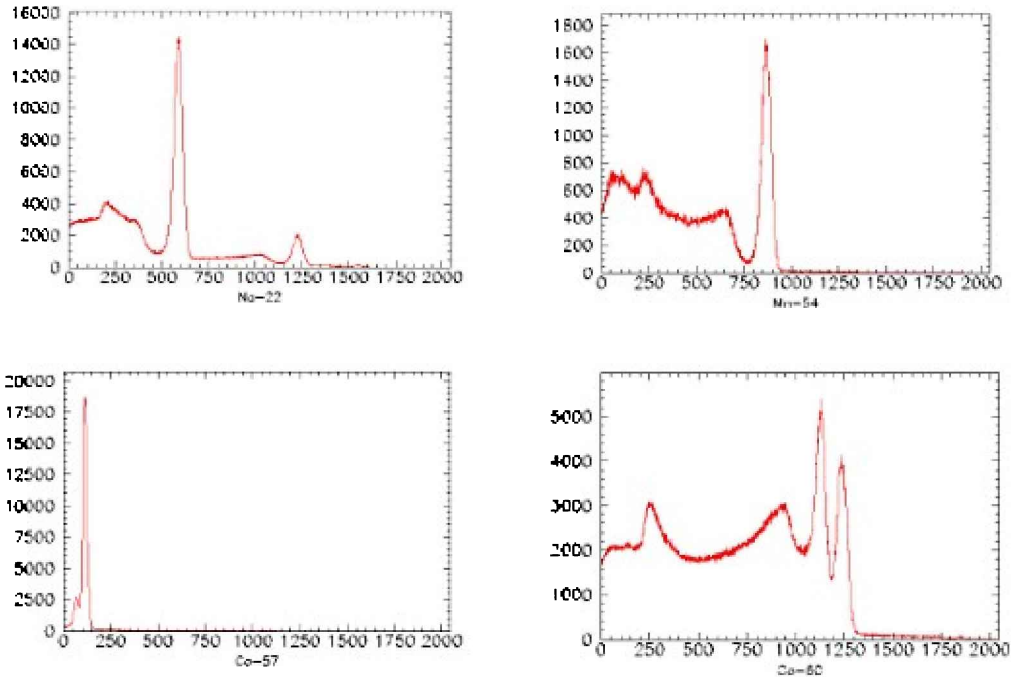


Figura 6.13: De arriba a abajo, se muestran los espectros de fuentes radiactivas de los siguientes núcleos: $^{22}_{11}$Na, $^{54}_{25}$Mn, $^{57}_{27}$Co y $^{60}_{27}$Co.

6.6 Detectores de estado sólido

Cuando se habla de detectores de estado sólido se suele referir a detectores basados en las propiedades semiconductoras de los cristales de Si y Ge. Su principio de operación es similar al de los contadores gaseosos, salvo que ahora se crean pares electrón-hueco en vez de pares e^-−ión. La aplicación de un potencial eléctrico exterior permite colectar la carga producida por el paso de la partícula. Se trata de detectores de partículas cargadas y γ de gran eficiencia y calidad; en efecto, el parámetro más importante que caracteriza las propiedades de los

semiconductores como detectores de partículas es la energía necesaria para producir un par e^-−hueco: ω_{Si} = 3, 62 eV para el Si (a 300 K) y es aún menor para el Ge: ω_{Ge} = 2, 96 eV (a 77 K).

La propiedad física que caracteriza los semiconductores es su estructura de bandas de valencia y conducción, que los distingue claramente de los conductores y de los aislantes. Los conductores poseen electrones en la banda de conducción y si se aplica un campo eléctrico siempre hay corriente eléctrica. En los aislantes sucede lo contrario, nunca hay electrones en la banda de conducción ya que se encuentra a un nivel imposible de alcanzar puesto que la diferencia energética entre la banda de valencia y la de conducción, llamada energía del *gap*, E_g, vale unos 10eV. Véase la figura 6.14 donde se observa esta estructura. Entre estas dos situaciones se encuentran los semiconductores. Su especial estructura de bandas, con energía del gap $E_g \sim$ 1 eV, posibilita que al aumentar la temperatura haya electrones que puedan "saltar" a la banda de conducción. Sucede que el electrón al saltar a la banda de conducción deja un "hueco" en la banda de valencia, que también tendrá un protagonismo; es decir, que también podrá dar lugar a una corriente de huecos.

Otra característica importante de los semiconductores más utilizados, el silicio y el germanio es su alta densidad (2,33 y 5,33 g cm^{-3} respectivamente) y su elevado número atómico (Z = 14 y Z = 32 respectivamente) que les dotan de aptitudes adecuadas para ser buenos detectores de fotones y de partículas de baja energía. Así por ejemplo, un protón de 3 MeV pierde toda su energía en 100 μm en el *Si* (una partícula α de 10 MeV en 40 μm). Pero su interés como detectores de partículas ha crecido por la facilidad con la que se pueden fabricar detectores de microbandas (detectores *microstrip*), con los que es fácil obtener resoluciones de medida de la posición de algunas micras.

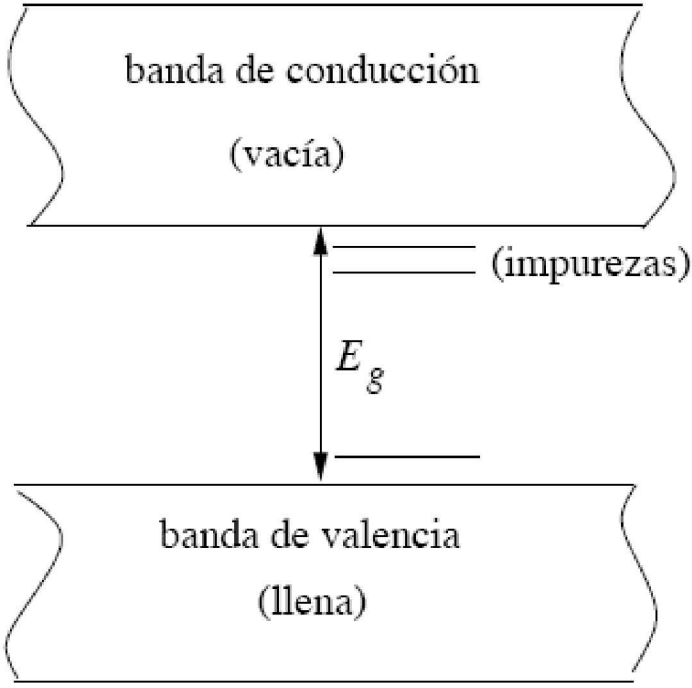


Figura 6.14: Estructura de bandas energéticas en aislantes y semiconductores. E_g es la energía del *gap*.

6.6.1 Semiconductores

Son cristales tetravalentes (Si, Ge) tales que el *gap* entre las bandas de valencia y conducción es del orden de $E_g \sim 1$ eV, que se compara con un gap de alrededor de 10 eV de los aislantes.

Para temperaturas > 0 K, algunos e^- y huecos se liberan respectivamente en las bandas de conducción y valencia. Aparecen dos tipos de corriente, la de los e^-, donantes en la banda de conducción y la de los huecos, receptores minoritarios en la banda de valencia. En semiconductores puros (intrínsecos) la concentración de portadores en equilibrio térmico cumple $n_e = n_h$ y su valor es:

$$n_e n_h = n_i^2 = AT^3 e^{-E_g/kT}$$

ya que la densidad de portadores es función de la temperatura: $n_e = n_h \sim T^{3/2} e^{-E_g/2kT}$ y $n_i = \sqrt{n_v n_c}$. Las concentraciones típicas de los semiconductores puros son muy bajas; por ejemplo a T = 300 K se tiene:

$n_i \sim$ $2{,}5\times10^{13}$ cm^{-3} para el *Ge* (o sea 1 átomo en 10^9)
$1{,}5\times10^{10}$ cm^{-3} para el *Si* (o sea 1 átomo en 10^{12})

La recombinación de pares es debida a la presencia de impurezas, cuya concentración debe mantenerse < 10^{10} cm^{-3}. Sin embargo existen impurezas con efectos positivos: dopantes tipo *n* o tipo *p*. Se llama semiconductor tipo *p*, al semiconductor dopado con impurezas tipo *p*, lo que se consigue inyectando átomos pentavalentes como B, In, Ga. A nálogamente será de tipo *n* si se dopa con átomos trivalentes, por ejemplo: P, As, Sb.

La densidad de corriente $j = \sigma\varepsilon = en_i v$, y como la velocidad viene dada por $v = \mu\varepsilon$ siendo μ la movilidad, se cumple que la conductividad $\sigma = r^{-1}$ es la inversa de la resistividad *r*. En un semiconductor puro se cumple que $\sigma = e(n_e\mu_D + n_h\mu_R)$ siendo además las movilidades de electrones y huecos prácticamente iguales $\mu_D \approx \mu_R$.

Las impurezas cambian la concentración de portadores; al aumentar, disminuye la resistividad del cristal y la conductividad cambia.

6.6.2 La unión *p–n* como detector

En la unión *p–n* se produce una compensación de portadores; o sea, el exceso de electrones se difunde hacia la zona de exceso de huecos o viceversa, dando lugar a un exceso de carga que, a su vez, crea un potencial eléctrico que impide la existencia de cargas en la unión. Aparece la denominada zona desierta, visible en la figura 6.15. Un sencillo modelo de carga espacial permite calcular el potencial eléctrico y el tamaño de la zona desierta (véase la figura 6.16). Sean n_D y n_R las densidades de donantes y receptores de las zonas *n* y *p*, respectivamente.

Si x_n y x_p dan los tamaños de la zona sin carga en las respectivas partes de la unión en el cristal (que es neutro), se tendrá que cumplir: $n_D x_n = n_R x_p$.
El potencial es la solución de la ecuación de Poisson:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} \tag{6.23}$$

siendo ϵ la constante diel´ectrica del semiconductor. La soluci´on es:

$$V(x) = \mp\frac{en_i}{\epsilon}\left(x^2 \mp x_i x\right) + C_i \tag{6.24}$$

donde el potencial de contacto (en x_n) $V_0 = \frac{e}{2\epsilon}\left(n_D x_n^2 + n_R x_p^2\right)$. Las constantes de integración desaparecen al exigir $V(x) = V_0$ en x_n y $V(x) = 0$ en $-x_p$. Se puede deducir la dimensión de la zona sin carga:

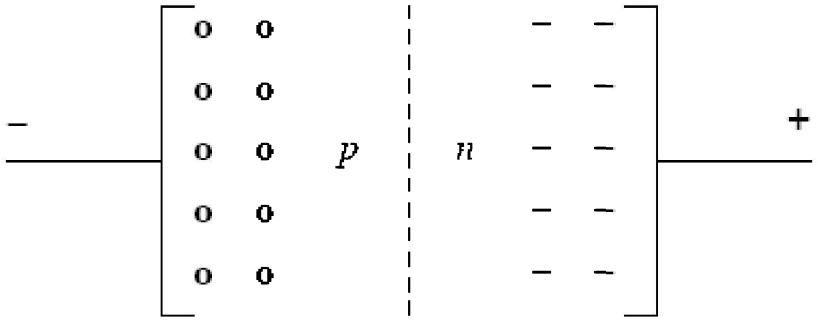


Figura 6.15: Principio de operación de una unión *p–n* como detector de partículas.

$$x_n = \left\{\frac{2\epsilon V_0}{en_D(1 + n_D/n_R)}\right\}^{1/2} \tag{6.25}$$

que también se cumple para x_p, sustituyendo n_D por n_R y viceversa con lo que:

$$d = x_p + x_n = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{e}\frac{n_{\mathrm{R}} + n_{\mathrm{D}}}{n_{\mathrm{R}} n_{\mathrm{D}}}}$$

Para un cristal tipo *p*, la densidad de receptores es $n_R >> n_D$ con lo que se cumple que $d \sim x_n$ y como $r^{-1} = en_D\mu_e$ se verifica que:

$$d \approx \sqrt{2\epsilon r \mu_e V_0} \qquad (6.26)$$

es decir, el tamaño de la zona desierta es prácticamente el tamaño de la región *n*, que es función de la densidad de portadores minoritarios. Por ejemplo para el *Si* de alta resistividad $r \sim 20\ K\Omega$ cm y $V_0 = 1$ V, queda $d \approx 75\ \mu$m lo que da lugar a una zona desierta muy pequeña. La solución para obtener buenos detectores de partículas es aplicar un potencial externo que aumente el tamaño de la zona desierta.

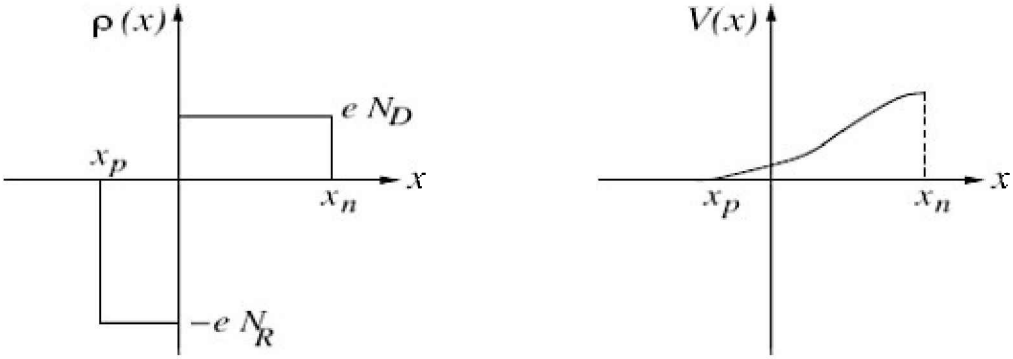


Figura 6.16: Distribución de carga y potencial en la unión *p–n*.

6.6.3 Potencial de polarización

Si se aplica un potencial externo (potencial de polarización V_B), puede ampliarse el tamaño de la zona desierta (véase la figura 6.15). El valor de V_0 debe sustituirse por $V_0 + V_B$ en la expresión (6.26). Al aumentar el tamaño, la capacitancia disminuye, porque $C = \epsilon\frac{S}{d}$, lo quemejora el ruido, pero sobre todo aumenta el tamaño de la zona desierta que es el

verdadero detector. Con $V_B \approx 300$ V, se obtienen tamaños del orden del mm. Sin embargo, no debe aumentarse V_B indiscriminadamente porque podría forzarse la conducción eléctrica a través del cristal llegando a dañarse. El límite viene dado por la resistividad.

6.6.4 Características de los detectores de estado sólido

A modo de resumen, se agrupan en la tabla 6.1 los parámetros físicos de los detectores semiconductores basados en el Si y el Ge.

Tabla 6.1: Parámetros del silicio y del germanio.

	Si	Ge	
Z	14	32	
A	28,1	72,6	
ρ	2,33	5,32	$\mathrm{g \cdot cm^{-2}}$
ϵ	12	16	
r (300 K)	$2,3 \times 10^5$	45	$\Omega \cdot \mathrm{cm}$
E_g (300 K)	1,1	0,7	eV
E_g (0 K)	1,21	0,785	eV
w	3,62	2,96	eV
μ_e (300 K)	1350	3900	$\mathrm{cm^2/V \cdot s}$
μ_h (300 K)	480	1900	$\mathrm{cm^2/V \cdot s}$

Y a continuación se resumen las 6 características más destacadas de los detectores semiconductores:

a) Se realizan contactos óhmicos (se denominan entonces p^+ o n^+, indicando con ello que las concentraciones de dopantes pueden alcanzar 10^{20} átomos cm^3 en vez de los 10^{13} átomos cm^3 habituales), que son

conductores y permiten conectar preamplificadores de carga de bajo ruido.

b) La energía necesaria para crear un par e^--hueco es w = 3, 62 (2,96) eV para el Si (Ge).

c) La señal $V = \frac{Q}{C} = \eta \frac{E}{wC}$ es lineal si la partícula pierde toda la energía en el detector. η es la eficiencia de colección de portadores.

d) La resolución es $V = \frac{Q}{C} = \eta \frac{E}{wC}$, con un factor de Fano F = 0, 12 para el Si, Ge. Así por ejemplo, para una partícula α de 5 MeV, R = 0, 07 % (3,5 keV), que en la práctica es mayor (unos 18 keV) debido al ruido introducido por la electrónica.

e) El ruido, debido a la corriente de fuga, es del orden de nA/cm^2. Las impurezas o los efectos de superficie aumentan esta corriente hasta μA/cm^2. Se suele medir en equivalentes de carga (*ENC*, carga equivalente al ruido). Si V_{rms} es el ruido, entonces, $ENC = e\frac{V_{rms}}{w}C$. Es importante mantener C pequeña.

f) El pulso es rápido (del orden del ns).

Además tienen otras ventajas; son insensibles a campos magnéticos y funcionan bién en el vacío. Tecnológicamente son fáciles de construir en cualquier geometría. Son detectores muy eficientes; en física nuclear son muy utilizados para la espectroscopia gamma, sobre todo el Germanio, aunque necesita de enfriamiento (instalación criogénica). En física de partículas su uso se ha extendido de forma extraordinaria y casi todos los espectrómetros modernos tienen detectores de trazas y de vértices basados en silicio.

6.7 Detección de partículas neutras

La detección de partículas neutras es posible gracias a la detección de las partículas cargadas producidas en la interacción de dichas partículas neutras. Sólo la interacción electromagnética de las partículas cargadas

produce señales observables y accesibles en los detectores.

La técnica empleada en la detección de las partículas neutras dependerá fundamentalmente de la energía y del tipo de interacción. Para fotones de baja energía se pueden construir buenos detectores de γ como ya se ha visto (NaI, Ge, BGO, etc.). A alta energía se han desarrollado los calorímetros, detectores de partículas neutras por excelencia que se han especializado en calorímetros electromagnéticos y calorímetros hadrónicos.

En todo caso, la detección de partículas neutras está basada en el tipo de su interacción con la materia:

- γ, electromagnética
- n, fuerte
- ν, débil

y éste será el enfoque que se utilizará en lo que sigue.

6.7.1 Detección de neutrones por interacción fuerte

El neutrón fue descubierto en 1932 por Chadwick, como ya se ha visto, al bombardear berilio con partículas α de una fuente de polonio; es decir, gracias al proceso $^{9}_{4}\mathrm{Be}(\alpha, \mathrm{n})^{12}_{6}\mathrm{C}$, seguido de un blanco de parafina en el que detectó la colisión elástica n + p → p + n.

El neutrón, en estado libre, tiene una vida media muy larga: τ_n = 880,3 ± 1,1 s. La desintegración del neutrón es debida a la interacción débil. Es la conocida desintegración beta del neutrón. Antes de desintegrarse sólo tiene colisiones por interacción fuerte.

La interacción fuerte es menos probable que la interacción electromagnética.Ésta tiene un alcance infinito y la fuerza fuerte tiene un alcance del orden del fm (10^{-13} cm). Como la materia está prácticamente vacía, los neutrones penetran mucho más que las partículas cargadas,

porque tienen menos probabilidad de encontrar un núcleo en su recorrido.

Los neutrones pueden tener diversos tipos de reacciones con la materia:

- Colisiones elásticas con núcleos; por ejemplo A(n, n)A. Así los neutrones van perdiendo energía.

- Reacciones inelásticas; A(n, n)A^*, o con producción de más de un neutrón. El núcleo en el estado final, excitado, puede emitir fotones al desexcitarse.

- Captura radiativa. Importante a bajas energías porque la sección eficaz varía $\sigma \sim 1/v$, siendo v la velocidad del neutrón. Las reacciones son $n + A \rightarrow \gamma + A'$, siendo A' un isótopo de A con un neutrón más. A veces aparecen superpuestos varios picos en las secciones eficaces (resonancias).

- Reacciones de captura del neutrón. Son procesos importantes a baja energía (eV al keV), como por ejemplo reacciones tipo (n, p), (n, d), (n, α), (n, t).

- Fisión por captura neutrónica. Importante a energías *térmicas* ($E \sim kT$ = 1/40 eV).

- Reacciones a gran energía.

En los detectores de neutrones que existen en el laboratorio, las reacciones de interés para detectar neutrones *térmicos* utilizan frecuentemente el boro, ^{10}B(n, α)^{7}Li +2,79 MeV, que es una reacción de captura neutrónica. Los 2,79 MeV recuerdan que es el valor Q de la reacción y por lo tanto es exoenergética.

El estudio de las reacciones de los neutrones es muy importante porque determinan la estructura de los núcleos de los reactores de fisión, y de sus envolventes. Las secciones eficaces están generalmente bien

determinadas, y pueden fácilmente encontrarse en la bibliografía especializada.

El fenómeno más importante en los reactores de fisión (véase la Sección 13.2) es conseguir que los neutrones pierdan energía (desde algunos MeV) hasta termalizarse (una fracción de eV). Este proceso se denomina moderación. Se consigue simplemente por choques elásticos con material ligero (grafito, agua pesada). En efecto, un neutrón de energía (en el sistema laboratorio) E_n que colisiona elásticamente con un núcleo de masa A, después del choque la energía del neutrón (en el sistema laboratorio) E'_n, emitido en el ángulo θ^* (en el centro de masas) de la reacción cumple:

$$\frac{E'_n}{E_n} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta^*}{(A+1)^2} \tag{6.27}$$

de donde se confirma que cuando A es muy ligero ($A \sim 1$), se logra el máximo de pérdida de energía (supóngase por ejemplo $\cos\theta^* = -1$). Si se utilizase hidrógeno como blanco, en unos diez choques en promedio, el neutrón se termalizaría.

6.8 Problemas

6.1 Tiempo muerto de un detector

Una de las características fundamentales de todo contador es su capacidad para permitir el recuento de actividades elevadas. Esta cualidad se expresa mediante el tiempo de resolución o tiempo muerto τ, definido como el tiempo mínimo que es necesario que transcurra entre la llegada consecutiva al detector de dos partículas para que den lugar a dos cuentas diferenciadas. Para determinar el valor de τ en un caso concreto, se cuenta con dos muestras radiactivas de elevada actividad (aunque ésta nos es desconocida en principio). Calcular τ a partir de las siguientes

observaciones:

a) Mediante una pantalla adecuada cubrimos la segunda y primera muestra, sucesivamente, de forma que el detector registra n_1 = 120 y n_2 = 180 cuentas por segundo, respectivamente.

b) Se descubren ambas muestras y se registran n_{12} = 295 cuentas por segundo.

c) Se situa ahora una fuente radiactiva a una distancia d = 10 cm del detector anterior, cuyo diámetro es de 4 cm, y se registran 6000 cuentas en 10 minutos con un ruido de fondo de 400 cuentas. Calcular la actividad de la fuente si se sabe que la eficiencia intrínseca del detector es de 0,600± 0,005 y su aceptancia de 1,000 ± 0,001.

6.2 Interacción de fotones con la materia

Un haz paralelo de fotones monoenergéticos de energía inferior a 1 MeV incide perpendicularmente sobre un centelleador de NaI de 4 cm de diámetro y un espesor de d = 1 cm. Se pide:

a) Establecer la ley de evolución de la intensidad del haz incidente a medida que este penetra en el centelleador.

b) Encontrar la probabilidad que tiene un fotón incidente de interaccionar en el centelleador por efecto fotoeléctrico, por efecto Compton y por cualquiera de los dos efectos anteriores.

c) Se considera el centelleador anterior para detectar fotones de 660 keV provenientes de una fuente puntual radiactiva de ^{137}Cs. La fuente tiene una actividad de 100 μCi y se encuentra situada a una distancia de 1 m del detector. Calcular el número total de fotones iniciales que atraviesan el cristal sin interaccionar. Tómese μ_{ph} = 0,25 cm^{-1} y μ_C = 0,34 cm^{-1} en el centelleador.

d) Luego se situa una lámina delgada de aluminio (ρ = 2,7

g/cm^3) de 1 mm de espesor entre un haz de intensidad 10^6 fotones/s y el detector. El haz incide con un ángulo ϕ respecto a la normal de la lámina de aluminio y el detector se coloca de forma que detecta los fotones dispersados con un ángulo θ respecto a la dirección del haz inicial. El centelleador subtiende un ángulo sólido dw con respecto al punto de impacto del haz sobre el difusor. Obtener una expresión para el número de fotones difundidos por unidad de tiempo hacia el detector y el número de fotones detectados por efecto fotoeléctrico. Calcular estos valores en el caso de $\phi = 45°$, $\theta = 90°$, $(d\sigma/d\Omega)_{\theta = 90°} = 1{,}3 \times 10^{-26}$ cm^2, $dw = 10^{-3}$ stereorad y los mismos valores para μ_{ph} y μ_C que en el apartado anterior.

6.3 Radiación Cherenkov e identificación de partículas

Se considera la radiación Cherenkov producida por las partículas de un haz en una lámina transparente de caras paralelas e índice de refracción n. El haz, que ha sido analizado magnéticamente y está formado, por consiguiente, por partículas del mismo momento lineal p, incide normalmente a la lámina. La cara por donde entran las partículas en la lámina está ennegrecida absorbiendo totalmente la luz que recibe, mientras que la otra está pulida ópticamente y la luz que sale está dirigida hacia un fotomultiplicador después de reflejarse en un espejo de aluminio (figura 6.17).

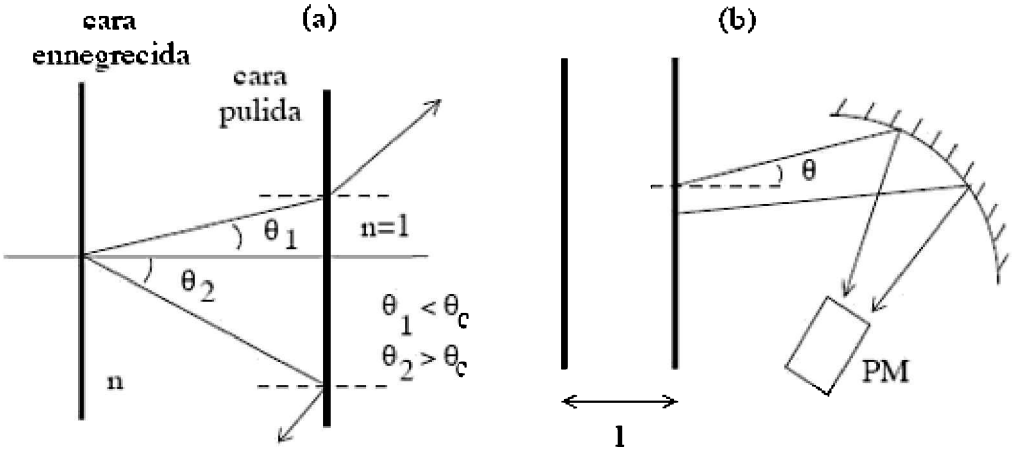


Figura 6.17: (a) Definición del ángulo umbral de reflexión total, θ_c, dado, de acuerdo con la ley de la refracción de Snell, por la condición n sin θ_c = sin(π/2), de donde θ_c = arcsin(1/n). (b) Diagrama esquemático para la recolección de fotones en un fotomultiplicador.

Se pide:

a) Demostrar que el dispositivo anterior permite seleccionar las partículas por su velocidad.

b) Se utiliza dicho detector para separar los muones de un haz contaminado por piones y electrones. Determinar el valor del índice de refracción n a partir del cual se pueden seleccionar los muones siempre y cuando el momento esté comprendido en un cierto intervalo. Determinar dicho intervalo para n = 1,5. ¿Cuál es el valor máximo del momento a partir del cual el dispositivo pierde su selectividad?

Datos: $m_\pi = 280\ m_e$, $m_\mu = 210\ m_e$, $m_e = 0{,}5$ MeV/c.

6.4 Detección de fotones Cherenkov por fotomultiplicadores

El número de fotones Cherenkov del Problema **6.3** de longitud de onda comprendida entre λ y $\lambda + d\lambda$ creados por unidad de recorrido de una partícula cargada en un medio de índice n viene dado por la expresión:

$$dN = 2\pi\alpha \sin^2\theta \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

donde θ es el ángulo de emisión de la luz Cherenkov y α la constante de estructura fina. Si en el dispositivo la luz que emerge de la lámina pulida es dirigida hacia un fotomultiplicador después de una reflexión sobre un espejo de aluminio de coeficiente de reflexión ρ, se pide:

a) Establecer la expresión de la carga total Q que llegará al ánodo del fotomultiplicador para una partícula de velocidad β incidente sobre la lámina de espesor l. Suponiendoque la luz Cherenkov se produce con una constante de tiempo τ_0 determinar, en función del tiempo, la expresión de la carga recolectada por el ánodo (tomar como el origen de tiempo el instante en que los primeros electrones llegan al ánodo y suponer despreciables las fluctuaciones temporales del tránsito de los electrones en el fotomultiplicador).

b) Si R es la impedancia del ánodo del fotomultiplicador y C su capacitancia parásita en paralelo con R ($\tau = RC$), establecer la forma del pulso de tensión que aparecerá sobre el ánodo. Obtener las expresiones del tiempo de subida del pulso y su amplitud en un caso general y para $\tau \gg \tau_0$.

c) Considerar un muón de momento pc = 100 MeV que atraviesa la lámina de espesor l = 1 cm e índice de refracción n = 1,5. Calcular el valor máximo de la amplitud de voltaje detectada en el ánodo del fotomultiplicador tomando $\tau \gg \tau_0$, m_μ = 105,7 MeV/c^2, e = 1,602 × 10^{-19} C, α = 1/137, eficiencia cuántica η = 0,2, banda de sensibilidad entre λ_1 = 2700 Å y λ_2 = 5700 Å, R = 10 kΩ, C = 10 pF y ganancia G = 10^8.

6.5 Espectro de fotones Cherenkov

La pérdida de energía de una partícula por unidad de longitud

por producción de radiación Cherenkov viene dada por la expresión:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 \alpha \hbar}{c} \int \sin^2 \theta_c w dw$$

con βc su velocidad, z su carga (en unidades de la carga del electrón), θ_c el ángulo de emisión Cherenkov y w la frecuencia de la radiación.

a) Estimar el número de fotones emitidos por unidad de longitud en el rango del visible para un electrón con β = 0,9 al atravesar agua (n = 1,33).

b) Se pretende construir un contador Cherenkov en modo umbral para distinguir entre kaones y piones de 15 GeV/c de momento. Si el fotocontador del que se dispone requiere al menos una detección de 175 fotones en el rango del visible para que su eficiencia se aceptable, estimar el tamaño del detector a construir. Tomar n = 1,0004.

6.6 Telescopio espacial Compton

Un telescopio espacial Compton para la detección astronómica de rayos γ en el rango energético del orden del $\mathcal{O}$(MeV) consta de dos detectores formados por una capa de dispersión y otra de absorción. La primera permite la medida de la posición y la energía transferida al electrón después de la dispersión Compton de un fotón incidente cuyo ángulo de incidencia se desconoce. El segundo detector absorbe el fotón dispersado y mide su energía.

a) Mostrar cómo de esta forma se puede medir la energía del fotón incidente y la dirección del fotón dispersado con respecto al eje del telescopio. ¿Qué puede decirse del origen del fotón incidente?

b) Discutir quéo curre si el fotón dispersado no es

completamente absorbido en el segundo detector sino que es de nuevo dispersado por efecto Compton. Mostrar como, al añadir un tercer detector que permita la medida de la dirección del segundo fotón dispersado, es posible de nuevo reconstruir la energía del fotón original y su dirección.

6.7 Contador Cherenkov en régimen diferencial

La radiación de Cherenkov puede ser utilizada para diseñar un detector de partículas que las identifica (conocida la cantidad de movimiento) a través del ángulo de emisión de los fotones (contadores Cherenkov en régimen diferencial). Se pide:

a) Demostrar que la precisión que se puede alcanzar en la identificación de las partículas viene dada por la expresión $\varepsilon_r(m) = [\gamma^4 \varepsilon_r^2(\beta) + \varepsilon_r^2(p)]^{1/2}$, donde $\varepsilon_r(\beta)$ se relaciona con la precisión en la determinación del ángulo de emisión a través de la relación $\cos\theta = 1/\beta n$.

b) Demostrar la expresión: $\dfrac{dm}{m} = \gamma^2 \tan\theta d\theta + \dfrac{dp}{p}$.

c) Una partícula con cantidad de movimiento 3 GeV/c entra en un contador Cherenkov de índice de refracción n = 1,02. Si el espectrómetro magnético ha determinado su cantidad de movimiento con una precisión del 5% y el ángulo de emisión de la radiación con un 10 %, averiguar si permitirádiscernir entre un π y un K.

6.8 Efectos Compton y Cherenkov combinados

Un haz colimado y estrecho de rayos X paralelo es enviado sobre una cámara de reacción colocada en el seno de un campo magnético uniforme de intensidad B. En una de las muchas fotografías realizadas del interior de la cámara se observa un electrón Compton cuya trayectoria tiene un radio de curvatura R

con un ángulo θ = 10° respecto al haz incidente. Sabiendo que *BR* = 5000 Gcm, se pide:

a) Determinar la energía y longitud de onda del fotón incidente y del fotón difundido.

b) Averiguar si la energía del haz incidente es suficiente para que estos fotones puedan ser detectados por medio de la luz Cherenkov producida por los electrones Compton en un medio transparente de índice *n* = 1,33.

---

[1]Véase, por ejemplo, a Knoll [20], pág. 121, que se cita en la bibliografía.

[2]*Proc. Roy. Soc.*, **A81** (1908) 141.

7. Métodos estadísticos en física nuclear y de partículas

El objetivo de todo experimento es medir magnitudes físicas. Al realizar una medida, se obtiene un valor numérico, que vendrá dado en las unidades de medida del instrumento utilizado. Este número tendrá asociado con él un error: el error de medida. Si vuelve a repetirse la medida, es muy probable que se obtenga otro resultado. Esto es debido a la existencia de errores instrumentales. En un experimento se suelen hacer varias medidas, con lo que gracias a la estadística será posible estimar el error de medida. Así pues, el resultado de un experimento será un conjunto de datos. Se suele hablar de *tratamiento de datos* o de *análisis de resultados* de un experimento. La finalidad del tratamiento de datos es extraer los dos tipos de resultado siguientes:

- Si se pretende determinar el valor verdadero de un observable que es desconocido: se dice entonces que el objetivo es la determinación de un parámetro.

- Probar la consistencia de una teoría con los datos obtenidos: es un test de hipótesis.

La teoría de probabilidades y la estadística son dos instrumentos importantes de ayuda a la interpretación de los resultados de los experimentos. La estadística es una herramienta de diseño y

planificación; ayuda a estimar tolerancias en instrumentos, tiempos de ejecución, costes, etc. La estadística ayudará a resolver los dos tipos de problema aquí planteados.

7.1 Errores instrumentales y estadísticos

Sea x^* el valor verdadero de la magnitud x, desconocido, del que se ha realizado una medida $\hat{x}$. El error, según Webster, es la diferencia entre el valor medido y el verdadero. También se conoce por incertidumbre a la cantidad δx, que define un intervalo en el que se encuentra el valor verdadero de la magnitud:

$$x - \delta x \leq x^* \leq x + \delta x$$

La incertidumbre es pues una cantidad en principio muy pequeña; por ello es muy frecuente que ciertos cálculos sencillos de errores se realicen suponiendo que matemáticamente son diferenciales, con lo que los cálculos y las propagaciones de incertidumbres se realizan como si fuesen diferenciales. Aquí lo que interesa son los errores estadísticos que, como se verá, se asocian a desviaciones típicas, que se propagan de otra manera (cuadráticamente).

Al estudiar los errores en las medidas conviene antes aclarar que existen dos tipos de errores:

a) Error sistemático, debido a un bies (o un sesgo) en el experimento. Afecta por igual a todas las medidas (ejemplo: el cero del instrumento). No existen métodos ni procedimientos para calcularlos; debe conocerse muy bien el detector y el aparato utilizado. Para estimarlo, hay que recurrir a otro experimento independiente.

b) Error aleatorio, que sí puede ser tratado por la estadística. Los errores aleatorios son debidos a las incertidumbres

experimentales y/o a la naturaleza estadística del fenómeno estudiado. No es asignable a ninguna causa concreta; más bien es fruto de una acumulación de pequeñas alteraciones regidas por las leyes del azar.

Dentro de los errores aleatorios se puede, a su vez, distinguir entre dos tipos de error:

1) El error instrumental, que explica las fluctuaciones debidas a las imperfecciones de los aparatos de medida (o del observador). En magnitudes descritas por variables continuas suelen distribuirse según la ley de Gauss. Se puede decir que la precisión de un instrumento de medida está ligada al error instrumental.

2) El error estadístico es debido a la incertidumbre propia de la medida (por utilizar una muestra finita) o porque el proceso es intrínsecamente aleatorio (como sucede en las medidas de propiedades atómicas o nucleares, como por ejemplo el número de desintegraciones de un núcleo en un intervalo de tiempo Δt).

Medir, desde el punto de vista estadístico, es obtener una muestra finita de una población teórica que debería estar compuesta por una muestra de datos infinita. El experimentador utiliza los estimadores de la muestra para estimar los verdaderos valores de los parámetros.

Los errores experimentales son variables aleatorias. Estas variables son objeto del estudio de la teoría de probabilidades y la estadística.

Es tarea del físico experimental saber estimar y minimizar los errores aleatorios de su aparato y también reducir los efectos de los sistemáticos al mínimo. (No se consideran aquílos errores garrafales, que simplemente hay que corregir.)

El error indica la precisión de la medida; por ejemplo supóngase que cierto experimento realizó la medida de la velocidad de la luz en el vacío y publicó su resultado:

$$c = (3,09 \pm 0,15) \times 10^8 \text{ m/s} \qquad (7.1)$$

En este caso $3{,}09\times10^8$ m/s es el valor medio y para designar el error, convencionalmente se utiliza σ, la desviación cuadrática media o la desviación estándar (en este caso $\sigma = 0{,}15\times10^8$ m/s). Con ello se sabe de antemano la probabilidad de obtener una medida más o menos alejada del valor medio $\bar{c} = 3,09 \times 10^8$ m/s.

A continuación se repasan las distribuciones de probabilidad más importantes para la física.

7.2 Distribuciones de probabilidad

En estadística no puede predecirse cuál será el resultado de un fenómeno aleatorio (una medida, por ejemplo). Sólo se puede calcular la frecuencia de posibles resultados, y ésta viene dada por la distribución de probabilidad $f(x)$.

Las distribuciones de probabilidad pueden ser:

- discretas; en este caso $f(x_i)$ da la frecuencia del valor x_i
- continuas; ahora $f(x)dx$ da la probabilidad de encontrar x en el intervalo $[x, x + dx]$.

En general las distribuciones de probabilidad dependen de uno o varios parámetros θ: $f(x; \theta)$, que pueden estimarse pormétodos estadísticos.

Las distribuciones de probabilidad están normalizadas por lo que cumplen:

$\sum_i f_i = 1$, en el caso de una función discreta y

$\int f(x)dx = 1$, si se trata de una función continua.

Conocer las distribuciones de probabilidad que se verán a continuación es disponer de una herramienta muy potente para entender

y analizar los datos de un experimento. Su importancia es doble:

1 Si se conocen los parámetros de una distribución, puede utilizarse para predecir el resultado que se espera de una medida. Por ejemplo, sabiendo que la probabilidad al lanzar un dado salga un uno es 1/6, se puede calcular la probabilidad de que al tirar cinco dados, aparezcan tres unos (distribución binomial).

2 Si no se conocenlos parámetros de la distribución, pero se dispone de N medidas x_i de una magnitud, como por ejemplo la longitud de una mesa, y se sabe que es un proceso regido por la distribución de Gauss, se pueden determinar los parámetros de dicha distribución.

El hecho es que normalmente, las fluctuaciones en las medidas conducen a desviaciones entre lo que se espera y lo que realmente se obtiene. La solución la da la ley de los grandes números. Esta ley dice que en cualquier experimento, cuando el número de medidas N tiende a infinito, las frecuencias medidas tienden a las probabilidades predichas por las distribuciones teóricas.

7.2.1 Parámetros estadísticos: media y varianza

A continuación se enumeran algunos parámetros estadísticos que tienen importancia para determinar las propiedades de las funciones densidad de probabilidad y, en particular, en la estimación de errores en las medidas de magnitudes.

Función acumulativa $F(a)$

La función acumulativa $F(a)$ de la función distribución de probabilidad $f(x)$, dala probabilidadde que $x < a$:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{7.2}$$

Es una función monótona creciente, $0 \leq F(x) \leq 1$ y permite calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor contenido en un intervalo; por ejemplo, Prob($a < x \leq b$) = $F(b) - F(a)$.

Valores esperados

Sea x la variable aleatoria. El valor esperado de x, $E[x]$, se define:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{7.3}$$

La extensión al caso de una función $u(x)$ de la variable aleatoria es inmediata,

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x)dx$$

que cumple $E[ax + b] = aE[x] + b$, siendo a y b constantes.

Existen valores esperados muy utilizados en física. Son casos particulares de los momentos de las funciones distribución de probabilidad, que se estudian a continuación.

Momentos de distribuciones de probabilidad

Los momentos de las distribuciones de probabilidad caracterizan completamente las distribuciones de probabilidad.

Son de uso frecuente los llamados momentos de orden k:

$$\mu_k = E[x^k]$$

y losmomentos centrales de orden k:

$$\mu'_k = E[(x-\mu)^k]$$

Los momentos más importantes y más frecuentemente utilizados son:

- la media μ, que equivalea $\mu_1 = E[x]$
- varianza $Var(x) = \sigma^2$, que es elmomento central de orden 2:

$$Var(x) = \mu'_2 = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 \qquad (7.4)$$

  Se usa también la notación $\sigma^2 = Var(x) = V(x)$. Se cumple $V(ax + b) = a^2 V(x)$.

- la desviación estándar es $\sigma = \sqrt{V(x)}$.
- la mediana se define como el valor $\mu_{1/2}$ que cumple $F(\mu_{1/2}) = 1/2$.
- el llamado *skewness* $\xi = E[(x - \mu)^3]$, mide el grado de asimetría de una distribución.

  En el caso de funciones multivariadas, $f(x, y)$, pueden definirse momentos de cada una de las variables, por ejemplo,

$$\mu_x = E[x] = \int\int x f(x,y)\,dx\,dy;$$

  y también pueden existir correlaciones entre variables aleatorias, por ello se introduce

- la covarianza: $\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$. Se cumple siempre que $\text{cov}(x, y) \leq \sigma_x \sigma_y$.

El coeficiente de correlación lineal, adimensional, se define: $\rho_{xy} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$, y cumple $|\rho_{xy}| \leq 1$. Es decir, está comprendido entre

+ 1 y −1. Si $\rho_{xy} = 0$, las variables *x* e *y* no están correlacionadas; el valor de una es independiente de la otra. Sin embargo si $\rho = \pm 1$, están totalmente correlacionadas; conocido *x* se sabe el valor de *y*.

Dos variables aleatorias son independientes si $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, siendo $f_1(x) = \int f(x, y)dy$ y además $\rho_{xy} = 0$. También cumplen,

$$E[f_1(x) \cdot f_2(y)] = E[f_1(x)]E[f_2(y)]$$

$$V(x + y) = V(x) + V(y)$$

En teoría de errores, la covarianza tiene una gran utilidad, ya que determina la matriz de errores para el caso de varias variables. En particular los elementos de la diagonal, coinciden con las varianzas: cov(*x*, *x*) = *V* (*x*).

7.3 Distribuciones uniforme, binomial, Poisson, Gauss y χ^2

Se estudian a continuación aquí las funciones densidad de probabilidad más importantes en física experimental.

7.3.1 La distribución uniforme, $f_u(x)$

La distribución uniforme entre los límites *a* y *b* (véase el ejemplo en la figura 7.1) se define:

$$f_u(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{para } a \leq x \leq b$$

$$f_u(x) = 0 \qquad \text{para cualquier otro valor de } x.$$

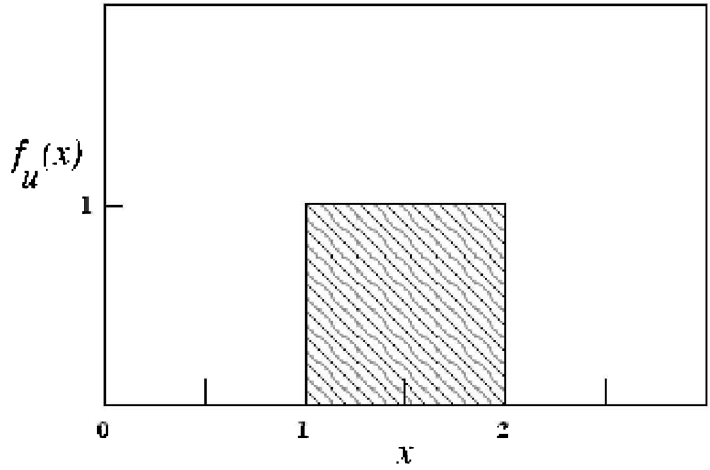


Figura 7.1: Distribución uniforme entre $x = 1$ y $x = 2$.

La media y la varianza de esta distribución puede comprobarse fácilmente que valen:

$$E[x] = \frac{b+a}{2} \qquad Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{7.5}$$

La distribución uniforme es la que describe las frecuencias de sucesos al azar, por ejemplo las funciones *random* de los ordenadores. Estas distribuciones son muy utilizadas en los cálculos Monte Carlo, que es el método utilizado para simular fenómenos complejos en física nuclear y física de partículas.

7.3.2 La distribución binomial, $f_b(x)$

Estudia procesos conocidos por el nombre de procesos Bernouilly, cuyo resultado es dual: sí (éxito), o no (fracaso). Si se realizan n pruebas independientes y p es la probabilidad de éxito ($q = 1 - p$, la de fracaso), la distribución binomial da la probabilidad de obtener r (= 0, 1, 2, …, n) éxitos:

$$\boxed{f_b(r;n,p) = \frac{n!}{r!(n-r)!}p^r q^{n-r}} \qquad (7.6)$$

La media y la varianza de esta distribución valen:

$$E[r] = np \qquad Var(r) = np(1-p) = npq$$

En efecto,

$$\mu = \sum_0^n r f_b = np \sum_0^n p^{r-1}(1-p)^{n-r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!},$$

que con los cambios $r' \rightarrow r - 1$ y $n' \rightarrow n - 1$, se verifica que está normalizada a 1.

Para calcular σ^2, se calcula el valor esperado del producto $E[r(r-1)] = p^2 n(n-1)$ y como $Var(r) = E[r^2] - \mu^2$ (véase (7.4)) resulta $\sigma^2 = np(1-p)$.

Entre las propiedades más interesantes de la función binomial cabe destacar que tiene por límite a dos de las funciones más importantes de la estadística; éstas son las funciones de Gauss y Poisson. En efecto, se cumple que

$$\text{si } n \geq 30 \text{ y } p \geq 0{,}05, \qquad f_b \longrightarrow f_g(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{si } p \leq 0{,}05 \text{ y } np \text{ finito} \qquad f_b \longrightarrow f_p(\mu).$$

en donde $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.

7.3.3 La distribución de Poisson $f_p(x)$

Da la frecuencia de sucesos r en un intervalo de la variable x (que puede ser por ejemplo espacio o tiempo) esperados cuando la media es μ.

La distribución de Poisson es:

$$f_p(r;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \qquad r = 0, 1, 2, ... \tag{7.7}$$

La media y la varianza de esta distribución coinciden:

$$E[r] = \mu \qquad Var(r) = \mu$$

En efecto, el valor medio $E[r] = \langle r \rangle = \sum_0^\infty r \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}$. Eliminando el término $r = 0$, quedará $\langle r \rangle = \sum_1^\infty \mu \frac{e^{-\mu}\mu^{r-1}}{(r-1)!} = \mu e^{-\mu} \sum_0^\infty \frac{\mu^{r'}}{r'!} = \mu$, simplemente habiendo reescrito $r = r - 1$ y teniendo en cuenta que $\sum \frac{\mu^x}{x!} = e^\mu$. La varianza es $Var(r) = E[r^2] - \mu^2$. Si se calcula $E[r(r-1)] = \sum_0^\infty r(r-1)\frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}$. Eliminando los términos $r = 0, 1$ queda $\langle r(r-1) \rangle = \mu^2 e^{-\mu} \sum_0^\infty \frac{\mu^{r'}}{r'!}$, es decir $\langle r^2 - r \rangle = \mu^2$, luego $Var(r) = E[r^2] - \mu^2 = \mu$. Que la media y varianza sean iguales es la propiedad más interesante de la distribución de Poisson que se aplica a los experimentos cuyo resultado es un número de cuentas *n*;se supone que el valor medio es $\mu = n$ y por la tanto el mejor estimador del error es la desviación estándar $\sigma = \sqrt{n}$. Es fácil verificar que está normalizada, puesto que $\sum_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!} = e^{-\mu} \sum_0^\infty \frac{\mu^r}{r!} = 1.$

La distribución de Poisson describe la ley de producción de *sucesos*

raros, o sea, desucesos cuya probabilidad de producción es muy pequeña. Tómese por ejemplo la probabilidad de desintegración de un núcleo radiactivo de vida media, τ, larga; o sea $\lambda = 1/\tau$ muy pequeña. La probabilidad de una desintegración en el intervalo de tiempo dt será λdt, y el valor medio del número de desintegraciones en el intervalo de tiempo t, $\mu = \lambda t$. La probabilidad de que no haya ninguna desintegración en dt será $1 - \lambda dt$, luego la probabilidad de observar r desintegraciones en el intervalo temporal $t + dt$, habida cuenta de que como máximo puede existir una sola desintegración en dt, será la suma de probabilidades:

$$p_r(t + dt) = p_r(t)(1 - \lambda dt) + p_{r-1}(t)\lambda dt$$

o sea, $\frac{dp_r}{dt} = \lambda [p_{r-1} - p_r]$ lo que conduce a la distribución de Poisson simplemente redefiniendo $f_p(r) = p_r$:

$$f_p(r; \mu = \lambda t) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Se comprueba fácilmente que para $p \to 0$, $n \to \infty$ y np finito, f_p resulta ser límite de la ley binomial, poniendo $p = \frac{\mu}{n}$. Un ejemplo de distribución de Poisson puede verse en la figura 7.2.

Procesos independientes –señal y ruido– definidos por la suma de medias $\mu_s + \mu_r$ que contribuyen independientemente en una medida con los números de cuentas n_s y n_r, dan como resultado $n_s + n_r$, que se distribuye como $\mu = \mu_s + \mu_r$. O sea, para dos fenómenos independientes s y r que contribuyen a un recuento x:

$$f_p(x;\mu) = \sum_{n_s=0}^{x} f_p(n_s;\mu_s)\cdot f_p(x-n_s;\mu_r)$$

$$= \frac{e^{-(\mu_s+\mu_r)}(\mu_s+\mu_r)^x}{x!}$$

lo que prueba la ley de la suma de procesos independientes.

Ejemplo: La probabilidad de desintegración de un núcleo de ^{137}Cs es $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 8,2\times 10^{-10}\ s^{-1}$ ya que $t_{1/2}(^{137}\text{Cs}) = 27$ años. Si se tiene ~1 μgr de Cs, o sea unos 10^{15} núcleos, se cumple entonces que $\mu = n\lambda = 10^5$ desintegraciones/seg. Si se cuenta el número de desintegraciones cada milisegundo, se esperan $\mu = 100$ desintegraciones. En realidad se obtendrá una distribución de Poisson con $\mu = 100$.

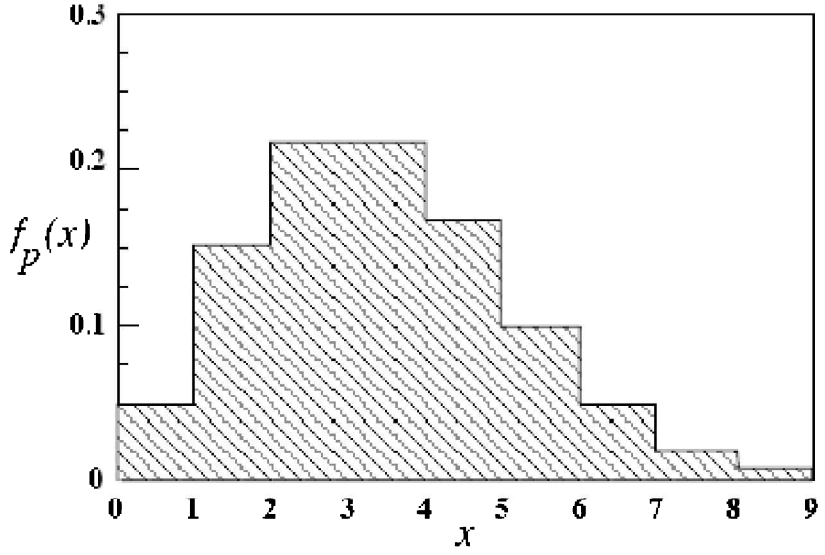


Figura 7.2: La distribución de Poisson para μ=3.

7.3.4 La distribución normal o de Gauss

Es la más importante y la que suele tener más aplicaciones en física. Reproduce frecuentemente el comportamiento de muchas medidas de magnitudes físicas. La primera referencia que se tiene de ella viene del matemático inglés Moivre (1733). Se define:

$$f_g(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.8)$$

La media y la varianza de esta distribución son los propios parámetros utilizados en su definición:

$$E[x] = \mu \qquad Var(x) = \sigma^2$$

Se suele usar la anchura total a media altura[1] FWHM = $2\sigma\sqrt{2\ln 2}$ = 2, 354 σ. La función de Gauss definida en (7.8) está normalizada a 1.

Su integral acumulativa no es analítica, por eso se recurre a tablas de la función de la variable reducida $z = (x - \mu)/\sigma$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. La variable z suele llamarse tipificada. La función acumulativa en este caso es,

$$F_g(a;0,1) = 0,5\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

donde erf(x) es la llamada *función error*, frecuentemente tabulada, cuyo valor

$$\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a e^{-t^2/2}dt$$

Sin embargo, puede utilizarse una buena aproximación paramétrica:

$$F_g(z_c) = \int_{-\infty}^{z_c} f_g(z)dz = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_c^2/2} \left(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)$$

donde $t = 1/(1 + a_0 z_c)$ y los valores de los parámetros son:

$a_0 = 0, 33267$; $a_1 = 0, 4361836$; $a_2 = -0, 1201676$; $a_3 = 0, 9372980$

El 50 % del área de f_g está limitada por $\mu \pm 0, 67\sigma$. El máximo ($df_g/dz = 0$) de la función reducida tiene lugar para $z = 0$ y vale $f_g(0) = 0, 3989$. Los puntos de inflexión de la curva ($d^2f_g/dz^2 = 0$), corresponden a $z = \pm 1$ y en ellos la función vale $f_g(\pm 1) = 0, 24$. Pueden verificarse estos valores en la gráfica de la función de Gauss (figura 7.3).

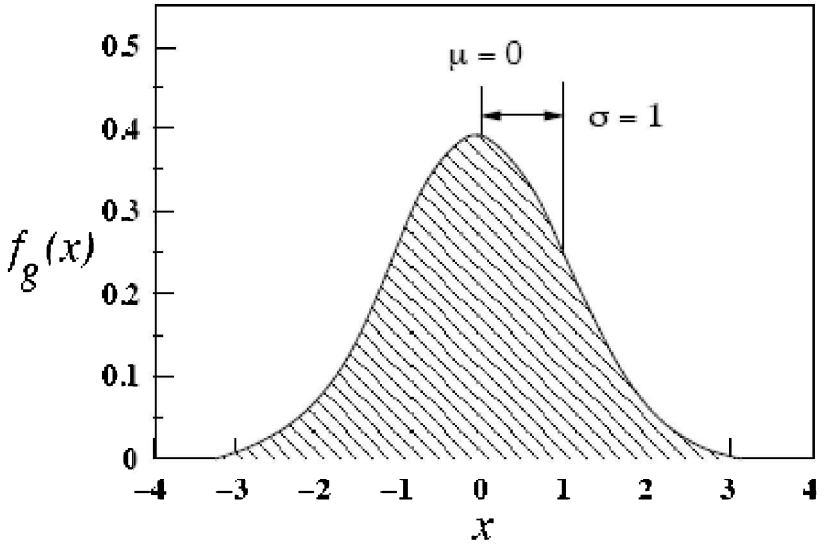


Figura 7.3: La distribución de Gauss ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$).

Es muy importante conocer las áreas contenidas en intervalos de $z_c \times \sigma$, calculables con la función acumulativa, $F_g(z_c) - F_g(-z_c)$, dando

$$1\sigma \rightarrow 68,3\ \%$$
$$2\sigma \rightarrow 95,5\ \%$$
$$3\sigma \rightarrow 99,7\ \%$$

Estas áreas, definen los intervalos de probabilidad o intervalos de confianza de la variable aleatoria (véanse las tablas H.1 y H.2 del Apéndice H).

Así por ejemplo, si se conocen la media, μ, y la desviación típica, σ, de una muestra de datos x_i; $i = 1, \ldots, n$, se pueden calcular los intervalos de confianza sobre la media:

$$\overline{x} - z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

en donde $z_c = 1, 2, \ldots$ representaría la anchura del intervalo.

Ahora queda claro el significado del error que se presentó en(7.1); el valor de la desviación típica $\sigma = 0{,}15\times10^8$ m/s, implica que el valor verdadero de la velocidad de la luz tiene una probabilidad del 68,3 % de encontrarse en el intervalo $(3{,}09\pm0{,}15)\times10^8$ m/s lo que equivale a *más menos un sigma*. Otra forma de entenderlo es que si se realiza un gran número de experimentos, el 68,3 % darán como resultado un valor medio de la velocidad de la luz en el interior del intervalo definido por $\pm1\ \sigma$.

La función multidimensional de Gauss se define:

$$f_g(\vec{x}, \vec{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\vec{V}|}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \qquad (7.9)$$

Integrales útiles:

Para n entero ($n = 0, 1, 2\ldots$), se tiene:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

teniendo en cuenta que, si los límites de las integrales son de $-\infty$ a $+\infty$, hay que multiplicar por 2 las integrales de las potencias de x pares y, por paridad, se anulan las de las potencias impares.

La importancia de la distribución normal viene del hecho de que es el

límite de muchas funciones cuando $n \to \infty$ y también por el conocido teorema del límite central.

Teorema del límite central

La media $\overline{x}_n = (1/n)\sum x_i$ de n observaciones independientes de una variable x de cualquier distribución de probabilidad, que tenga media μ y varianza σ^2 finitas, es una nueva variable aleatoria cuya distribución se aproxima a una gaussiana, cuando n es muy grande. Se cumple entonces que la variable $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i$ tiende a una distribución gaussiana con media $\mu = \frac{1}{n}\sum \mu_i$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum \sigma_i^2$.

Este teorema refleja la importancia de la distribución de Gauss en estadística.

7.3.5 La distribución χ^2

Hasta ahora, las distribuciones que se han estudiado; especialmente la de Poisson y la de Gauss, son distribuciones que dan la probabilidad de obtener una medida, conocidos los parámetros de la distribución. La distribución χ^2 tiene como aplicación, el cálculo de la bondad o la calidad al comparar dos muestras; por ejemplo, es capaz de calcular la probabilidad al realizar un ajuste entre un conjunto de datos medidos, con una ley teórica (véase la Sección 7.6.3).

Si x_1, x_2, …, x_n son variables gaussianas, entonces la variable z, obtenida como suma de cuadrados:

$$z = \sum_{i}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

sigue una distribución chi-cuadrado, $f_{\chi}2\,(z)$, con $\nu = n$ grados de libertad.

Se cumple:

$$f_{\chi^2}(z;\nu) = \frac{z^{(h-1)}e^{-z/2}}{2^h\Gamma(h)} \qquad (7.10)$$

con $h = \frac{\nu}{2}$ y $z \geq 0$. La función Γ de Euler:

$$\Gamma(h) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du$$

si *h* es entero puede escribirse: Γ(*h*) = (*h* − 1)Γ(*h* − 1) o sea, Γ(*h*) = (*h* − 1)!, cumpliéndose que Γ(1) = 1. Para valores semienteros, hay que tener en cuenta que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

El parámetro *ν* representa el número de grados de libertad. Supóngase que se está ajustando una recta *ax* + *b* aunos datos experimentales. Si se han hecho 8 medidas, como hay 2 parámetros a determinar *a* y *b*, el número de grados de libertad será *ν* = 8 − 2.

La media y la varianza de esta distribución son: *E*[*z*]= *ν*; *Var*(*z*) = 2*ν*, respectivamente.

La función χ^2 caracteriza las fluctuaciones de las medidas x_i;si los errores son gaussianos entonces $\overline{z} = \nu$, y para cada ajuste, el valor de *z* fluctuará según predice la distribución f_χ2. Para evaluar la bondad de un ajuste se suele utilizar el nivel de confianza. Si se ha obtenido un valor $\chi_0^2 = z$, se difene,

$$CL(\chi_0^2) = 1 - F(\chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^\infty f_{\chi^2}(z;\nu)dz$$

siendo $F(\chi_0^2)$ la función acumulativa de la distribución χ^2. El nivel de confianza da la probabilidad de obtener un valor de $z \geq \chi_0^2$, al repetir el experimento, lo que equivale a decir que el experimento daría un

resultado que es *peor*. Es lo que se llama probabilidad de χ^2.

La tabla H.3, del Apéndice H, contiene las probabilidades de χ^2, o sea los niveles de confianza, que son las probabilidades utilizadas para medir la calidad de los ajustes de datos experimentales a curvas teóricas, que se estudiarán en la Sección 7.6.

7.4 Propagación de errores estadísticos

Sea $u = f(x, y)$. En general se cumple que su valor medio es $\overline{u} = f(\overline{x}, \overline{y})$. Se quiere calcular la desviación estándar de la función u, conocidas las de las variables x, y, es decir, $\sigma_u^2 = E[(u - \overline{u})^2]$. Para ello, se desarrolla en torno a $\overline{u}$:

$$(u - \overline{u}) = (x - \overline{x})\frac{\partial f}{\partial x} + (y - \overline{y})\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots$$

se halla la expresión $E[(u - \overline{u})^2]$, reteniendo los términos de primer orden, con lo que queda:

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\mathrm{cov}(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (7.11)$$

Aplicado a las funciones más sencillas se obtiene:

$$u = ax \pm by \quad \longrightarrow \quad \sigma_u^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \pm 2ab\,\mathrm{cov}(x,y)$$

$$u = \pm axy \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{xy}$$

$$u = \pm a\frac{x}{y} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{xy}$$

$$u = ax^{\pm b} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = b\frac{\sigma_x}{x}$$

$$u = a\ln \pm bx \quad \longrightarrow \quad \sigma_u = a\frac{\sigma_x}{x}$$

$$u = ae^{\pm bx} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = b\sigma_x$$

Ejemplo: Calcular el error sobre la actividad A de una fuente radiactiva con vida media $\tau = 5$ días, de la que inicialmente se conocía su actividad en $t = 0$: $A_0 = 10^3\ s^{-1}$, con $\sigma_{A0} = 0$. Al medirla a los $t = 20$ días se obtuvo $A = 18,3\ s^{-1}$ con una precisión $\sigma_t = 1$ hora.
Se tiene $A = A_0 e^{-t/\tau}$, luego $\sigma_A/A = \sigma_t/\tau$, con lo que $\sigma_A = 0,154\ s^{-1}$.

7.5 Método de máxima verosimilitud

Sea una muestra finita de n medidas $\{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Se supone que $f(x;\ \theta)$ es la función distribución de probabilidad teórica que describe los datos. El mejor estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Ser consistente, o sea, $\lim_{n \to \infty} \hat{\theta} \longrightarrow \theta$

2. No sesgado, que implica $< \hat{\theta} > = \theta$

3. Ser eficiente, lo que requiere σ^2 mínimo.

El método de máxima verosimilitud es el método de obtención de los mejores estimadores estadísticos $\hat{\theta}$ de los parámetros θ de una distribución $f(x; \theta)$ y de sus errores, que se supone describe los datos x_i.

Si los datos x_i son independientes, entonces la función verosimilitud

$$\mathcal{L}(\theta/x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)$$

debe ser máxima. Por ello el mejor estimador se obtiene:

$$\boxed{\left.\frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial \theta}\right|_{\hat{\theta}} = 0} \qquad (7.12)$$

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \int (\theta - \hat{\theta})^2 \mathcal{L}(\theta/x) \prod_{i=1}^{n} dx_i$$

yel error no es fácilmente calculable, pero en el límite de un gran número de datos, $n \to \infty$ y como la función de verosimilitud se aproxima a una función de Gauss $L \to f_g$, se cumple:

$$\boxed{\sigma^2(\hat{\theta}) = -\left(\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2}\right)^{-1}} \qquad (7.13)$$

lo que es muy fácil de comprobar realizando la aproximación:

$$\mathcal{L}(\theta) \approx e^{-(\theta - \theta^*)^2/2\sigma^2}$$

En caso de tratarse de una función de varios parámetros, se calcula la matriz

$$V_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$$

Las varianzas son entonces los elementos de la diagonal de la matriz inversa, $\sigma^2(\hat{\theta}_i) = (V^{-1})_{ii}$. El estimador $\hat{\theta}$ es no sesgado, consistente y se cumple que si $u = f(\theta)$ entonces $\hat{u} = f(\hat{\theta})$.

7.5.1 Aplicaciones del método de máxima verosimilitud

Una de las aplicaciones del método de máxima verosimilitud es la de la obtención de los mejores estimadores de los parámetros de distribuciones de probabilidad. Se verá a continuación cómo se aplica para obtener la media y la varianza de las funciones de distribución estudiadas anteriormente.

Distribución de Poisson

La función verosimilitud de una muestra que se supone que proviene de una función de Poisson es simplemente:

$$\mathcal{L}(\mu/x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu} = e^{-n\mu} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

y al calcular el logaritmo:

$$\ln \mathcal{L} = -n\mu + \sum x_i \cdot \ln \mu - \sum \ln x_i!$$

La obtención del estimador de la media, a partir de (7.12) da lugar a:

$$\frac{d\mathcal{L}^*}{d\mu} = \frac{d(\ln \mathcal{L})}{d\mu} = -n + \frac{1}{\mu}\sum x_i \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}}$$

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\mu}}{n} = \frac{\overline{x}}{n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}}$$

Este último resultado es general, ya que se demuestra que $\sigma^2(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, relacionando la varianza de la media con la varianza de la función distribución de probabilidad. En efecto,

$$\sigma^2(\overline{x}) = E[(\overline{x} - \mu)^2] = \frac{1}{n^2}\sum E[(x_i - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Así pues, cualquiera que sea el conjunto de medidas, si la desviación típica de cada una de ellas es σ, la desviación típica de la media es $\sigma/\sqrt{n}$; al realizar la media de *n* medidas el error de la media se divide por $\sqrt{n}$.

Distribución de Gauss

De la misma manera que en el caso anterior, se calcula la función verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2/x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con lo que

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Para obtener el parámetro μ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mu} = \frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial \mu} = \sum \frac{x_i-\mu}{\sigma^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}}$$

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Estas expresiones son válidas para el caso en el que todos los errores σ_i(las desviaciones típicas) de las medidas x_i que componen la muestra, es decir, $\sigma_i = \sigma$ son iguales. Si fueran diferentes, la aplicación del método de máxima verosimilitud, proporciona el método de ponderación de medidas gaussianas:

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum x_i/\sigma_i^2}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}} \qquad \boxed{\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}}}$$

o sea, que cadamedida se pondera con un peso $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$. Es útil definir el peso total de la muestra $w = \Sigma\, w_i$.

Por último, el mejor estimador del parámetro σ se obtiene al hacer

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial(\ln \mathcal{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2} = 0$$

dando:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2}$$

La expresión para $\hat{\sigma}^2$ es válida siempre que la media μ sea conocida. Pero para valores finitos de *n*, el valor estimado para $\hat{\sigma}^2$ está sesgado. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum (x_i - \overline{x})^2 &= \sum [x_i - \mu - (\overline{x} - \mu)]^2 = \\ &\sum (x_i - \mu)^2 + \sum (\overline{x} - \mu)^2 - 2\sum (\overline{x} - \mu)(x_i - \mu)\end{aligned}$$

y al calcular el valor esperado

$$E\left[\sum (x_i - \overline{x})^2\right] = n\sigma^2(x) + n\sigma^2(\overline{x}) - 2n\sigma^2(\overline{x})$$

es decir,

$$E[s^2] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

luego, la expresión correcta y no sesgada del estimador de la varianza de una distribución de medidas gaussianas viene dada por:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2} \qquad (7.14)$$

De la misma manera se demuestra que

$$\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(n-1)\hat{\sigma}^4}{n^2}$$

o sea, $\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\hat{\sigma}^4}{n}$ cuando $n \to \infty$. También se demuestra que $\sigma(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}/\sqrt{2(n-1)}$ y que $\sigma(\hat{\sigma}^2) = \hat{\sigma}^2/\sqrt{2/(n-1)}$.

Resumiendo, la estimación de parámetros en la hipótesis de que las muestras obedezcan a la ley de Poisson o de Gauss, da lugar a los siguientes estimadores:

	Gauss		Poisson
valor medio	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,$	$\frac{1}{w}\sum w_i x_i$	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
varianza muestra	$\hat{\sigma} \approx s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$		$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{x}}$
error del valor medio	$\sigma(\overline{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}},$	$\frac{1}{\sqrt{w}}$	$\sigma(\overline{x}) = \sqrt{\frac{\overline{x}}{n}}$

Si $n = 1$, se cumple $\sigma(\hat{\mu}) = \sigma$, es decir, equivale a la varianza de la muestra, o lo que es lo mismo, la precisión del instrumento.

7.5.2 Intervalos de confianza

Conocida la media, μ, y la desviación típica, σ, de una muestra de datos x_i; $i = 1, \ldots, n$, se pueden calcular los intervalos de confianza sobre la media:

$$\overline{x} - z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_c \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

en donde $z_c = 1, 2, \ldots$ representaría la anchura del intervalo. Sin embargo, cuando $\sigma(x)$ no es conocida, generalmente porque hay pocos valores, la varianza, como se acaba de demostrar, se estima con $s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2}$ y entonces es necesario utilizar la función *Student* (bautizada así por el matemático inglés W. Gossett) para calcular el nivel de confianza sobre la media. Para ello, se define la

variable $t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s(x)/\sqrt{n}}$, que sigue la distribución:

$$f_s(t) = \frac{\Gamma(h + 1/2)}{\Gamma(h)\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + t^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2} \tag{7.15}$$

con $h = \nu/2$ y $\nu = n - 1$.

La función de Student es, pues, otra distribución de probabilidad cuyo interés es el de determinar niveles de confianza sobre los parámetros estadísticos de una muestra.

7.6 Ajustes de curvas

A partir de un conjunto de N medidas y_i, $i = 1, \ldots, N$ realizadas en los puntos x_i, con sus errores respectivos σ_i, se pretenden obtener los parámetro de una ley física; por ejemplo $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con N_0 y τ, parámetros a determinar. Si se intenta trazar una curva suave que pase a través de los puntos medidos, se observa que unos puntos quedan de un lado y otros del otro lado de la curva. El problema es encontrar la mejor curva, que se resuelve aplicando una variante del método de máxima verosimilitud, conocido por el nombre de método de mínimos cuadrados.

7.6.1 Método de mínimos cuadrados

El método supone que las N medidas y_i provienen de una distribución teórica con media $f(x_i; \vec{a})$ y varianza σ_i^2. Los mejores estimadores de los k parámetros $\vec{a}$ se obtienen al minimizar la suma de cuadrados:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - f(x_i; \vec{a})\right)^2}{\sigma_i^2} \tag{7.16}$$

En el caso en que los errores $\varepsilon_i = y_i - f(x_i;\vec{a})$ sean gaussianos, además se cumplirá que S se distribuye de acuerdo con una función $f_\chi 2$ con $\nu = N - k$ grados de libertad, lo que permitirá calcular la bondad del ajuste.

Los k parámetros se obtendrán al minimizar la función S, o sea, resolviendo las k ecuaciones:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial a_j}\right|_{\hat{a}_j} = 0 \tag{7.17}$$

y los errores se obtendrán a partir de la matriz de covarianza calculada en el mínimo:

$$V_{\ell m} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\ell \partial a_m} \tag{7.18}$$

que al invertirla (V^{-1}), da lugar a la matriz de errores. Así por ejemplo, las varianzas de los parámetros serán los elementos de la diagonal $\sigma_j^2 = (V^{-1})_{jj}$.

7.6.2 Ajustes lineales

Uno de los ejemplos más característicos del método de mínimos cuadrados es el de los ajustes lineales.

Sea

$$y = a_1 + a_2 x$$

Como resultado de las fórmulas del método, si se construyen las sumas

$$S_{1,x,y,xx,xy} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}\left(1, x_i, y_i, x_i^2, x_i y_i\right)$$

que condensa las cinco igualdades $S_1 = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}; S_x = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2};$ etc.

El sistema de ecuaciones para los dos parámetros a_1 y a_2 da lugar, por el método de Cramer, a las soluciones

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{D}(S_y S_{xx} - S_x S_{xy}), \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{D}(S_1 S_{xy} - S_x S_y)$$

siendo $D = S_1 S_{xx} - S_x^2$ el discriminante de la matriz del sistema.

La matriz de covarianza de los parámetros es

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} S_{xx} & -S_x \\ -S_x & S_1 \end{pmatrix}$$

con lo que se obtiene

$$\sigma_{a_1}^2 = \frac{S_{xx}}{D}, \qquad \sigma_{a_2}^2 = \frac{S_1}{D}$$

y por supuesto $\mathrm{cov}(a_1, a_2) = -\frac{S_x}{D}$.

7.6.3 Bondad del ajuste

Bajo la hipótesis de que los errores son gaussianos, el valor de la suma de cuadrados (7.16) con los valores de los parámetros en el mínimo, S_0, define una probabilidad

$$P_{\chi^2}(S_0, \nu) = \int_{S_0}^{\infty} f_{\chi^2}(z, \nu) dz$$

con ν el número de grados de libertad. En el caso de los ajustes lineales visto en el parágrafo anterior se cumple que $\nu = N - 2$, ya que sólo hay 2 parámetros libres a determinar.

La probabilidad de χ^2 calculada, da la probabilidad de obtener un resultado *peor* (o sea un valor de $S > S_0$) en caso de repetir el experimento. Es decir, da el nivel de confianza en el resultado. Para saber si el ajuste es razonable, basta con ver si el χ^2 *reducido*: χ^2/ν es $\sim$ 1. Valores de la probabilidad sistemáticamente demasiado grandes suelen indicar errores anormalmente sobreestimados. En términos de probabilidad, se admite que un buen ajuste es aquél que da una probabilidad de $\chi^2 \geq 5\%$ (véase la tabla de probabilidades de χ^2 reducido en el Apéndice H).

Es interesante comprobar que al cambiar el parámetro $\hat{a}$ en $\hat{a} + \sigma_a$, el χ^2 cambia a $\chi^2 + 1$. Esto se comprueba inmediatamente al desarrollar $S(a)$ cerca de $S(\hat{a})$, quedando

$$S(a) = S(\hat{a}) + \frac{(a-\hat{a})^2}{\sigma_a^2}$$

7.6.4 Ajuste de funciones cualesquiera

En general el problema del ajuste de datos a funciones complicadas es un problema que se resuelve numéricamente, utilizando librerías de programas disponibles para ordenador (ejemplo: *Minuit* de la librería de programas CERNLIB del CERN).

A veces, la función es fácil de linealizar. Por ejemplo

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{puede reescribirse} \qquad \ln N = \ln N_0 - \frac{t}{\tau}$$

y lo único que hay que cuidar es el cálculo de errores de las nuevas variables. En efecto, si σ_i es el error de la medida de N (o sea $\sigma_i^2 = N$), entonces por propagación de errores,

$$\sigma^2(\ln N) = \sigma^2(N)\left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\right)^2 = \frac{1}{N}$$

Normalmente la variable x_i se conoce con gran precisión. En caso contrario, el error de cada medida y_i se modificará según

$$\sigma_i^2 \to \sigma_y^2 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2$$

7.6.5 Nivel de confianza en experimentos con cero cuentas

Una ley de conservación debe ser verificada experimentalmente; para ello se buscan sucesos que estén prohibidos por dicha ley. Si, efectivamente, la ley es correcta la búsqueda de sucesos dará un resultado con un número de cuentas nulo. Otro caso frecuente es la búsqueda de fenómenos muy raros y poco frecuentes, dando lugar a cero cuentas. La forma de cuantificar los experimentos que dan un resultado nulo es introduciendo un *límite superior* de la magnitud medida, y el *nivel de confianza* asociado. El nivel de confianza da la probabilidad de que la magnitud sea inferior al límite superior.

El análisis de experimentos que dan un número de cuentas cero depende de si existe o no ruido de fondo. Por ello, a continuación se estudian estas dos posibilidades por separado.

a) Experimentos sin ruido de fondo: límite superior

Un cierto fenómeno (por ejemplo una desintegración nuclear) se mide durante un tiempo T y no se encuentra ningún suceso del tipo buscado: el número de cuentas medido es cero, $n_c = 0$. Se supone que la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo de la sustancia es λ. La probabilidad de no observar ningún suceso en un tiempo T, puede obtenerse a partir de la distribución de Poisson cuando el valor medio

esperado de sucesos es $\overline{n} = \lambda T$:

$$P_0(T, \lambda) = Ne^{-\lambda T}$$

siendo N una constante de normalización; luego la ley de probabilidad para λ en el caso $n_c = 0$ es:

$$P(\lambda/0) = Te^{-\lambda T}$$

Al no haber detectado ninguna cuenta, $n_c = 0$, el resultado del experimento conduce a un *límite superior* λ_0. De esta manera, el nivel de confianza o probabilidad de que λ sea inferior a λ_0 es:

$$Prob(\lambda \leq \lambda_0) = \int_0^{\lambda_0} Te^{-\lambda T} = 1 - e^{-\lambda_0 T} = CL$$

en donde CL es el nivel de confianza; del inglés *confidence level*.

Por ejemplo, si se elige dar un límite superior λ_0 con un nivel de confianza del 90 %; es decir: $CL = 0,9$, se cumplirá:

$$\boxed{\lambda_0 = -\frac{1}{T}\ln(1 - CL) = \frac{2,3}{T}} \qquad (7.19)$$

Conviene aclarar que si en ausencia de ruido de fondo, $n_f = 0$, se obtiene un número de cuentas reales $n_c > 0$, entonces el experimento tiene un resultado *significativo*; o sea, no es cero. Puede, por ejemplo, calcularse una probabilidad por unidad de tiempo $\lambda = n_c/T$.

b) Experimentos con ruido de fondo: límite crítico

En lo que sigue, se supondrá que existe ruido de fondo, $n_f > 0$. Si al medir el fenómeno físico se obtiene un número de cuentas $n_c \sim n_f$, la señal será $n_s = n_c - n_f$, y el problema es saber si la señal es o no compatible con cero. Para resolverlo se introduce el *límite crítico* l_c, que

clasifica en dos los resultados de los experimentos: si la señal es $n_s < l_c$, el experimento no es significativo y sólo proporciona un límite superior mientras que si la señal es $n_s > l_c$, entonces el experimento es significativo.

En el primer caso, como el número de cuentas obtenido es prácticamente igual al ruido de fondo, la señal es compatible con cero: $n_s = n_c - n_f \approx 0$; estadísticamente la distribución de n_s seguirá la ley de Gauss con media $n_s = \mu = 0$ y desviación estándar $\sigma_s = \sigma_0 = \sqrt{2n_f}$. En efecto tanto n_c como n_f son variables que siguen la ley de Poisson y la varianza de n_s es la suma de las varianzas de n_c y n_f que son iguales.

La distribución de Gauss de la variable n_s (véase la figura 7.4 **a**) seguirá la ley $f_g(n_s; 0, \sigma_0) = N \exp\{-\frac{n_s^2}{2\sigma_0^2}\}$. Esta será la curva de Gauss utilizada para definir un nivel de confianza, $CL = 1 - F_g(\ell_c)$, a partir de la función acumulativa de Gauss, $F_g(\ell_c)$ (véase parágrafo 7.3.4).

Para que un experimento sea significativo, la señal (el número de cuentas menos el ruido de fondo) debe exceder el límite crítico ℓ_c, que es simplemente:

$$\boxed{\ell_c = k\sigma_0}$$

en donde k representa el número de desviaciones estándar. Así, si se desea dar un límite con un nivel de confianza del 95 %, el valor del área marcada en la gaussiana de la figura 7.4 **a**) es $1 - CL = 0,05$ y el factor $k = 1,645$. Un experimento que dé como resultado $n_s \leq 0$, el resultado es consistente con cero ($n_s = 0$) y el límite superior coincide con ℓ_c. Si el experimento da una señal $n_s < \ell_c$, no es significativo; sólo puede extraerse un límite superior que se calcula $\ell_u = n_s + k\sigma_s$, ya que ahora la distribución de n_s no es cero sino que tiene por media $\mu = n_s$ y su desviación típica es σ_s (véase la figura 7.4 **b**). Un experimento significativo proporciona una medida cuyo resultado es $n_s \pm k\sigma_s$.

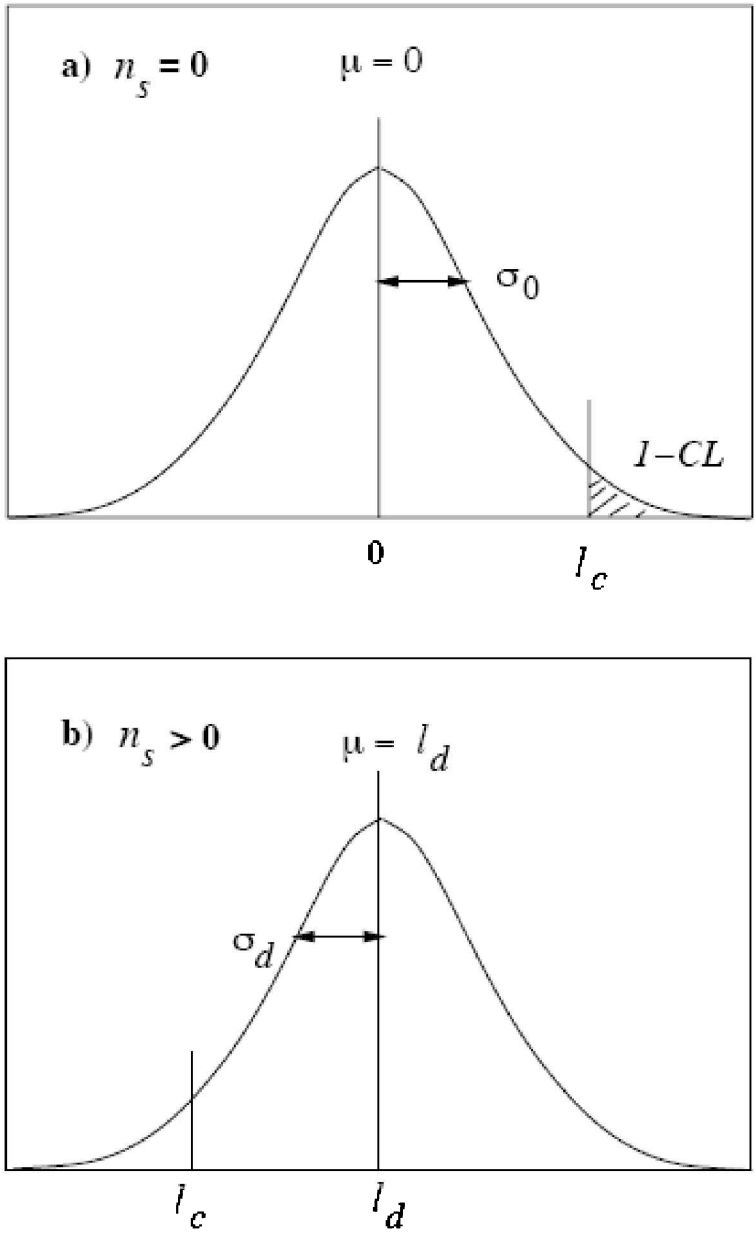


Figura 7.4: **a)** Distribución de Gauss ($\mu = 0$ y $\sigma = \sigma_0$), donde se señala el límite crítico ℓ_c. **b)** Distribución de Gauss donde aparece el límite de detección ℓ_d y su relación con el límite crítico ℓ_c.

Límite de detección

El límite de detección se introduce para determinar si una señal es realmente significativa (distinta de cero), con un nivel de confianza fijado, que suele ser del 90 % o del 95 %. En este caso, la señal obtenida es mayor que cero, pero como existe un ruido de fondo igual a n_f, no se sabe si se trata de una fluctuación estadística o realmente de una señal. El límite de detección ℓ_d es, pues, la señal mínima $n_d - n_f$ que hay que obtener para que el experimento proporcione un resultado no nulo (significativo). Es evidente que límite de detección y límite crítico no son iguales; si lo fueran, siempre se tendría un 50 % de resultados no significativos. El límite de detección se define con un nivel de confianza *CL* dado por el factor *k* de la expresión $\ell_d = \ell_c + k\sigma_d = k(\sigma_0 + \sigma_d)$. Así, si se quiere fijar un límite con el 90 % de confianza, $k = 1, 29$. Ahora la señal es $\ell_d = n_d - n_f$ cuya varianza es $\sigma_d^2 = n_d + n_f = \ell_d + \sigma_0^2$ y como $\ell_d = k\sigma_0 + k\sqrt{\ell_d + \sigma_0^2}$ queda finalmente:

$$\boxed{\ell_d = k^2 + 2k\sigma_0} \qquad (7.20)$$

7.7 Interpolaciones

Es frecuente que se necesite interpolar una curva definida por las *N* medidas $y(x_i)$ realizadas en *N* puntos x_i que se encuentran en el intervalo $x_a \leq x_i \leq x_b$. Se puede utilizar la fórmula de Lagrange que permite interpolar utilizando $M \leq N - 1$ puntos de dicho conjunto de puntos. En efecto

$$y(x) = \sum_{i=0}^{M} P_i(x) y(x_i) \qquad \text{siendo} \qquad P_i(x) = \frac{\prod_{j=0, i\neq j}^{M} (x - x_j)}{\prod_{j=0, i\neq j}^{M} (x_i - x_j)}$$

y el error asociado al punto interpolado es

$$\sigma\left(y(x)\right) = \prod_{j=0}^{M}(x - x_j)\frac{y^{M+1}(\xi)}{(M+1)!}$$

en donde $y^{M+1}(\xi)$ es la derivada $M+1$ de $y(x)$ en el punto ξ, que es un punto cualquiera del intervalo $x_a \leq \xi \leq x_b$, derivada que debe calcularse numéricamente.

7.8 Problemass

7.1 Límite superior a una vida media.
Con el fin de comprobar la ley de conservación del número leptónico se mantuvo en observación durante 100 días una muestra de 50 g de $^{82}_{34}$Se, con objeto de observar el proceso de desintegración β-doble sin emisión de neutrinos:

$$^{82}_{34}\mathrm{Se} \rightarrow {}^{82}_{36}\mathrm{Kr} + 2e^{-}$$

proceso prohibido por dicha ley de conservación. La eficacia del detector es del 20 % y no se observó ningún suceso de este tipo. Calcular el límite superior para la vida media de este proceso.

7.2 Resolución en posición de un detector de silicio.
Un detector de posición está construido a partir de una lámina delgada de silicio sobre la que se han implantado microbandas de 2 μm de espesor, separadas por una distancia L = 50 μm. Las partículas cargadas que atraviesan la lámina depositan energía, que se puede medir en forma de una señal eléctrica en las microbandas cercanas al punto de impacto.
a) Demostrar que la resolución en posición de dicho detector, si únicamente se procesa la señal en la microbanda con mayor

carga depositada, es $L/\sqrt{12}$.

b) Calcular la resolución si se procesan las señales en las dos microbandas con mayor carga depositada. Para simplificar el problema, se podrá suponer que la señal es proporcional a la distancia entre el punto de impacto y la microbanda correspondiente, y que la fluctuación de dicha señal es de 10 %.

7.3 Promedio de datos experimentales.

Los cuatro experimentos de LEP han efectuado la medida de la masa y anchura del bosón Z, obteniendo los valores que se indican a continuación.

experimento	M_Z(GeV)	Γ_Z(GeV)
ALEPH	91, 1881 ± 0, 0031	2, 4951 ± 0, 0043
DELPHI	91, 1866 ± 0, 0029	2, 4893 ± 0, 0040
L3	91, 1883 ± 0, 0029	2, 4996 ± 0, 0043
OPAL	91, 1838 ± 0, 0029	2, 4958 ± 0, 0043

El error indicado por cada experimento incluye la contribución estadística y sistemática. Para simplificar el problema, se podrá suponer que el único error sistemático, tanto en la medida de M_Z como en la de Γ_Z, es la incertidumbre de 2,0 MeV en la medida de la energía en el centro de masas. Dicho error es por supuesto común a todos los experimentos.

a) Calcular los valores de M_Z y Γ_Z que resultan de promediar las medidas anteriores, con sus errores correspondientes. ¿Pueden mejorase dichas medias tomando más datos?

b) Calcular el χ^2 del promedio efectuado y la probabilidad de obtener dicho valor o bien un valor superior. Discutir si lasmedidas de los experimentos son compatibles entre sí.

7.4 Error en la media y anchura de una resonancia.

Se pretende medir la masa m y anchura σ_m de una resonancia a

partir de la sección eficaz de producción en torno al valor de m. Se dispone de una muestra de N sucesos. El valor de m se calcula como la media de los valores obtenidos y para la anchura σ_m se toma la distribución cuadrática media de la distribución obtenida.

a) Demostrar que el error en m es $\sigma_m/\sqrt{N}$, y que si la distribución de masa es gausiana el error en σ_m es $\sigma_m/(\sqrt{2N})$.

b) Cada experimento de LEP ha medido la masa y anchura del bosón Z con una muestra de unos 4 millones de sucesos hadrónicos. Estimar el error estadístico que cabe esperar en dichas medidas y compararlo con el valor realmente obtenido (véase el problema anterior).

7.5 Estudio de la anchura de una resonancia.

La anchura de una resonancia medida experimentalmente es la convolución de la anchura natural de dicha resonancia y de la resolución experimental, que se puede describir normalmente por una gausiana.

a) Demostrar que si las distribuciones f_1 y f_2 tienen anchuras respectivas σ_1 y σ_2, la convolución de ambas, definida como

$$f(x) = \int dy\, f_1(y) f_2(x-y)$$

tiene una anchura σ que verifica $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. En lo anterior se ha identificado anchura con desviación cuadrática media.

b) La distribución de masa M debido a la anchura natural Γ de una resonancia de masa M_0 se puede describir mediante la curva de Breit-Wigner siguiente

$$\frac{df}{dM^2} = \frac{f_0}{(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2\Gamma^2}$$

donde f_0 es una constante de normalización. Discutir cómo se puede definir una anchura para dicha distribución en torno al valor M_0. Concluir sobre el valor de la anchura observado experimentalmente.

7.6 Descubrimiento de una nueva resonancia.

En un espectrómetro se reconstruye la masa invariante de pares de muones con carga opuesta procedentes de la colisión de protones de alta energía contra un blanco de materia densa. Se obtiene el siguiente número de sucesos en función del intervalo de masa considerado:

intervalo de masa (GeV)	sucesos observados	intervalo de masa (GeV)	sucesos observados
$2,8-2,9$	5	$3,1-3,2$	2
$2,9-3,0$	8	$3,2-3,3$	6
$3,0-3,1$	19		

Los intervalos de masa corresponden aproximadamente con la resolución experimental en masa invariante.

a) Si se interpretan estos sucesos como debidos a la presencia de una resonancia, discutir qué información se puede extraer sobre la masa y anchura de la misma.

b) Calcular la probabilidad de que el exceso de sucesos observados entre 3,0 y 3,1 GeV se deba únicamente a una fluctuación estadística. Concluir sobre la evidencia de una resonancia en los datos anteriores.

---

[1] FWHM, iniciales del inglés *Full Width Half Maximum*.

Parte III

Desintegraciones nucleares

8. Radiactividad y desintegración nuclear

La Radiactividad es un fenómeno natural por el que un núcleo atómico emite uno o varios tipos de partículas, transmutándose o desexcitándose a un estado de menor energía. Los tipos más frecuentes son las conocidas desintegraciones α, β, y γ, así como la fisión y la emisión de nucleones. Esta propiedad la poseen unos 40 elementos de la corteza terrestre. Los más activos tienen $Z > 80$. También se han sintetizado cerca de 2500 nucleidos artificiales, todos ellos, necesariamente radiactivos. Las fuentes radiactivas y los rayos cósmicos, constituyen las fuentes naturales de partículas. Por otra parte, las fuentes artificiales son los aceleradores de partículas. Los fenómenos relacionados con la radiactividad han tenido una historia enriquecedora y han influido directamente en el progreso del conocimiento de los átomos, núcleos y partículas. También han servido para desarrollar una metodología de la experimentación, sentando las bases de los modernos detectores.

Es curioso que la mayoría de los científicos que han hecho descubrimientos relacionados con la radiactividad hayan sido premiados con el Nobel de Química, como Rutherford (1908), Marie Curie (1911), F. Soddy (1921), los esposos Joliot-Curie (1935), O. Hahn (1944) y W. Libby (1960). Por el contrario, sólo un premio Nobel de Física ha sido otorgado al descubrimiento de la radiactividad en 1903 a H. Becquerel y los esposos Marie y Pierre Curie.

Hoy en día muchas fuentes naturales de radiación son utilizadas

exhaustivamente en la investigación, la medicina y la industria. Siempre es necesario disponer en los laboratorios de fuentes naturales de partículas, que se obtienen fácilmente y no son muy caras.

Se estudiarán aquí las leyes que gobiernan la producción y desintegración de los materiales radiactivos. Al final del tema, se describirán varias aplicaciones de la radiactividad y se finalizará con un estudio sobre los efectos biológicos de la radiación y los criterios de protección radiológica.

8.1 Generalidades

Es lícito pensar que el origen de la física nuclear se debe a las emisiones radiactivas de los minerales naturales de ^{238}U y ^{232}Th, con semividas $t_{1/2}$ del orden de la edad de la Tierra (propiedades descubiertas en 1896 por H. Becquerel, premio Nobel de Física de 1903, compartido con los esposos Curie). En 1896, Henri Becquerel estudiaba fenómenos de luminiscencia de sales de uranio bajo excitación luminosa y descubrió[1] la emisión espontánea de radiación penetrante (atravesaba un papel negro) que revelaba papel fotográfico. Dicha emisión provenía de la desintegración β de elementos de la familia radiactiva del uranio. Casualmente, el descubrimiento de Becquerel sucede cuatro meses después del descubrimiento de los rayos X por Roentgen.

Pierre y Marie Curie[2] trabajaron intensamente con la pecblenda de la mina de St. Joachimstahl, Bohemia, y obtuvieron polonio y radio, dos elementos con propiedades similares al bismuto y bario. ¡Fueron necesarias 10 Tm de pecblenda para obtener 1 gramo de *Ra*! Encontraron en sales de torio la misma propiedad de las sales de uranio. Por estos trabajos Marie Curie recibió su segundo premio Nobel, esta vez de química, en el año 1911.

Pero el físico que más ha aportado al estudio de la radiactividad es sin duda E. Rutherford (premio Nobel de Química en 1908). Ya desde 1897,

discípulo de J. J. Thomson en el Cavendish Laboratory de Cambridge, se sintió muy atraído por el estudio de las radiaciones del uranio. Después, como profesor de física de la Universidad de McGill de Montreal (1898-1907), realizó muchos trabajos con el torio, en colaboración con F. Soddy[3] (premio Nobel de Química de 1921). Se debe a Rutherford (en 1898) la evidencia de los dos tipos de desintegraciones α y β. Los rayos γ los descubre en 1900, el físico francés P. Villard. De esta época datan los grandes progresos en los estudios de las propiedades de la radiactividad. Entre ellos hay que destacar el concepto de vida media (Rutherford, 1900), que llevó a la revisión revolucionaria de la causalidad en el mundo microscópico.

Conviene recordar tres grandes descubrimientos con los primeros estudios de la radiactividad:

- La primera transmutación (Rutherford, 1919) observada en la reacción nuclear $\alpha + {}^{14}N \rightarrow {}^{17}O + p$, donde los protones recorrían unos 40 cm en una cámara de niebla (en vez de los 6 cm que recorrían las partículas α en una colisión elástica).

- El descubrimiento del neutrón (Chadwick, 1932, premiado con el Nobel de Física en 1935) a través del estudio de la reacción $\alpha + {}^{9}Be \rightarrow {}^{12}C + n$. Se supo que se trataba de nuevas partículas porque si estas partículas neutras fueran fotones ¡deberían tener 50 MeV!, una energía enorme para dicho proceso nuclear.

- La radiactividad artificial (Irène y Frédéric Joliot-Curie, 1934) que observaron que en la reacción $\alpha + {}^{10}B \rightarrow {}^{13}N^{*} + n$, el ${}^{13}N^{*}$ es un núcleo inestable; se desintegra vía β^{+} (${}^{13}N^{*} \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e$) y no existe en la naturaleza. Se constató gracias a la emisión de un positrón (e^{+}).

Posteriormente al descubrimiento de la radiactividad artificial en 1934 por Irène y Frédéric Joliot-Curie (que compartieron el premio Nobel de Química, 1935), éstos mismos observaron también la reacción

$\alpha + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + n$, utilizando partículas α de u radiactiva de Po, seguido de la desintegración β^+ del ${}^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ con $t_{1/2} = 2,5$ min.

También es interesante recordar que, gracias a los estudios de la radiactividad, se descubren cuatro elementos no detectados hasta entonces (huecos en la tabla de Mendeleiev): tecnecio ($_{43}Tc$), prometio ($_{61}$Pm), astato ($_{85}$At) y francio ($_{87}$Fr).

8.2 Ley de desintegración radiactiva

Se denomina actividad de una sustancia radiactiva al número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \tag{8.1}$$

y es proporcional al número de átomos existentes, *N*. La constante λ es la denominada constante radiactiva o constante de desintegración. Da la probabilidad de desintegración de un átomo por unidad de tiempo. De aquí se deduce la ley de evolución con el tiempo del número de átomos que no se han desintegrado (ley de supervivencia):

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{8.2}$$

que es la misma ley que cumple la actividad:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t} \tag{8.3}$$

La cantidad λdt da pues la probabilidad de desintegración de un átomo en el intervalo *dt* y es independiente de *t*. El número de desintegraciones esperadas en el intervalo temporal *dt* es ?*dN* ? = λN *dt* que debe ser considerado como un valor medio. Se puede definir una función

distribución de probabilidad, debidamente normalizada, de la probabilidad de desintegración de un átomo entre t y $t + dt$ como la probabilidad de no desintegrarse hasta el instante t, $e^{-\lambda t}$ multiplicado por la probabilidad de desintegración en dt, λdt quedando:

$$P(t)dt = \lambda e^{-\lambda t_{dt}}$$

que, efectivamente, cumple $\int_0^{\infty} P(t)dt = 1$ Estadísticamente, esto quiere decir que en un experimento de medida de actividades se obtendrá un número de desintegraciones n en un intervalo de tiempo dt que seguirá una distribución de probabilidad de Poisson con media $\mu = \lambda N\, dt$:

$$P(n;\mu) = \frac{e^{-\mu}}{n!}\mu^n \qquad (8.4)$$

La actividad de una fuente radiactiva mide el ritmo de desintegración de un determinado isótopo; es decir, $\mathcal{A} = \lambda N$. No hay que confundir esta magnitud con el ritmo de emisión de radiaciones de una fuente radiactiva, puesto que en este caso hay que tener en cuenta las emisiones debidas a la actividad de todos los productos de desintegración del isótopo padre.

La unidad de actividad en el SI es el becquerel (Bq = 1 desintegración/s). La unidad tradicional de actividad, todavía muy usada, es el curio (1 Ci = 3,7 × 10^{10} Bq), que es la actividad de 1 gramo de radio. A mayor masa de sustancia radiactiva, mayor actividad. La masa M de una sustancia cuya actividad es 1 Ci, puede calcularse a partir de:

$$\mathcal{A} = \lambda N = \lambda M \frac{\mathcal{N}_A}{A'} \qquad (8.5)$$

siendo N_A el número de Avogadro y A' el peso atómico de la sustancia. Frecuentemente se habla de actividad *específica* de una fuente radiactiva, que se define como la actividad por unidad de masa del rdioisótopo en

cuestión; o sea, la actividad específica se obtiene dividiendo por *M* en la fórmula anterior (8.5):

$$\mathcal{A}_{esp} = \frac{\lambda N}{M} = \lambda \frac{\mathcal{N}_A}{A'}$$

La actividad no informa de qué tipo de radiación se trata, ni de sus efectos biológicos. La medida de *A* en varios intervalos Δt permite medir λ (sólo si $t_{1/2}$ no es ni demasiado largo ni extremadamente corto).

La vida media de un átomo será:

$$\tau = \frac{\int_{N_0}^{0} t dN}{\int_{N_0}^{0} dN} = \frac{\int_{0}^{\infty} t\lambda N dt}{\int_{0}^{\infty} \lambda N dt} = \frac{\int_{0}^{\infty} te^{-\lambda t} dt}{\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda} \qquad (8.6)$$

La semivida o semiperiodo, $t_{1/2}$, se define como el tiempo necesario para que el número de átomos se reduzca a la mitad, $N = \frac{N_0}{2}$, que al aplicarlo en (8.2) da, sencillamente,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

y por lo tanto, $t_{1/2} = 0,693 \times \tau$. De esta manera, partiendo de N_0 núcleos de una sustancia con semiperiodo $t_{1/2}$, cuando haya transcurrido un tiempo igual a *k* semiperiodos, quedarán solamente $N_0/2^k$ núcleos intactos.

8.2.1 Semividas parciales. Cocientes de desintegración

Cuando se estudia la desintegración de una sustancia radiactiva, no siempre se trata de un problema en el que todo queda explicado con una

simple ley exponencial de desintegración. He aquí tres variedades de modos de desintegración que conviene tener presentes;

[1] Caso más sencillo: $N_1 \rightarrow N_2 + x$, N_2 es estable y N_1 no se crea. Se cumplen las leyes:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$
$$N_2(t) = N_0\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)$$

y en cada instante se tiene $N_1 + N_2 = N_0$.

[2] Existen dos estados finales (dos modos de desintegración). También se dice que N_1, el elemento padre, tiene una desintegración multimodo:

$$N_1 \rightarrow N_{2a} + x$$

$$\rightarrow N_{2b} + y$$

Se introducen en este caso las semividas parciales y los cocientes de desintegración. O sea, en este caso, λ_a y λ_b son las constantes de desintegración (semividas) parciales:

$$-\frac{dN}{dt} = -\left(\frac{dN}{dt}\right)_a - \left(\frac{dN}{dt}\right)_b = N(\lambda_a + \lambda_b) = N\lambda_t$$

La ley de desintegración viene definida sólo por $\lambda_t = \lambda_a + \lambda_b$,

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda_t t}}$$

sea cual sea el canal o el modo de desintegración que se mida. Las constantes λ_a y λ_b, que por definición son las llamadas semividas

parciales, sirven para dar las proporciones a cada modo parcial, $BR(a) = \lambda_a/\lambda_t$ y $BR(b) = \lambda_b/\lambda_t$, es decir, los cocientes de desintegración (*branching ratios*). Con esto, las leyes son:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_t t}$$

$$N_{2a}(t) = N_0(\lambda_a/\lambda_t)\left(1 - e^{-\lambda_t t}\right)$$

$$N_{2b}(t) = N_0(\lambda_b/\lambda_t)\left(1 - e^{-\lambda_t t}\right)$$

Es muy frecuente encontrar núcleos o partículas con varios modos de desintegración. Un ejemplo es el $^{226}_{89}\mathrm{Ac}(t_{1/2} = 29\ \mathrm{h})$ cuya $\lambda_t = 0,693/t_{1/2} = 6,6 \times 10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$. Tiene tres modos de desintegración y las semividas parciales son:

$$^{226}_{89}\mathrm{Ac} \rightarrow {}^{226}_{90}\mathrm{Th} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu_e};\quad \lambda_\beta = 0,83\lambda_t;\quad t_{1/2,\beta} = 35\ \mathrm{h}$$

$$\rightarrow {}^{222}_{87}\mathrm{Fr} + \alpha;\qquad \lambda_\alpha = 6 \times 10^{-5}\lambda_t;\quad t_{1/2,\alpha} = 55\ \text{años}$$

$$^{226}_{89}\mathrm{Ac} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} + \nu_e;\qquad \lambda_\varepsilon = 0,17\lambda_t;\qquad t_{1/2,\varepsilon} = 170\ \mathrm{h}$$

sin embargo la actividad seguirá una exponencial con λ_t, suma de las λ_i parciales, cualquiera que sea el modo que se estudie.

En general se tendrá $$\lambda = \sum_i \lambda_i$$ o si se expresa en semividas:

$$\frac{1}{t_{1/2}} = \sum_i \frac{1}{t_{1/2}(i)}$$

Otro caso aún más complejo es el de los modos de desintegración de las partículas elementales, que cuando se trata de partículas de masa

elevada pueden tener muchos modos de desintegración. Por ejemplo el K^+(493,7 MeV/c^2) tiene 6 modos de desintegración con los siguientes cocientes de desintegración (*branching ratios*, BR):

	desintegración	frecuencia, BR
K^+	$\rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	0,635
	$\rightarrow \pi^+ \pi^0$	0,212
	$\rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	0,056
	$\rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$	0,017
	$\rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$	0,032
	$\rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$	0,048

[3] Mezcla en el estado inicial. Este es el caso de sustancias (como el Cu natural irradiado), que tienen dos isótopos radiactivos químicamente inseparables: ^{64}Cu(12, 7 h) y ^{61}Cu(3, 3 h). En este caso la ley de desintegración es una suma de exponenciales. Para identificar la ley de desintegración de cada elemento hay que extraer las dos constantes de desintegración de los dos isótopos. Para ello, utilizando los datos a mayor tiempo, se ajusta la curva y se obtiene la constante mayor, ya que a tiempos elevados sólo existe isótopo con $t_{1/2}$ mayor. La exponencial obtenida se extrapola a tiempos pequeños y se sustrae de los datos, con lo que ya se puede obtener la constante del segundo elemento ajustando los datos obtenidos después de la sustracción.

8.3 Teoría cuántica de la desintegración radiactiva

Una desintegración es debida a una interacción descrita por un potencial $V' << V_0$, siendo V_0 el potencial que describe el sistema nuclear estacionario. El potencial del sistema es entonces $V = V_0 + V'$. Puede aplicarse la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, que dice que la probabilidad de transición entre los estados $|\psi_i>$ y $|\psi_f>$, soluciones del potencial no perturbado V_0, viene dada por la regla de oro de Fermi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar}|V'_{fi}|^2\rho(E_f) \qquad \text{con} \qquad V'_{fi} = \int \psi_f^* V' \psi_i d\Omega$$

y $\rho(E_f)$ el llamado espacio fásico, es decir, la densidad de estados del estado final.

Una función de ondas de un estado estacionario evoluciona con el tiempo según la forma bien conocida:

$$\Psi_a(\vec{r},t) = \psi_a(\vec{r})e^{-iE_a t/\hbar}.$$

que da una probabilidad, independiente de *t*, de encontrar al sistema en elestado *a* y por lo tanto, si se calcula la energía del estado se obtendrá siempre E_a.

Si el estado es inestable (se desintegra con vida media τ_a), la probabilidad podrá escribirse:

$$|\Psi_a(\vec{r},t)|^2 = |\Psi_a(\vec{r},0)|^2 e^{-t/\tau_a}.$$

con $\tau_a = 1/\lambda_a$. La función de ondas podrá escribirse:

$$\Psi_a(\vec{r},t) = \psi_a(\vec{r})e^{-iE_a t/\hbar}e^{-t/2\tau_a}. \qquad (8.7)$$

Es como si la energía fuese ahora $E_a - i\frac{\hbar}{2\tau_a}$.

Ya no se tiene un estado estacionario con E_a bien definida, sino con una anchura $\Delta E = \Gamma_a = !/\tau_a$. El principio de incertidumbre da el significado de esta anchura: para determinar la energía de un estado con una precisión ΔE, debe poder observarse durante un tiempo τ, relacionados por $\Delta E \approx !/\tau$.

El estado físico inestable será una superposición

$$\Psi_a(\vec{r},t) = \psi_a(\vec{r}) \int \alpha(E)e^{-iEt/\hbar}dE \qquad (8.8)$$

con $\alpha(E)$ la amplitud de probabilidad de encontrar al estado con una energía E. La energía media es $\langle E \rangle = E_a$ y al igualar las dos anteriores expresiones de Ψ_a se puede ver que:

$$e^{-t/2\tau_a} = \int \alpha(E) e^{-i\frac{(E-E_a)t}{\hbar}} dE$$

y la transformada de Fourier dará la probabilidad $P(E) = |\alpha(E)|^2$ de encontrar el estado con una energía entre E y $E + dE$ alrededor del valor medio E_a:

$$P(E)dE = \frac{dE}{(E-E_a)^2 + \Gamma_a^2/4} \tag{8.9}$$

que es una fórmula de Breit-Wigner, en la que $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$ es la anchura del estado a. Fórmula de gran importancia en física nuclear y de partículas, ya que explica también ciertos fenómenos de colisiones entre partículas y núcleos: da la sección eficaz de reacción cuando aparece el conocido fenómeno de las resonancias.

La anchura Γ_a, llamada habitualmente anchura intrínseca del estado Ψ_a, cuyo valor de la energía (más probable) es E_a, es mucho menor que el espaciado de los niveles nucleares, o sea que se podrá hablar de transiciones entre niveles nucleares. En efecto, como $\hbar = 6{,}6 \times 10^{-22}$ MeV · s, si $\tau > 10^{-12}$ sentonces $\Gamma < 10^{-10}$ MeV, que habría que comparar a separaciones entre niveles nucleares $\geq 10^{-3}$ MeV.

8.4 Tipos de desintegraciones nucleares. Fuentes radiactivas más comunes

Los núcleos se desintegran de manera que siempre tienden al estado energético más estable. A continuación se describen los tipos más frecuentes de desintegraciones nucleares. Las tablas de emisores que se

presentan a continuación pueden consultarse en R. B. Firestone y V. S. Shirley: *Table of Isotopes*, 8th Edit., John Wiley & Sons, N. Y., 1996. También se presentan más adelante (véase por ejemplo la figura 8.1) algunos esquemas de desintegración, en los que la escala vertical representa la energía explícitamente.

8.4.1 Desintegración α

Es la emisión de núcleos ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ (que se denominan α) por núcleos pesados, y es un proceso facilitado, entre otros, por la enorme energía de ligadura de las partículas α (véase la tabla 8.1). La teoría que describe este fenómeno fue desarrollada por Gamow, Condon y Gourney. Es una brillante aplicación del conocido efecto túnel de la Mecánica Cuántica. En el Capítulo 9 se explican estos efectos y se estudian las propiedades físicas de la desintegración α.

En la desintegración α, los números másico (A) y atómico (Z) de los elementos que entran en juego cumplirán:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

por ejemplo: ${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha(4.2\,\mathrm{MeV}); \qquad t_{1/2} = 4.47 \times 10^{9}$ años.

${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + \alpha(4.8\,\mathrm{MeV}); \qquad t_{1/2} = 1600$ años.

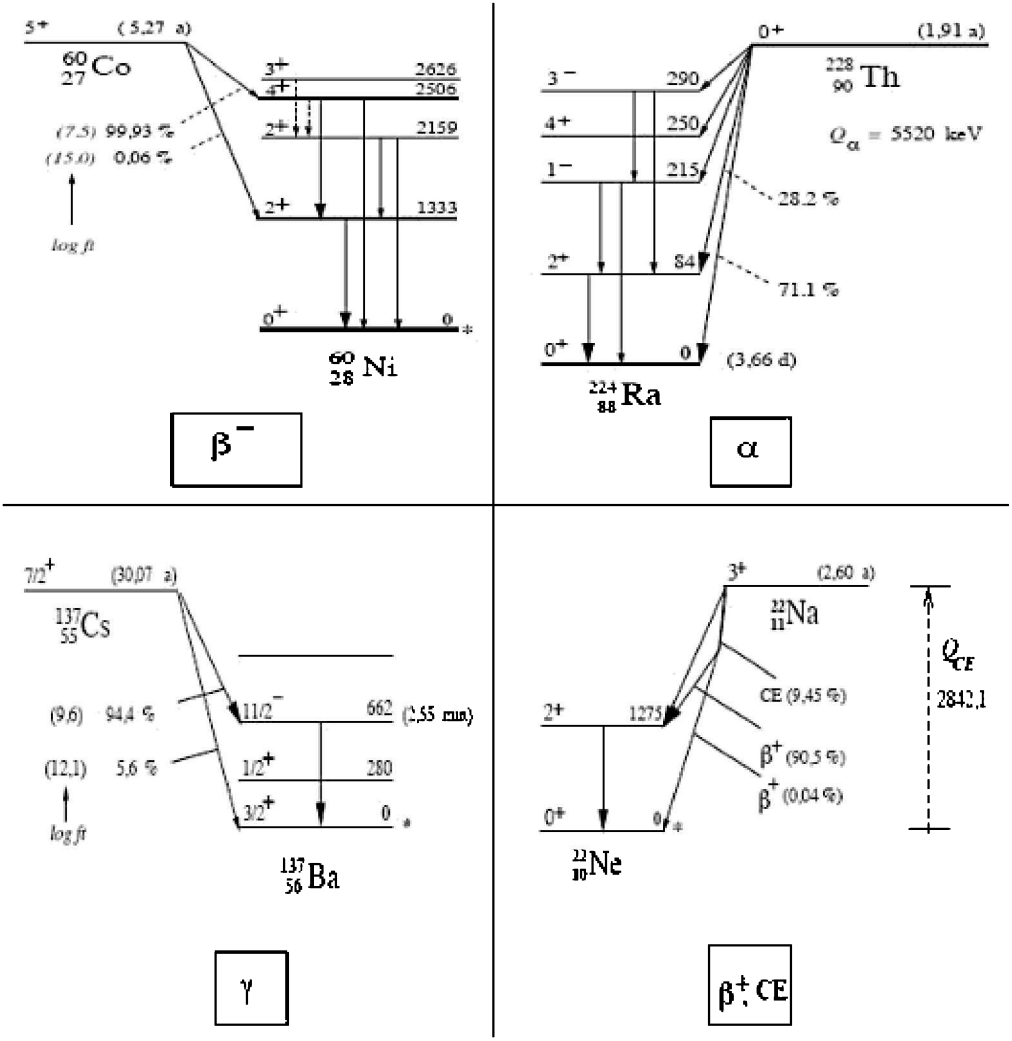


Figura 8.1: Esquemas de desintegración nuclear (α, $\beta^{\pm}$, CE y γ).

Tabla 8.1: Características de algunos emisores alfa.

Isótopo	Semivida	Energías (MeV)	Fracción (%)
^{241}Am	433 días	5,486	85
		5,443	12,8
^{210}Po	138 días	5,305	100
^{242}Cm	163 días	6,113	74
		6,070	26

8.4.2 Desintegración β

Conocida como desintegración β o de Fermi. Se trata de emisiones de $e^{\pm}$ por parte de núcleos alejados de la línea de estabilidad. El proceso es una interacción débil en la que uno de los nucleones que se encuentran en exceso, (n, p), se transforma en el otro (cambio de carga $n \leftrightarrow p$), emitiendo un e^+ o un e^- de forma que se conserve la carga eléctrica. Existen tres variantes de la desintegración β nuclear llamadas β^-, β^+ y CE (captura electrónica).

Básicamente las tres pueden explicarse mediante transformaciones que tienen lugar entre los nucleones constituyentes,

	tipo	proceso	ejemplo	$t_{1/2}$
1.	(β^-)	$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$	$^{131}_{53}I \to {}^{131}_{54}Xe + e^- + \overline{\nu}_e$	(8,0 d)
2.	(β^+)	$p \to n + e^+ + \nu_e$	$^{25}_{13}Al \to {}^{25}_{13}Mg + e^+ + \nu_e$	(7,2 s)
3.	(CE)	$p + e^- \to n + \nu_e$	$^{54}_{25}Mn + e^- \to {}^{54}_{24}Cr + \nu_e$	(312 d)

en el último caso, después de la captura electrónica (CE) debe haber emisión de un rayo X por parte del átomo, al haber sido capturado uno de los electrones de las capas internas por un protón del núcleo, dejando un hueco en la estructura atómica. Hay que tener claro que estos procesos

pueden tener lugar entre nucleones ligados. Sólo así se entiende que el protón pueda transformarse en un neutrón dentro del núcleo, debido a que hay que tener en cuenta las energías de ligadura nuclear en el balance energético.

La interacción fundamental que origina esta desintegración es la interacción débil (intercambio de $W^{\pm}$) con cambio de sabor de quarks. Así, en el caso de la desintegración β^- del neutrón el proceso, en realidad, es el de cambio de sabor del quark d:

$$d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}$$

En el Capítulo 10 se repasan las propiedades físicas de la desintegración beta y se analiza la idea precursora de Fermi de la teoría de la interacción débil. También se discuten las propiedades del neutrino y la sorpresa que supuso la constatación de la violación de la paridad en las interacciones débiles.

Aunque existen emisores β puros (tabla 8.2), en la mayoría de los núcleos inestables por desintegración beta, el núcleo final queda en un estado excitado dando lugar a desintegración γ.

8.4.3 Desintegración γ

Es el proceso de desexcitación nuclear por excelencia. La interacción responsable es la electromagnética. Frecuentemente es un proceso rápido ($t_{1/2} \approx 10^{-9}$ s). Si $t_{1/2} \geq 0,1$ s, entonces a esos estados se les suele llamar *isómeros*. Sucede para desintegraciones entre estados con números cuánticos de espín muy diferentes. Los isómeros se representan con una *m* al lado del número másico del núcleo, por ejemplo el nivel excitado 2^+ del ^{60}Co que tiene una energía de 58,59 keV y un semiperiodo $t_{1/2}$ = 10,47 min. y que se denomina ^{60m}Co.

Tabla 8.2: Emisores β puros. T_{max} es la energía cinética máxima del electrón.

Isótopo	Semivida	T_{max}(MeV)
^{3}H	12,32 años	0,0186
^{14}C	5730 años	0,156
^{32}P	14,28 días	1,710
^{33}P	24,4 días	0,248
^{35}S	87,9 días	0,167
^{36}Cl	3,08 $\times 10^{5}$ años	0,714
^{45}Ca	165 días	0,252
^{63}Ni	92 años	0,067
$^{90}Sr/^{90}$ Y	27,7 años/64 horas	0,546/2,27
^{99}Tc	2,12 $\times 10^{5}$ años	0,292
^{147}Pm	2,62 años	0,224
^{204}Tl	3,81 años	0,766

Existe también la conversión interna (tabla 8.3), emisión de un e^- de las capas atómicas en vez de un fotón. Se trata en este caso de un e^- monoenergético. Las fuentes de conversión interna se utilizan sobre todo para la calibración energética de detectores de partículas.

El electrón emitido procede de la corteza atómica, como resultado de la desexcitación. Si la energía de ligadura del electrón es B_e, la energía del e^- de conversión interna será $E_e = (E_i - E_f) - B_e$, siendo $E_i - E_f$ la diferencia de energía entre los niveles nucleares. Como puede observarse en la tabla 8.3, existen varios valores de la energía de los electrones emitidos por estas fuentes según la capa electrónica de la que procedan.

Las propiedades físicas de la desintegración gamma se analizan en el Capítulo 11, donde se introducen los coeficientes de Weisskopf para estimar las vidas medias de las desintegraciones gamma de los núcleos.

8.4.4 Fisión espontánea

La fisión es la fragmentación de un núcleo pesado en dos núcleos más ligeros y con emisión de varios neutrones. Suele tener lugar en núcleos muy

Tabla 8.3: Fuentes de conversión interna.

Fuente	Energías (keV)
^{113}Sn	365
^{133}Ba	266, 319
^{137}Cs	624
^{207}Bi	480, 967, 1047

ricos en neutrones como los transuránidos, por ejemplo $^{254}_{98}$Cf y $^{256}_{100}$Fm. Es un fenómeno debido a la deformación nuclear creada por las enormes fuerzas de repulsión eléctricas en núcleos muy pesados. No hay núcleos estables más allá del bismuto porque sufren desintegración α. Para valores $A > 250$, más allá del californio comienzan a tener fisión espontánea también. A partir de $A = 300$, los núcleos se fisionarían espontáneamente. Esto explica por qué no pueden existir núcleos estables con A elevado.

Otro fenómeno es el de la fisión inducida por neutrones; muy probable para núcleos como ^{235}U y ^{239}Pu. Es un fenómeno que puede desarrollar una reacción en cadena. Sus aplicaciones son de gran envergadura a nivel mundial; en los últimos quince años, más del 15 % de la energía eléctrica consumida en el mundo se debe a la fisión nuclear.

8.4.5 Emisión de nucleones

Se trata de desintegraciones de núcleos que se encuentran lejos del valle de la estabilidad. Este tipo de núcleos aparecen entre los productos de la fisión. Para que la emisión espontánea de nucleones pueda tener lugar, la energía de separación nucleónica debe ser S_p, $S_n < 0$, ya que, por convenio, se define la energía de separación como la energía que hay que

ceder al núcleo para que se pueda arrancar un nucleón. Un ejemplo de emisor de protones es el $^{73}_{36}$Kr. En la carta de Segré (figura1.11), las líneas $S_p = 0$ y $S_n = 0$ dibujan las llamadas *drip lines*, fuera de las cuales los núcleos son inestables por emisión de nucleón.

Otro proceso de emisión de neutrones es el de la fisión nuclear, en la que los neutrones se producen además de los fragmentos de fisión. En el caso de los neutrones de fisión, el espectro de energías sigue la distribución de Maxwell, $dN/dE = \sqrt{E}\exp\{-E/E_0\}$. Un ejemplo es el $^{252}_{98}$Cf($t_{1/2}$ = 265 años) en el que la constante E_0 en la ley de desintegración anterior vale E_0 = 1, 3 MeV. Se tiene entonces una buena fuente de neutrones.

Se dispone también de fuentes de neutrones basadas en un montaje tipo sandwich de una fuente (emisora de partículas α) y un material (que proporciona el blanco), por ejemplo ^{241}Am con ^{9} Be, que producen n a través de la reacción nuclear $\alpha + {}^{9}\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \text{n}$, precisamente la reacción que fue utilizada por Chadwick en el famoso experimento del descubrimiento del neutrón.

8.5 Series naturales de elementos radiactivos

La Tierra (y sus elementos constituyentes, Fe, O, C, Si, …) tiene una edad estimada en unos $4{,}5\times10^9$ años. El Universo (cuyo origen se sitúa en el instante del *Big-Bang*) data de unos $13{,}5\times10^9$ años. Se supone que fueron necesarios unos 10×10^9 años para fusionar H y He en núcleos más pesados, estrellas, novas y supernovas. Puede decirse que la Tierra y todo lo que contiene son los deshechos reciclados de las supernovas.

La radiactividad natural es debida a las desintegraciones de las cadenas de elementos pesados que aparecen en la tabla 8.4.

Tabla 8.4: Cadenas radiactivas de elementos pesados.

serie	tipo	elemento	$t_{1/2}$ (años)	estable
Torio	4n	^{232}Th	$14,1 \times 10^9$	^{208}Pb
Neptunio	4n+1	^{237}Np	$2,14 \times 10^6$ (no natural)	^{207}Bi
Uranio	4n+2	^{238}U	$4,47 \times 10^9$	^{206}Pb
Actinio	4n+3	^{235}U	$0,704 \times 10^9$	^{207}Pb

Estas cadenas naturales de elementos radiactivos, más el ^{40} K (el potasio es más abundante en la corteza terrestre, pero la proporción isotópica del ^{40}K es minúscula: 0,0117 %) originan el calor interno de los planetas. Por ejemplo, una tonelada de ^{238}U genera un calor equivalente a 9,6 mW (sin contar los demás elementos de la cadena radiactiva).

Para la salud pública, el elemento más problemático es el gas Rn. El origen del gas radón puede verse, por ejemplo, en la figura 8.2, que muestra la serie de 15 elementos que componen la cadena radiactiva natural del ^{238}U. Esta serie acaba en el elemento estable $^{206}_{82}$Pb. Entre el $^{238}_{92}$U y el último elemento de la serie ($^{206}_{82}$Pb) se observa que hay una disminución de 32 nucleones, pero sólo de 10 protones, explicable porque hay 8 desintegraciones alfa y 6 desintegraciones β^-.

Existen otros elementos radiactivos en la Tierra, pero no son naturales (no tienen vidas medias del orden de o mayores que la edad de la Tierra), aunque su proporción es constante. Son producidos en colisiones de rayos cósmicos con los núcleos del aire de la atmósfera o el agua del mar. Entre ellos se encuentra el tritio, que se desintegra dando ^{3}H(12,32 años) $\rightarrow$ ^{3}He + e^- + $\overline{\nu}$ y el carbono-14, que sigue el mismo tipo de desintegración: ^{14} C(5730 años) $\rightarrow$ ^{14}N + e^- + $\overline{\nu}$. En estos casos no existen series radiactivas como en los transuránidos. Sin embargo estos dos últimos elementos naturales radiactivos tienen interesantes aplicaciones de datación.

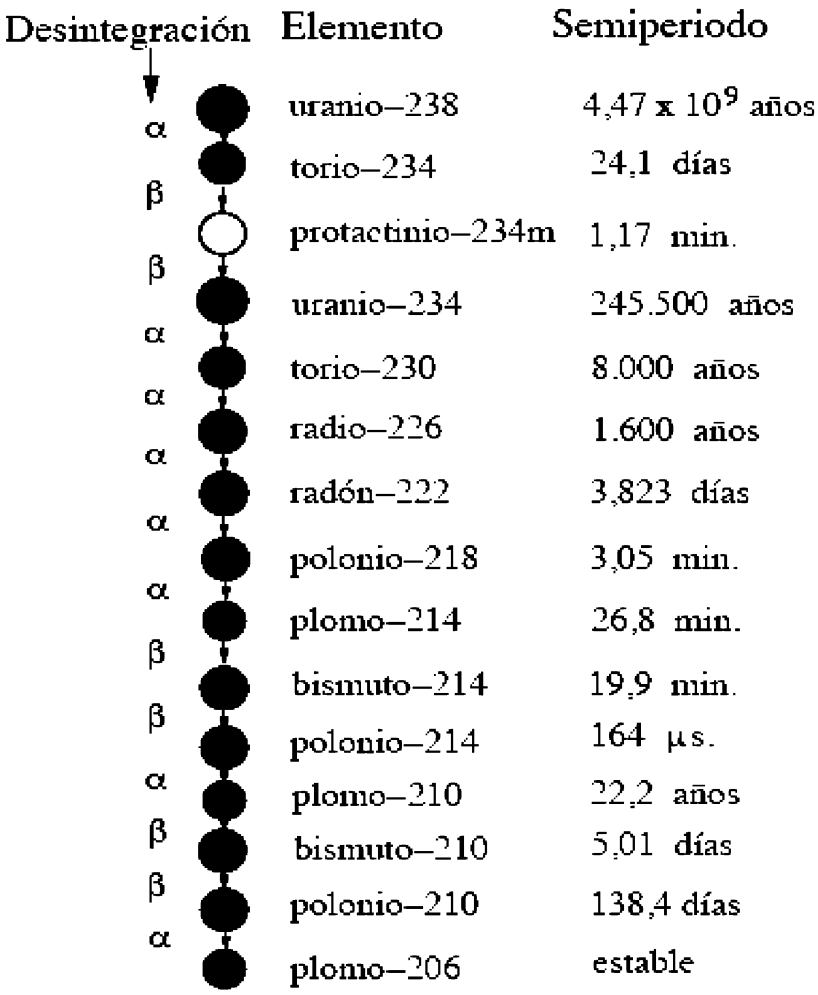


Figura 8.2: Los quince elementos de la serie radiactiva natural del ^{238}U.

8.6 Cadenas radiactivas. Ecuaciones de Bateman

Es frecuente encontrar series de núcleos que se desintegran dando lugar a una cadena o familia radiactiva, como se acaba de ver en el parágrafo anterior. El problema es conocer en cada instante qué número de átomos de cada elemento existe en la muestra. Un caso particular de estas cadenas que conviene estudiar es el que tiene lugar con sólo tres elementos: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, siendo 3 un núcleo estable. Las ecuaciones de la cadena radiactiva y sus soluciones para el caso en el que en el instante t =

0 no exista ningún núcleo hijo, es decir, $N_2(0) = N_3(0) = 0$, son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= \lambda_2 N_2 \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

que conducen a:

$$\left.\begin{aligned} N_1(t) &= N_0 e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) &= N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \\ N_3(t) &= N_0\left\{1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

La actividad del núcleo hijo es $\mathcal{A}_2 = \lambda_2 N_2(t)$ (y no $\frac{dN_2}{dt}$ porque además de desintegrarse, se crean núcleos de tipo 2 !). El número de núcleos hijo pasa por un máximo, que se obtiene al exigir que $\frac{dN_2}{dt} = 0$, que da lugar a:

$$t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad (8.12)$$

instante en el que la actividad del hijo está en *equilibrio ideal*: $\lambda_2 N_2(t_{\max}) = \lambda_1 N_1(t_{\max})$. Para cualquier otro valor de *t*, el cociente entre la actividad del hijo y la del padre vale:

$$\frac{\lambda_2 N_2}{\lambda_1 N_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right\} \qquad (8.13)$$

distinguiéndose tres casos (véase figura 8.3):

- $\lambda_2 >> \lambda_1$;es decir, el hijo tiene una probabilidad de desintegración mucho mayor que la del padre. Se tiene *equilibrio secular*, ya que el cociente $\frac{\lambda_2 N_2}{\lambda_1 N_1}$ se hace ≈ 1 rápidamente y se mantinene así indefinidamente.

  Ejemplo: el ^{90}Sr(β^-, T_{max} = 0, 546 MeV, 27,7 años) → ^{90}Y(β^-, T_{max} = 2, 27 MeV, 64,8 h)→ ^{90}Zr. Es como si se tuviera una fuente de ^{90}Y con $t_{1/2}$ = 27, 7 años (en vez de 64,8 h). El núcleo hijo se desintegra con la misma velocidad con la que se crea, y el número de átomos sigue la ley:

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

- $\lambda_2 > \lambda_1$; la probabilidad de desintegración del núcleo hijo es mayor que la del padre. Se alcanza un *equilibrio transiente*; el cociente de actividades va creciendo lentamente, sin alcanzar una constante como en el caso anterior.

- $\lambda_2 < \lambda_1$. El cociente de actividades aumenta con el tiempo. Los núcleos de tipo 1 se desintegran rápidamente y los de tipo 2 varían según la ley exponencial:

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

En el caso de k generaciones 1 → 2 → 3… → *k*, se generaliza para

cualquier elemento i de la cadena: $\frac{dN_i}{dt} = \lambda_{i-1} N_{i-1}(t) - \lambda_i N_i(t)$. Si se supone que $N_i(0) = 0$ para todos los elementos de la cadena ($i > 1$), excepto $N_1(0) = N_0$, entonces la actividad del miembro n de la cadena vendrá dada por las ecuaciones de Bateman:

$$\mathcal{A}_n = N_0 \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t} \qquad \text{siendo} \qquad c_m = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{m \neq i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_m)} \qquad (8.14)$$

teniendo en cuenta que en el cálculo de la actividad del elemento n habrá n coeficientes c_m. En el denominador anterior el producto significa que deben tomarse todos los valores de i salvo $i = m$. Se tiene equilibrio secular $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots = \lambda_n N_n$.

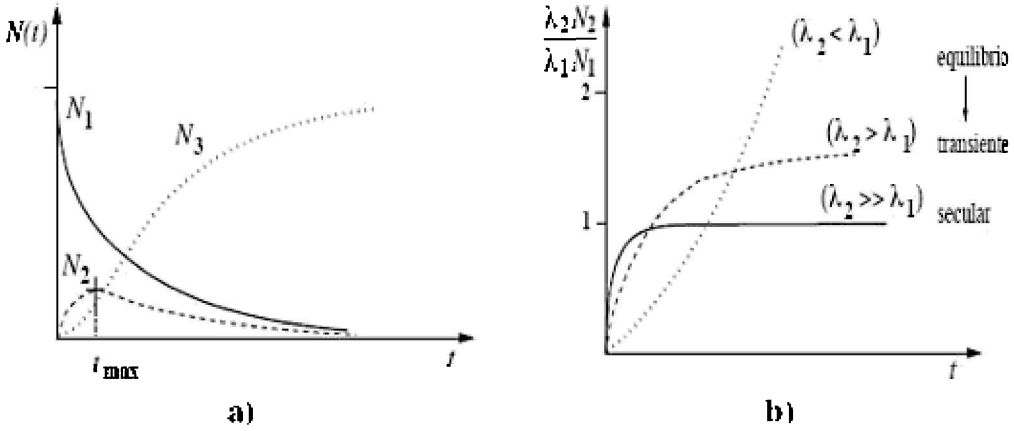


Figura 8.3: a) Evolución temporal del número de núcleos de cada una de los miembros de la cadena radiactiva $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3$, siendo la sustancia N_3 estable. b) Cociente de actividades A_2/A_1 en función del tiempo, para cada uno de los casos descritos en la figura, entre ellos, el equilibrio secular.

Si lo que se busca es el número de átomos del elemento n de la cadena

radiactiva en el instante *t*, se podrá obtener a partir de:

$$N_n(t) = \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} N_1(0) \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{m \neq i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_m)} \qquad (8.15)$$

pudiendo comprobarse que, efectivamente, las actividades vistas en (8.14) coinciden con $A_n(t) = \lambda_n N_n(t)$.

Ejemplo También puede comprobarse que en el caso de tres elementos, como se ha visto en al inicio del parágrafo, se obtienen las mismas ecuaciones vistas en (8.11), simplemente utilizando la expresión de la ecuación de Bateman que se acaba de dar en (8.15).

8.6.1 Aplicaciones del equilibrio radiactivo

Se dan dos ejemplos sencillos de aplicación del concepto de equilibrio radiactivo.

Medida de $t_{1/2}$

Sean dos elementos radiactivos en equilibrio (ejemplo: Ra-U), de los que se conoce la relación de masas entre ellos; $M_{Ra}/M_U = 3,4 \times 10^{-7}$. Si se conoce uno de los semiperiodos, por ejemplo: $t_{1/2}(Ra) = 1600$ años, se puede calcular $t_{1/2}$(U) teniendo en cuenta la condición de equilibrio:

$$N_{\mathrm{Ra}} \lambda_{\mathrm{Ra}} = N_{\mathrm{U}} \lambda_{\mathrm{U}} \qquad \text{y como} \qquad N = M \frac{\mathcal{N}_A}{A'}$$

al despejar queda, $t_{1/2}(\mathrm{U}) = 1600(\frac{226}{238}) \left(\frac{M_{\mathrm{U}}}{M_{\mathrm{Ra}}} \right) = 4,5 \times 10^9$ años.

Masa o edad de un material en equilibrio

Para calcular la cantidad de ^{206}Pb producido anualmente por 1 gramo de ^{238}U en equilibrio, se identifica la actividad del uranio con el ritmo de producción de ^{206}Pb:

$$dN_{\mathrm{Pb}} = \lambda_{\mathrm{U}} N_{\mathrm{U}} dt$$

y como λ_{U} es conocido, se puede calcular N_{Pb} y por lo tanto la masa. Para calcular la edad del material, T, conocido el número de átomos de Pb existente,

$$dt = \frac{dN}{\lambda N} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{N_{\mathrm{Pb}}}{\lambda_{\mathrm{U}} N_{\mathrm{U}}}$$

8.6.2 Medida de $t_{1/2}$ por el método de máxima verosimilitud

Esta es una bonita aplicación de los métodos estadísticos[4] aplicados a la física nuclear.

Se supone un sólo elemento radiactivo, que se desintegra de acuerdo con la ley exponencial $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Durante un tiempo T se observan N desintegraciones, cada una en el instante $\{t_i,\ i = 1, \ldots, N\}$. La probabilidad de observar una desintegración por núcleo en el intervalo $(t, t + dt)$ depende de λ:

$$P(\lambda, t_i)dt = \frac{\lambda e^{-\lambda t_i}}{\left(1 - e^{-\lambda T}\right)} dt \qquad \text{que cumple} \qquad \int_0^T P(\lambda, t)dt = 1$$

ya que T es finito y λdt da la probabilidad de desintegración en dt. Al formar la función de verosimilitud $\mathcal{L} = \prod_i^N P(\lambda, t_i)$ y resolver la ecuación:

$$\frac{d\ln\mathcal{L}}{d\lambda}=0$$

se obtiene el mejor estimador del parámetro λ,

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\sum t_i}{N}+\frac{T}{\left(e^{\lambda T}-1\right)} \tag{8.16}$$

con lo que para el caso $\lambda T >>$ se tiene:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda}=\frac{\sum t_i}{N}} \tag{8.17}$$

Este método funciona para vidas medias $\tau = \frac{1}{\lambda}$ que tengan un rango que se extiende desde aproximadamente un minuto hasta unos pocos años.

El error sobre el parámetro λ se calcula utilizando la fórmula de la varianza que se obtiene por el método de máxima verosimilitud:

$$\sigma^2(\hat{\lambda})=-\left(\frac{d^2\ln\mathcal{L}}{d\lambda^2}\right)^{-1}$$

8.7 Radiactividad artificial

En la obtención de radioisótopos por bombardeo de material (del que inicialmente se disponen N_0 núcleos) con aceleradores de partículas o con reactores (flujo incidente F [$cm^{-2}\cdot s^{-1}$]) se forma el elemento N_1 (por ejemplo en la reacción $p + N_0 \rightarrow N_1 + q$) a un ritmo:

$$R = F\sigma N_0 \tag{8.18}$$

y este elemento N_1 es inestable. A continuación el elemento N_1 se desintegra dando $N_1 \rightarrow N_2 + x$ con constante radiactiva λ_1 y el proceso da lugar, finalmente, al elemento N_2 estable. Típicamente las secciones eficaces σ en la expresión (8.18) son del orden del barn y los flujos, F, del orden de 10^{14} cm^{-2} s^{-1}, con lo que $R/N_0 \approx F\ (10^{14}) \times \sigma(10^{-24}) \approx 10^{-10}$ s^{-1}, tan pequeño que puede suponerse N_0 constante. Se tiene pues,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = R - \lambda_1 N_1 \Longrightarrow \quad N_1(t) &= \frac{R}{\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \\ A_1(t) &= R\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

que se integra fácilmente al multiplicar por $e\lambda_1 t$ con lo que se obtiene la ecuación $\frac{d}{dt}\left(N_1 e^{\lambda_1 t}\right) = k e^{\lambda_1 t}$.

El problema queda bien descrito por las dos condiciones límites siguientes:

$t << t_{1/2} \longrightarrow A_1(t) \approx R\lambda_1 t$ (crecimiento lineal cerca de $t = 0$)

$t >> t_{1/2} \longrightarrow A_1(t) \approx R$ (equilibrio secular)

La evolución del número de átomos (o el de la actividad) creados artificialmente puede verse en la figura 8.4

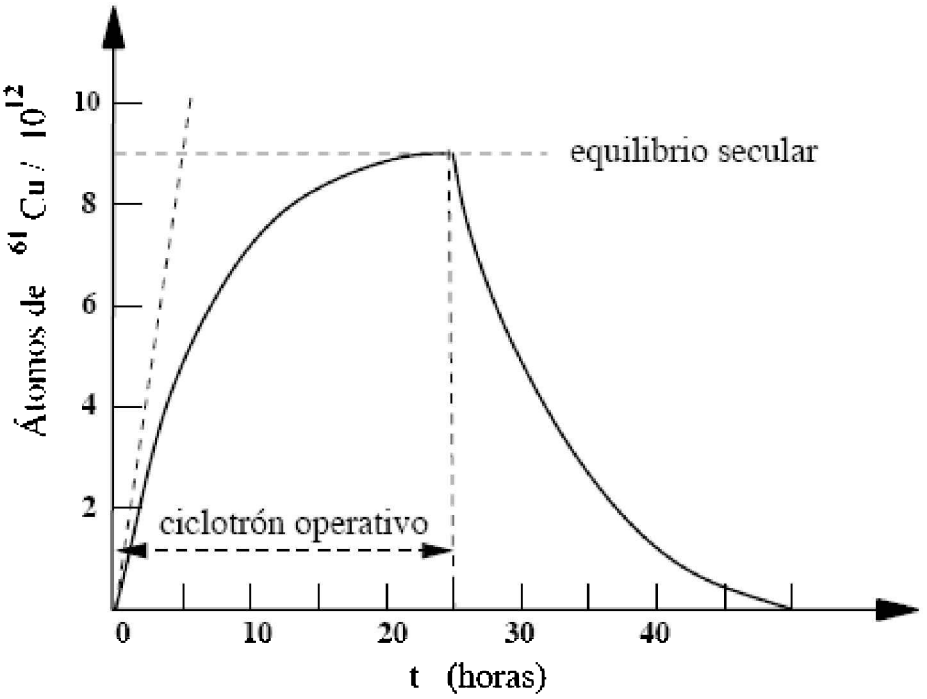


Figura 8.4: Evolución del número de átomos radiactivos producidos por bombardeo de un blanco de *Ni* en un ciclotrón que acelera protones. Los valores numéricos corresponden a la reacción p + ^{61} Ni → ^{61}Cu + n, que produce ^{61}Cu radiactivo que tiene un semiperiodo $t_{1/2}$ = 3, 3 h.

Ejemplo: Cálculo de la actividad de los dos isótopos radiactivos ^{64}Cu y ^{66}Cu que se producen al irradiar un blanco formado por 1 gramo de Cu natural, con un flujo $F = 10^9$ n/(cm^2 · s) de neutrones de muy baja energía (térmicos) durante 15 minutos. Se tienen los procesos y las secciones eficaces de producción siguientes:

$$\mathrm{n} + \left\{ \begin{array}{l} {}^{63}\mathrm{Cu}\ (69\,\%) \\ {}^{65}\mathrm{Cu}\ (31\,\%) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} {}^{64}\mathrm{Cu}\ (t_{1/2} = 12.7\,\mathrm{h}), & \sigma = 4,4\,\mathrm{b} \\ {}^{66}\mathrm{Cu}\ (t_{1/2} = 5.1\,\mathrm{min}), & \sigma = 2,2\,\mathrm{b} \end{array} \right\} + ?$$

El núcleo de ^{64}Cu se desintegra en un 39 % vía β^- a ^{64}Zn y en un 61% vía Captura Electrónica a ^{64}Ni.

Utilizando la fórmula:

$$\mathcal{A}(t) = \lambda_1 N_1(t) = \lambda_1 \cdot \frac{R}{\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) = F\sigma N_0\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)$$

y como en 1 gramo de material el número de átomos viene dado por $N(0) = (N_A/A)(a\%) \times 1$ g, en donde a % es la abundancia de cada isótopo, se obtiene finalmente:

$$\lambda_1 N_1(15 \text{ min.}) = \begin{cases} 10,43\,\mu\text{Ci de } {}^{64}\text{Cu} \\ 152,0\,\mu\text{Ci de } {}^{66}\text{Cu} \end{cases}$$

El tiempo óptimo de bombardeo puede calcularse utilizando la misma expresión obtenida para $t_{\max}$ en el caso del equilibrio ideal vista en (8.12). En este caso basta con la condición $e^{-}\lambda_1 t \to 0$, lo que se consigue en un tiempo de bombardeo inferior a unas 10 vidas medias. O sea, si el elemento tiene un semiperiodo $t_{1/2}$, no tiene ningún interés bombardear durante un tiempo superior a $\sim 10 \times t_{1/2}$, ya que no aumenta la cantidad dematerial radiactivo.

8.8 Aplicaciones de la radiactividad

Existen numerosas aplicaciones del fenómeno de la radiactividad. Unos se refieren a la explotación de la ley (exponencial) de la desintegración radiactiva; por ello se agrupan dentro de los métodos de datación. Los otros son consecuencia de los efectos físicos producidos por la radiación y se clasifican a su vez en aplicaciones en los campos

- del agroalimentario
- el industrial
- la medicina

8.8.1 Datación radiactiva

Es una aplicación importante de la ley exponencial de desintegración. Se suele distinguir entre datación arqueológica, geológica o cosmológica, según la escala de tiempo que se desee medir.

a) Datación por ^{14}C.

Propuesta por Willard F. Libby (premio Nobel de Química, 1960). El ^{14}C es un isótopo con $t_{1/2}$ = 5730 años que se produce en la atmósfera por el choque de rayos cósmicos con los núcleos. En estas reacciones nucleares se producen neutrones, que preferentemente son capturados por el nitrógeno ($n + {}^{14}_{7}N \rightarrow p + {}^{14}_{6}C$) dando lugar al denominado radiocarbono. Elhechomás importante es que existe equilibrio entre el radiocarbono producido y el que se desintegra. Se ha estimado que el ritmo de producción es ~ 2,25 átomos cm^{-2} s^{-1}, que es, aproximadamente, el ritmo de producción de neutrones por los rayos cósmicos. Una reacción parecida ($n + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{3}H + {}^{12}_{6}C$ e incluso $^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}H + {}^{1}H$) se aplica a la producción del tritio (^3H, $t_{1/2}$ = 12,33 años), que se encuentra en el agua de lluvia y el propio Libby lo usó para datar vinos.

Para que la datación por ^{14}C sea correcta, se supone que en los últimos 50.000 años, la proporción $^{14}C/C = 1/10^{12}$, no ha cambiado; el método podría no funcionar dentro de miles de años por las bombas atómicas en la atmósfera durante las décadas 1950-1960, que han provocado un cambio (que será muy difícil de calcular en el futuro) de su concentración.

El carbono natural, cuya proporción isotópica es 98,89 % de ^{12}C y1,11% de ^{13}C, es absorbido por sustancias orgánicas en forma de CO_2 (casi el 90 % del carbono, en forma de carbonatos, se encuentra disuelto en los océanos). También absorben la pequeñísima cantidad de ^{14}C presente. Al morir el organismo, cesa de adquirir ^{14}C, *poniendo en marcha un reloj biológico*. Se puede así conseguir la datación de restos orgánicos con edades del orden de milenios (hasta unos $10 \times t_{1/2} \approx 50.000$ años) al comparar la actividad específica de muestras similares (antes y

ahora).

Para hacerse una idea del contenido en ^{14}C presente en un gramo de carbono natural, piénsese que una medida de la actividad de un gramo de carbono da 13,6 desintegraciones/min o sea ≈ 0,23 Bq. Este valor representa el equilibrio alcanzado del radiocarbono en el carbono natural.

b) Datación geológica (geocronología).

El geoquímico americano C. C. Patterson,[5] en 1956, introdujo el método uranio-plomo para datar la edad de la tierra, cifrándola en $4{,}55\times10^9$ años, a partir de un meteorito encontrado en el cañón del diablo en el cráter de Barringer (Arizona, EEUU). Esta edad coincide con la que se obtiene con las rocas de mayor antigüedad conocidas en la Tierra: las de Jack Hills en Western Australia y utilizando métodos similares al del uranio-plomo. El método uranio-plomo, en realidad se basa en la existencia de las tres familias radiactivas vistas anteriormente en la Sección 8.5: uranio-235, uranio-238 y torio-232, que acaban en isótopos estables del plomo; plomo-206, plomo-207 y plomo-208 respectivamente.

No es de extrañar que esta primera determinación rigurosa de la edad de la Tierra, hecha hace algo más de 50 años, contradijera algunas esperpénticas oerróneas estimaciones basadas en contenidos tan dispares como el cálculo del arzobispo irlandés J. Ussher que, en 1650, amparándose en el relato de la historia de la creación descrita en la Biblia, publicó que la creación tuvo lugar el 23 de octubre de 4004 aC. También contradijo predicciones de otros ilustres físicos, como la debida a Lord Kelvin quien, a finales de los años 1900, estimó que la edad de la Tierra era de unos 100 millones de años al calcular el tiempo de enfriamiento del globo terrestre.

Para tiempos geológicos, debe medirse el número de isótopos N_0 y no la actividad. Para medir el número de átomos de los elementos buscados, la técnica más utilizada es la espectroscopia de masas con aceleradores de partículas. Buenos elementos para medir tiempos geológicos son:

elemento	$t_{1/2}$ (años)	elemento	$t_{1/2}$ (años)
^{40}K	$1,28 \times 10^9$	^{147}Sm	$1,0 \times 10^{11}$
^{87}Rb	$4,8 \times 10^{10}$	^{176}Lu	$3,9 \times 10^{10}$
^{113}Cd	$7,7 \times 10^{15}$	^{187}Re	$4,1 \times 10^{10}$
^{115}In	$4,4 \times 10^{14}$	^{238}U	$4,5 \times 10^9$

Uno de los métodos de datación geológica es el del potasio-argón (K-Ar). No es el más seguro debido a que el argón es un gas, que podría haber escapado de la roca. La edad de una muestra sería:

$$t = t_{1/2} \ln[1 + N(^{40}\text{Ar})/(0{,}112 \times N(^{40}\text{K})]/ \ln(2)$$

donde $N(^{40}\text{K})$, $N(^{40}\text{Ar})$ representa el número de átomos de cada especie y 11,2 % es el cociente de desintegración del ^{40}K en ^{40}Ar.

En la tabla anterior, se puede observar que existen otras posibilidades como: samario-neodimio (Sm-Nd); lutecio-hafnio (Lu-Hf) o renio-osmio (Re-Os).

Para ilustrar las aplicaciones de datación geológica se estudiará con detalle el caso del rubidio-estroncio, (Rb-Sr). El rubidio natural es una mezcla isotópica de ^{85}Rb (72,15 %), estable, y ^{87}Rb(27, 85 %), inestable, que se desintegra en ^{87} Sr + e^- + $\overline{\nu}$ con $t_{1/2} = 4, 8 \times 10^{10}$ años. El rubidio es el llamado núcleo padre y el estroncio, el núcleo hijo.

Si se tienen en una muestra actual $N_p(t_1)$ núcleos de Rb y $N_h(t_1)$ de Sr, y suponiendo que en $t = 0$, se tenían $N_p(t_0)$ y 0 respectivamente, o sea,

	N_p	N_h
t_0	$N_p(t_0)$	0
t_1	$N_p(t_1)$	$N_h(t_1)$

se cumple, $N_p(t_1) = N_p(t_0)e^{-\lambda(t_1 - t_0)}$, luego,

$$\Delta t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_p(t_0)}{N_p(t_1)} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{N_h(t_1)}{N_p(t_1)}\right)$$

ya que $N_p(t_0) = N_p(t_1) + N_h(t_1)$, o sea, el número de núcleos permanece constante.

Medir $\frac{N(^{87}\mathrm{Sr})}{N(^{87}\mathrm{Rb})}$ permite medir Δt. El error vendrá dado por σ_λ y σ_{Ni}. El método funciona si $N_h(t_0) = 0$. En el caso en que $N_h(t_0) \neq 0$, hace falta otro dato, conocer la proporción en t_0 de otro isótopo estable. Un buen candidato es el ^{86}Sr que cumple $N_h'(t_0) = N_h'(t_1)$, y tal que la proporción $N_h(t_0)/N_h'(t_0)$ es constante, si se trata de minerales del mismo origen.

El método consiste en calcular, para distintas muestras, el cociente:

$$\frac{N_p(t_0) + N_h(t_0)}{N_{h'}(t_0)} = \frac{N_p(t_1) + N_h(t_1)}{N_{h'}(t_1)} \qquad (8.20)$$

de forma que llamando $y = \frac{N_h(t_1)}{N_{h'}(t_1)} = \frac{N(^{87}\mathrm{Sr})}{N(^{86}\mathrm{Sr})}$ y $x = \frac{N_p(t_1)}{N_{h'}(t_1)} = \frac{N(^{87}\mathrm{Rb})}{N(^{86}\mathrm{Sr})}$, sustituyendo en (8.20) se obtiene la ecuación de una recta; $y = mx + b$ con pendiente $m = e^{\lambda\Delta t} - 1$. El ajuste de los datos permite obtener también la ordenada en el origen $b = \frac{N_h(t_0)}{N_{h'}(t_0)}$. Los resultados experimentales conducen a una distribución lineal, obteniéndose (véase figura 8.5),

$\Delta t = 4,5 \times 10^9$ años y $b = 0,7003 \pm 0,0004$

lo que además de confirmar la validez del método, permite determinar la edad de la Tierra en $\Delta t = 4,5 \times 10^9$ años. Lo mismo sucede con la luna y meteoritos, de los que se han medido muestras, obteniéndose los mismos resultados implicando el mismo origen temporal que la Tierra.

8.8.2 Otras aplicaciones de la radiactividad

Se enumeran a continuación las aplicaciones de ciertos elementos radiactivos por sus características:

a) En el campo agroalimentario. Se utiliza la radiactividad para lucha contra insectos, la esterilización de machos, etc.

b) En el tejido industrial. He aquí variose jemplos:

- Baterías eléctricas en satélites (^{238}Pu, ^{60}Co, ^{90}Sr). Llegan a alcanzar centenares de watios. Son de larga duración (el *Voyager*, lanzado en 1977, tiene 3 generadores de ^{238}Pu; llegó a Neptuno doce años después).

- Detectores de incendio (^{241}Am). Detectan el cambio de ionización del aire con y sin humos.

- Protección de obras de arte (destrucción de larvas, insectos, hongos). La momia de Ramsés II fue tratada en Saclay en 1977.

- Indicadores de nivel para detectar fugas en oleoductos, presas o canalizaciones subterráneas, ^{60}Co.

c) En la medicina, tanto para diagnosticar como para realizar tratamientos. Ejemplos de utilización son:

- esterilización de material médico para uso quirúrgico (eliminación de virus, bacterias), ^{60}Co,

- tratamiento de tumores con ^{60}Co, ^{153}Sm,

- trazadores: Fe (hemoglobina), ^{123}I, ^{131}I (tiroides), ^{133}Xe, ^{81m}Kr (neumonías), ^{32}P (metabolismo),

- tomografía por emisión de positrones (PET), ^{18}F,

- gammagrafía e imagen para diagnóstico: ^{99m}Tc, isómero producido en la desintegración del ^{99}Mo.

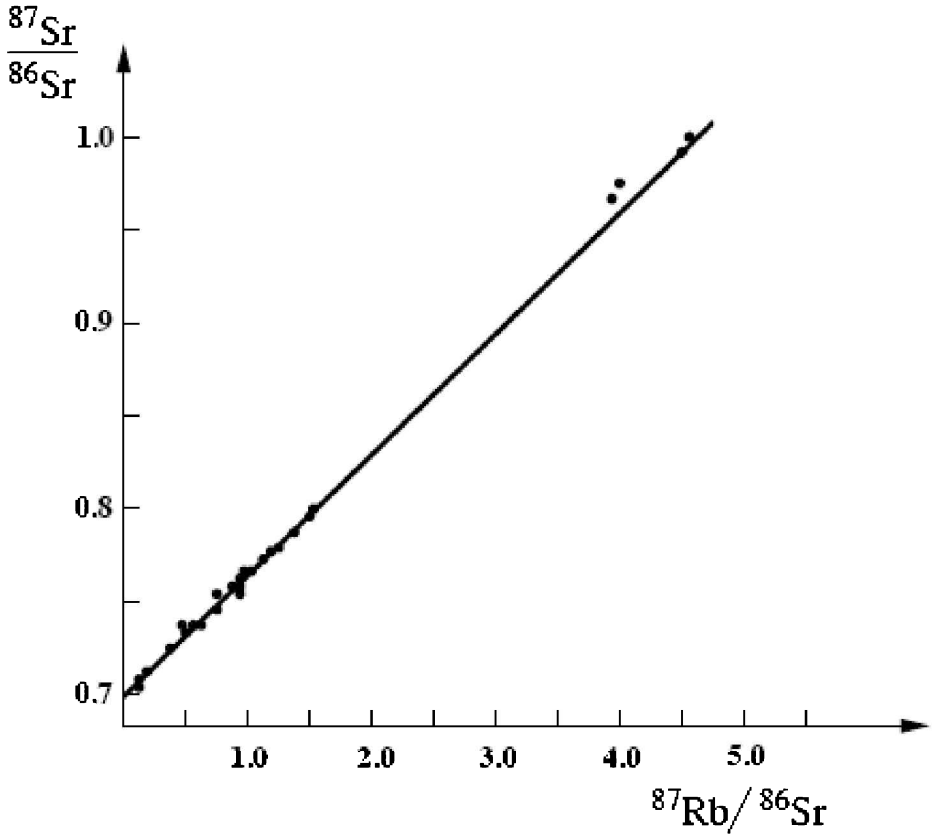


Figura 8.5: Ajuste lineal de las medidas del método de datación del Rb-Sr, en el que se muestra la existencia de ^{87}Sr en el tiempo inicial. Tomada de G. W. Wetherill, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25** (1975) 283.

8.9 Dosimetría. Unidades. Efectos biológicos de la radiación

8.9.1 Introducción

El hombre está siempre expuesto a fuentes naturales de radiaciones ionizantes: rayos cósmicos, materiales radiactivos que se encuentran en

la corteza terrestre, en el aire o incorporados a los alimentos, e incluso sustancias radiactivas que se encuentran en el interior del organismo humano (potasio, carbono, etc.). A las radiaciones producidas por estas causas se les denomina radiaciones de fondo o naturales y forman parte del medio ambiente.

Además de la radiación de fondo natural, el hombre está expuesto a fuentes de radiaciones artificiales. La utilización de fuentes de radiaciones ionizantes, aparatos de rayos X, sustancias radiactivas naturales o radioisótopos producidos artificialmente, en actividades de la medicina, la industria, la agricultura o la investigación ha reportado muchos beneficios a la humanidad, pero también la someten a ciertos riesgos que no quedan limitados a un pequeño grupo de personas, sino a numerosos trabajadores y a la población en su conjunto.

A finales del siglo XIX, se vieron los efectos biológicos nocivos de las radiaciones en los primeros usuarios de los rayos X y materiales radiactivos concentrados. Esto creó la necesidad de protegerse contra los efectos perjudiciales y a partir de 1928 se inicia la elaboración de normas de protección radiológica, un organismo internacional denominado "Comisión Internacional de Protección contra los rayos X y el Radium" que agrupaba a una serie de profesionales en el tema. Después de una interrupción de esta comisión durante la segunda guerra mundial, pasó, a partir de 1950, a denominarse *International Committee for Radiation Protection* (ICRP).

La finalidad de la protección radiológica es "la protección de los individuos, sus descendientes y la humanidad en su conjunto contra los riesgos que se derivan de las actividades humanas que por las características de los materiales y equipos que utilizan pueden implicar irradiaciones".

El ICRP ha sido y continúa siendo el organismo encargado de establecer la filosofía de la protección radiológica, proporcionando las recomendaciones generales y fundamentales para la utilización segura de las radiaciones ionizantes, en las múltiples aplicaciones que han hecho posible el amplio y rápido desarrollo de la energía nuclear y de las

aplicaciones de los radionucleidos y de los equipos emisores de este tipo de radiaciones.

8.9.2 Bases biológicas

Las radiaciones no afectan únicamente a los tejidos sino que además la exposición del tejido germinal puede afectar a los descendientes.

La magnitud de los efectos provocados por el ataque a tejidos y órganos, depende de las características del tejido y de su capacidad para compensar y reparar los daños causados.

Hay distintas posibilidades para clasificar los efectos de las radiaciones. Aquí se adoptará la que más frecuentemente se utiliza en protección radiológica, que hace referencia a la transmisión celular de los efectos y su relación con la dosis: estocásticos y deterministas.

- **Efectos estocásticos:** Incluso a dosis muy bajas es posible que se deposite energía suficiente en una célula como para provocar una transformación o la muerte celular. La muerte de una o varias células, en la mayoría de los casos, no tendrá repercusiones sobre un tejido. Sin embargo las modificaciones en las células aisladas tales como modificaciones genéticas o transformaciones que conducen ulteriormente a la malignidad, tendrán serias consecuencias. Existe una probabilidad de que se produzca este tipo de efectos estocásticos, incluso a dosis extremadamente bajas. No hay evidencia científica de que exista o pueda existir un umbral por debajo del cual no se produzcan efectos negativos en la salud. Si la dosis aumenta, la frecuencia de estos efectos también aumenta, sin embargo no es de esperar que aumente la severidad de los efectos, al contrario de lo que sucede con los efectos deterministas.

- **Efectos deterministas:** A dosis más elevadas, puede producirse un grado importante de muerte celular, suficiente para que se

detecten cambios en el tejido. Para cualquier daño no estocástico definido debe haber perecido un determinado número de células para que el nivel de detección sea alcanzado. Ello constituye un umbral, cuya magnitud dependerá del daño elegido, por debajo del cual la pérdida celular y los daños producidos en la función del tejido u órgano no son detectables. En este tipo de efectos la severidad es función de la dosis recibida.

8.9.3 Unidades

Desde el comienzo de las aplicaciones médicas, científicas e industriales de las fuentes de radiaciones ionizantes, se hizo necesario definir magnitudes y unidades que permitieran caracterizar de manera cuantitativa la radiación. Las magnitudes de interés metrológico son la actividad, que sirve para caracterizar la emisión de radiación (radiactividad), y la exposición, kerma y dosis absorbida que definen su interacción con el medio material (dosimetría).

Las unidades de radiación tradicionales siguen teniendo uso extendido, sin embargo desde 1975 el Comité Internacional de Pesas y Medidas recomendó el uso de las unidades en el llamado Sistema Internacional de Unidades Físicas (SI). La tabla 8.5 resume las cantidades medidas y las unidades empleadas, en donde también se muestran las unidades tradicionales, ya que aún es frecuente encontrar referencias a las mismas.

Tabla 8.5: Magnitudes y unidades en dosimetría.

magnitud medida	definición	unidad SI / tradicional
Actividad ($\mathcal{A}$)	velocidad de desintegración	becquerel (Bq) / curio (Ci)
Exposición (X)	ionización en aire	C/kg / roentgen (R)
Dosis absorbida (D)	absorción de energía	gray (Gy) / rad
Dosis equivalente (H o DE)	efectividad biológica	sievert (Sv) / rem

Actividad ($\mathcal{A}$)

La actividad es el ritmo de desintegración. La actividad de una sustancia radiactiva no depende (ni informa) del tipo de radiación (α, β, γ, etc.) ni de su energía. Es simplemente una unidad de recuento. La unidad histórica es el curio. Su valor es Ci = 3, 7 × 10^{10} desintegraciones/s. En el sistema SI la unidad es el becquerel (recibe el nombre del descubridor de la radiactividad *H. Becquerel*). Su valor es, simplemente, Bq = 1 desintegración/s.

La actividad es una noción física ligada a la constante de desintegración λ. La masa de una sustancia radiactiva, M, y su actividad, A, son proporcionales (como ya se ha visto en 8.5):

$$\mathcal{A} = \lambda N = \lambda M \frac{\mathcal{N}_A}{A'} \qquad (8.21)$$

siendo N_A el número de Avogadro y A' el peso atómico de la sustancia (en gramos/mol, si M viene dada en gramos). Por lo tanto no es una buena unidad que sirva para comparar efectos biológicos de distintos tipos de desintegración de diferentes núcleos. Se denomina actividad *específica* de un isótopo a la actividad por unidad de masa; es decir,

$$\mathcal{A}_{esp} = \frac{\lambda N}{M} = \lambda \frac{\mathcal{N}_A}{A'} \qquad (8.22)$$

y se mide en Bq/kg, aunque se suele dar frecuentemente en Bq/g, porque el peso atómico A' es fácil que venga dado en g/mol.

Exposición X (a rayos X o γ)

La exposición mide la carga liberada por unidad de masa en el aire, es decir [Q/M] y la unidad en el sistema SI será culombio/kilogramo[C/kg]

En efecto, es bien sabido que las radiaciones ionizan en su paso a través de la materia. La ionización produce pares de cargas electrón-ión en la sustancia que atraviesan. La ionización está provocada por partículas cargadas. Los fotones y rayos X (partículas neutras) provocan ionización gracias a los tres tipos de interacción que tienen con los átomos de la materia, que acaban produciendo electrones y positrones. Estos son los conocidos:

- efecto fotoeléctrico, en el que un electrón del átomo es arrancado y se lleva toda la energía del fotón incidente (menos la de ligadura del electrón al átomo),
- efecto Compton, que es un choque elástico del fotón con un electrón del átomo como si el electrón estuviese libre,
- y la producción de pares $e^{\pm}$, que es el fenómeno de materialización de los fotones. Este proceso tiene, por supuesto, un umbral de energía $E_\gamma \geq 2m_e c^2$, y es el fenómeno dominante cuando se trata de fotones de alta energía.

El roentgen (R), es la unidad tradicional de exposición a rayos X; mide el poder ionizante, o sea la cantidad de rayos X (o γ) necesarios para crear una carga igual a 1 esu (la carga del electrón es $q_e = 4,8 \times 10^{-10}$ esu) en un cm^3 de aire en condiciones estándar de presión y temperatura (lo que se denomina STP y se refiere a una temperatura de 0°C y una

presión de 760 mm de Hg). La masa de un cm^3 de aire es $m_{aire} = 1,293 \times 10^{-3}$ g. Si se calcula la equivalencia entre roentgen y la unidad en el sistema SI [C/kg] se obtiene pues,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{0,001293}\ \mathrm{esu/g} = 2,58 \times 10^{-4}\ \mathrm{C/kg} \qquad (8.23)$$

Exposiciones ≤ 25 R son despreciables, pero > 600 R provocan muerte segura (en dos semanas).

Pero para estudiar los efectos biológicos de la radiación, el roentgen no es adecuado ya que se refiere a efectos de rayos X o γ en el aire.

Dosis absorbida, D

Se introduce para medir la energía depositada por unidad de masa. Se define como la energía depositada por cualquier radiación ionizante por unidad de masa de material irradiado. Los efectos que la radiación produce en una sustancia están determinados por la energía que dicha sustancia absorbe y podrán ser cuantificados con esta magnitud.

La dosis absorbida es el cociente:

$$D = \frac{dE_m}{dm} \qquad (8.24)$$

donde dE_m es la energía media impartida por la radiación ionizante a una masa dm. Se entiende como energía impartida la suma de la energía incidente (suma de las energías de las partículas ionizantes, cargadas o no, que llegan al volumen), menos la energía saliente (suma de las energías de todas las partículas, cargadas o no, que salen del volumen), más la suma de todos los cambios de masa en reposo de las núcleos y partículas que se producen en cualquier transformación nuclear dentro de ese volumen.

La unidad histórica de dosis es el rad = 100 erg/g; en el sistema SI, es el gray (Gy). La equivalencia es Gy = J/kg = 100 rad. También se tiene

Gy = 6, 24 × 10^{12} MeV/kg de energía depositada.

La relación entre la dosis absorbida y la exposición viene dada por la expresión:

$$D[\text{Gy}] = f \cdot X[\text{C/kg}] \tag{8.25}$$

La determinación del factor *f* requiere un conocimiento preciso del coeficiente de absorción másico del material estudiado y su dependencia con la energía de los rayos X o fotones. De una manera más aproximada, para convertir exposición en dosis, es decir convertir carga depositada en un material en energía depositada, hay que conocer $n_{\pm}$, el número de pares de iones ($e^{-}X^{+}$) creados por la radiación. La carga será $Q = n_{\pm}q_e$;siendo q_e la carga del electrón ($1{,}6\times10^{-19}$ C) y la energía se calculará $E = n_{\pm}w$, donde *w* es la energía necesaria para crear un par $e^{-}X^{+}$. Puede decirse que *w* es la energía media de ionización del medio. Queda claro que la relación entre energía y carga es $E = Qw/q_e$. En el caso del aire, *w* = 34 eV, con lo que puede calcularse que el factor *f* de la fórmula (8.25) vale *f* = 8, 8 mGy/R. Se ha encontrado, pues, que para el aire, la dosis absorbida correspondiente a 1 roentgen es:

$$\boxed{D(1\text{ R}) = 8,8\text{ mGy}} \tag{8.26}$$

Distintos materiales absorben de manera distinta la radiación. Se acaba de ver que para el aire la dosis debida a una exposición de 1 R es 8,8 mGy. Para el tejido animal, el factor *f* es una función del coeficiente de absorción másico del tejido, y depende de la energía y la composición del tejido. Por ejemplo, varía muy poco con la energía para el músculo. En el caso del tejido animal, la dosis absorbida debida a 1 R es 9,3 mGy.

El kerma, K

El kerma (acrónimo de *Kinetic Energy Released to Matter*), se utiliza

para caracterizar la energía depositada por partículas neutras y se define como el cociente:

$$K = \frac{dE_{tr}}{dm} \tag{8.27}$$

donde dE_{tr} es la suma de energías cinéticas iniciales de todas las partículas ionizantes cargadas producidas por partículas incidentes neutras en una masa *dm*. Su unidad también es el Gy.

Dosis equivalente, H o DE

Sin embargo, cada tipo de radiación produce efectos biológicos diferentes; la probabilidad de destrucción de células por cada radiación es distinta. Se puede afirmar que 1 rad de partículas α es más peligroso que 1 rad de partículas β ó γ. Se dice que tienen diferente *efectividad biológica relativa* (RBE). Esta se define como el cociente (dosis de la radiación)/(dosis de rayos X que produce el mismo efecto biológico). Pero esta comparación es muy difícil de realizar; por ello para cuantificarlo, se introduce el llamado factor de peso de la radiación, w_F. El factor de peso (a veces ha sido llamado factor de calidad) se calcula a partir de la energía depositada por unidad de recorrido (la fórmula de Bethe-Bloch). Depende de la energía y toma valores comprendidos entre 1 y 20 como puede verse en la tabla 8.6.

La dosis equivalente mide los efectos de la radiación sobre los seres vivientes. Su definición es:

$$H = w_F \times D$$

La unidad histórica es el rem (*roentgen equivalent man*). Se cumplirá la siguiente relación: [rem] = [w_F × rad]. En el sistema Internacional, la unidad utilizada es el sievert, [Sv] = [w_F × Gy], siendo Sv = 100 rem.

Tabla 8.6: Factores de peso, w_F, de la radiación.

radiación	w_F
X, γ, cualquier energía	1
e, μ, caulquier energía	1
n térmicos	5
n, p > 20 MeV	5
n de 2-20 MeV	10
n de 10-100 keV	10
n de 100 keV a 2 MeV	20
α y fragmentos	20

Tasa de dosis

La exposición a radiación gamma o X, la dosis absorbida y la dosis equivalente de cualquier radiación, se han definido independientemente del tiempo que ha podido durar la irradiación. Pero no es lo mismo absorber la dosis total de un rad, por ejemplo, en un minuto en un campo de radiación intenso, o en un año por estar en un campo de radiación débil.

Se hace necesario definir unas magnitudes que dependen del tiempo: las tasas. La tasa de exposición ($\dot{X}$), tasa de dosis (tanto absorbida, $\dot{D}$, como equivalente, $\dot{H}$) son la exposición o la dosis que recibirá en condiciones constantes, por unidad de tiempo.

Tasa de exposición para fuentes radiactivas

La tasa o ritmo de exposición está relacionada con la actividad, $\mathcal{A}$,

$$\dot{X} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \Gamma \frac{\mathcal{A}}{d^2} \qquad (8.28)$$

Γ : Constante específica de tasa de exposición γ de la fuente.

Los valores de Γ, en unidades $\left[\frac{R \cdot m^2}{h \cdot Ci}\right]$ van de 0,33 (^{137}Cs) a 1,33

(^{60}Co), y corresponden a los valores extremos que se dan en las fuentes γ más frecuentes. En la tabla siguiente aparecen los valores de la constante de tasa de exposición para algunos radionucleidos utilizados en gammagrafía.

Radioisótopo	Constante de tasa de exposición Γ (R · m^2/h · Ci)
^{22}Na	1, 2
^{60}Co	1, 33
^{137}Cs	0, 33
^{192}Ir	0, 47

Ejemplo: Calcular la dosis recibida cuando se está trabajando a 50 cm de una fuente de 100 μCi de ^{22}Na (β^+ con $t_{1/2}$ = 2, 6 años).

Se sabe (véase la tabla anterior) que la constante específica de la fuente de *Na* es Γ_{Na} = 1, 2 R · m^2/h · Ci. Entonces, según (8.28)

$$\dot{X} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = 1,2(\text{R m}^2/\text{h Ci})\frac{10^{-4}\ \text{Ci}}{0,5^2\ \text{m}^2} = 4,8 \times 10^{-4}\ \text{R/h} = 0,48\ \text{mR/h}$$

Recordando que el tejido humano absorbe aproximadamente 93 erg/g para 1 R de radiaci´on gamma, queda:

$$\dot{D} = \frac{D}{\Delta t} = f\frac{\Delta X}{\Delta t} = 93 \times 0,48\ \text{erg/g h} = 0,45\ \text{mrad/h} = 4,5\ \mu\text{Gy/h}$$

Para calcular las dosis de radiación hay que medir exposiciones y convertirlas en dosis, como se acaba de ver.

Una dosis de ~ 3 gray en todo el cuerpo es letal, produce la muerte en el 50 % de los casos. Sin embargo la media anual de dosis recibida por el hombre, por la radiactividad natural, está entre 0,4 y 4 mSv.

Para fotones de energía E_γ, la tasa de dosis absorbida, $\dot{D}_\gamma$, en un punto está relacionada con el flujo de fotones φ_γ, por la relación

$$\dot{D}_\gamma = \dot{\phi}_\gamma \left(\frac{\mu_a}{\rho} \right) E_\gamma \qquad (8.29)$$

donde (μ_a/ρ) representa el coeficiente másico de absorción del material para

Dosis equivalente efectiva

Una vez depositada la radiación en un órgano del cuerpo, hay que tener en cuenta el daño específico que produce esa radiación en esa parte del organismo, pues el daño biológico producido depende de la sensibilidad para la absorción de la sustancia radiactiva que presente un órgano determinado. Se define entonces la dosis equivalente efectiva como la media ponderada de la dosis equivalente recibida en distintos órganos. Se expresa

$$H_e = \sum_i w_i H_i \qquad (8.30)$$

siendo w_i el factor de ponderación para el órgano *i* frente al total. Y H_i la dosis equivalente recibida en el órgano *i.*

Ejemplo: Una persona ha sido expuesta a una dosis equivalente de 0,5 rem en el pecho y de 3,2 rem en el tiroides. Se sabe que el factor de ponderación para el tiroides es 0,03 y el del pecho 0,15 por lo que la dosis equivalente efectiva recibida es:

$$H_e = \sum_i w_i H_i = 0,03 \times 3,2 + 0,15 \times 0,5 = 0,171 \text{ rem}$$

8.9.4 Dosis recibidas

Dosis medias de origen natural

La tabla 8.7 resume la relación de dosis anuales medias que recibe una

persona por causas naturales, por la radiación del entorno (centrales nucleares, industrias, fuentes radiactivas) o por placas de rayos X.

Se ha determinado que la dosis anual que reciben las tripulaciones de los aviones es de 5 miliSievert. Recuérdese que la densidad de la atmósfera equivale a unos 4 metros de cemento y que si se viaja a 10 km de altura, la atmósfera remanente equivale ya a sólo un metro de cemento. A esa altura, la dosis es 150 veces mayor que a nivel del mar.

En la determinación de dosis debidas al radón se han llegado a medir hasta 5 mSv, aunque el valormedio es 1,2 mSv, como aparece en la tabla 8.7.

El $^{40}K(1,25 \times 10^{9}$ años), representa el $1,17 \times 10^{-4}$ del potasio natural. Es un electrolito crítico en la sangre. Puede estimarse que una persona de 70 kg., recibe una autodosis de 0,3 mSv/año sólo debido a los elementos radiactivos en su interior: ^{40}K y ^{14}C; casi un 10% de la dosis media natural. En efecto, se calcula que unos 8.000 átomos por segundo de ^{40}K y ^{14}C se desintegran en el interior del cuerpo humano.

Tabla 8.7: Dosis medias, de origen natural.

origen	mSv/año
placa rayos X, etc.	1,15
cósmicos	0,35
^{40}K, ^{14}C	0,30
^{222}Rn	1,20
Th + ^{226}Ra (corteza terrestre)	0,50
Total	3,50

Radiactividad natural nociva. El radón

El radón es el único gas que aparece en las cadenas radiactivas naturales (por ejemplo del ^{232}Th, ^{235}U y ^{238}U). Se calcula que unos 9.000 cánceres de pulmón/año en EEUU son debidos a la desintegración del Rn y sus hijos, acumulado en el interior de las casas. Se acumula sobre todo

en sótanos y edificios poco ventilados. Sólo el ^{222}Rn ($t_{1/2}$ = 3, 824 d) es importante; es el que proviene de la desintegración del ^{226}Ra($t_{1/2}$ = 1600 años) que decae ^{226}Ra → ^{222}Rn + α. Las desintegraciones son:

desintegración	$t_{1/2}$	T_α (MeV)	cadena
$^{222}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}\mathrm{Po} + \alpha,$	3,82 d,	5,49	^{238}U
$^{220}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{216}\mathrm{Po} + \alpha,$	55,6 s,	6,29	^{232}Th
$^{219}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{215}\mathrm{Po} + \alpha,$	3,96 s,	6,82	^{235}U

En un kg de suelo se producen unos 40 átomos de ^{222}Rn/s. La concentración del ^{226}Ra en el suelo es de 1 pCi/g, luego el Rn arroja una concentración media en el suelo[6] de 25-100 Bq/m^3, cantidad que puede llegar a ser un orden de magnitud superior en los sótanos poco ventilados de las viviendas. (1 Bq/m^3 = 0,027 pCi/ℓ). Se estima que la dosis inhalada a cielo abierto, debida al Rn es del orden de 0,10 a 0,20 mSv por año.

Dosis en aceleradores

A continuación se desarrolla un ejercicio en el que se trata de calcular el flujo de partículas que al irradiar un material, dan lugar a una dosis de 1 Gy. Se distinguirá entre partículas cargadas y fotones.

1. Partículas cargadas. Se pretende calcular el número *N* de partículas *mínimo ionizantes* (*mip*) por cm^2 en el carbono, que producen una dosis de 1 Gy.

1 Gy = 1 J/kg = 6,24×10^{12} MeV/kg $= \dfrac{6,24 \times 10^9}{N\langle dE/dx\rangle}\ \mathrm{cm}^{-2}$ → $N \approx 3,5 \times 10^9$ *mip* en carbono

2. Fotones. La dosis unitaria de radiación es $\varphi_\gamma \cdot E_\gamma \cdot \mu$, siendo φ_γ el flujo de fotones. Para calcularlo, suponiendo que el 100 % de la energía del fotón (alrededor de 1 MeV) ha sido convertida en ionización (pares

de cargas).

$$\phi_\gamma = \frac{6,24 \times 10^9}{E_\gamma \mu_E} \gamma/\mathrm{cm}^2 \approx 4 \times 10^{11} \gamma \text{ de 1 MeV en } {}^{12}\mathrm{C}$$
$$\mu_E(1 \text{ MeV}) \approx 3,1 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}.$$

La conclusión es que, como consecuencia del bombardeo de un blanco de carbono por un haz de partículas de un acelerador, al cabo de un flujo total de

- $\sim 3,5 \times 10^9$ partículas cargadas,
- $\sim 4 \times 10^{11}$ fotones de 1 MeV

el blanco en cuestión ha recibido una dosis de 1 Gy.

8.9.5 Límites de dosis

El comité internacional ICRP es el que establece los valores máximos recomendados de dosis recibidas por la población. La tabla 8.8 muestra los límites de dosis recomendados. Según el ICRP, las dosis anuales, para público en general, permitidas oscilan entre 5 mSv (gónadas, huesos) y 50 mSv (pies, manos) por año; alrededor de 10 veces superior a la cantidad aproximada que recibe en promedio el cuerpo humano debido al fondo natural (0,4 a 4 mSv, es decir, de 40 a 400 mrem) que se han visto en la tabla 8.7. La dosis anual media de origen natural en España es de unos 3,5 mSv. La dosis letal (50 % de probabilidad de muerte en 30 días) es de 1 a 3 Sv. En Hiroshima y Nagasaki tras la explosión de sendas bombas atómicas en la segunda guerra mundial, se recibieron dosis superiores a 1 Sv.

Habitualmente se distingue entre dosis altas ($\geq$ 1 Sv) que son muy destructivas (leucocitos de la sangre, células intestinales, médula) y si se reciben en poco tiempo (algunas horas) pueden causar la muerte, y dosis

bajas. Para estas últimas es muy difícil fijar un umbral de peligro. Los efectos parece ser que son proporcionales a la dosis total integrada.

Límites de dosis para las personas profesionalmente expuestas

En las recomendaciones de 1976, y con el fin de controlar la incidencia de efectos estocásticos, se establecieron límites correspondientes a la dosis equivalente efectiva. Para ello se estimó que podía considerarse aceptable, tanto en la industria nuclear, y en general para todo trabajo en presencia de radiaciones ionizantes, un riesgo equivalente al existente en aquellas industrias o trabajos que poseen el más elevado índice de seguridad. Para este tipo de industrias o trabajos, el promedio de mortalidad anual derivado del trabajo se encuentra en el orden de 10^{-4}, es decir que puedemorir una persona entre 10.000. Por tanto, tomando este valor de riesgo como referencia, la probabilidad media de muerte a causa de inducción de tumores malignos no debía sobrepasar ese índice de 10^{-4} y que para los máximamente expuestos no debería ser superior a 10^{-3}.

A partir de los factores de riesgo que entonces se habían determinado se llegóa la conclusión de que una dosis efectiva no superior a 5 mSv por año implicaría un riesgo del orden de 10^{-4} para la mortalidad por cáncer.

La dosis limitativa se puede expresar como una dosis recibida uniformemente a lo largo de toda la vida laboral, o como una dosis anual recibida cada año de trabajo.

El establecimiento de un límite para la exposición de 50 mSv por año, daba lugar, considerando la experiencia de los años anteriores con distintos grupos de personas profesionalmente expuestas, a un valor de la media aritmética de dosis recibidas inferiores a 5 mSv por año.

Para la prevención de “efectos deterministas”, los límites se establecieron en función de las dosis umbrales para los efectos no estocásticos, estableciendo un límite de dosis equivalente anual de 0,5 Sv para cualquier órgano, con excepción de las cataratas del cristalino, para las que se recomendó un límite anual de 0,15 Sv.

Estos límites se consideraban válidos tanto para la irradiación de un sólo tejido u órgano como para la del conjunto de ellos, si su incidencia en la dosis efectiva no sobrepasa el límite para ésta y tenían por objeto limitar las irradiaciones que ya cumplían la limitación correspondiente a los efectos estocásticos.

Límites de dosis para el público

Haciendo consideraciones análogas a las efectuadas para establecer los riesgos de las personas profesionalmente expuestas, el ICRP asumió que un nivel de riesgo de mortalidad del orden de 10^{-6} a10^{-5} por año, podría ser aceptable para el caso del público. En consecuencia recomendó para cualquier individuo un límite anual de dosis de 5 mSv, siempre y cuando a lo largo de la vida, la dosis acumulada no fuese superior a 70 mSv. Este criterio fue posteriormente modificado, en 1985, para recomendar un límite de dosis, para exposiciones prolongadas, de 1 mSv por año, aceptando que algunos años pudieran recibirse 5mSv siempre y cuando la dosis a los 70 años no fuese superior a 70 mSv. Estos límites deben aplicarse a todas las exposiciones, sujetas al sistema de protección, a que puedan verse sometidos los individuos como consecuencia de todas las actividades en que se vean implicados y supongan un riesgo de exposición a las radiaciones ionizantes. Se excluyen especialmente las exposiciones médicas (como paciente) y en el caso del público la exposición a la radiación natural.

Las dosis anuales permitidas para los profesionales y trabajadores de instalaciones radiactivas son un factor 10 superior a los límites de la tabla 8.8, excepto para jóvenes en donde sólo se multiplica por 3.

La legislación vigente en España está publicada en el Boletín Oficial del Estado (BOE 178 del 26 de julio de 2001), y objeto del Real Decreto 783/2001 de 6 de julio que contiene el Reglamento sobre protección sanitaria contra radiaciones ionizantes.

Tabla 8.8: Límites anuales de dosis permitidas para el público en general, establecidos por el comitéICRP.

LÍMITES ANUALES DE DOSIS (ICRP-26 1977)			
Tejido u órgano	Personal	Dosis	Límite recomendado
Todos excepto cristalino	Profesionalmente expuesto	Equivalente	0,5 Sv (50 rem)
Cristalino	Profesionalmente expuesto	Equivalente	0,15 Sv (15 rem)
Totalidad organismo uniformemente o a determinados órganos o tejidos	Profesionalmente expuesto	Equivalente efectiva	50 mSv (5 rem)
Totalidad organismo uniformemente o a determinados órganos o tejidos	Individuos del público en general	Equivalente efectiva	5 mSv (0,5 rem)
Cualquiera incluidos piel y cristalino	Individuos del público en general	Equivalente	50 mSv (5 rem)

8.10 Sistema de limitación de dosis

El sistema de limitación de dosis está basado en tres criterios u objetivos parciales fundamentales:

1) Justificación.

2) Optimización.

3) Limitación de dosis individual.

8.10.1 Justificación

La justificación de una nueva práctica o modificación de una antigua debe basarse en un análisis coste-beneficio, con el fin de comprobar que el conjunto de perjuicios resultantes es compensado por los beneficios derivados de la misma. El conjunto de perjuicios que constituye el detrimento total, comprende todos los costes y aspectos negativos de la

actividad propuesta.

El proceso de justificación puede representarse esquemáticamente por la expresión

$$B = V - (P + X + Y) \tag{8.31}$$

donde:

- B es el beneficio neto resultante de la actividad.
- V es el valor bruto de la actividad, que incluye el valor del producto resultante, el de los beneficios sociales tangibles y no tangibles y los beneficios de cualquier otra índole.
- P representa los costes de producción, incluidos los costes para la sociedad de los detrimentos no radiológicos y los costes de protección contra los riesgos radiológicos.
- X es el coste de la protección radiológica.
- Y es el coste para la sociedad del detrimento radiológico, que es proporcional a la dosis efectiva colectiva, S_E.

8.10.2 Optimización

El objetivo principal de la optimización es consecuente con la idea de que cualquier dosis implica un riesgo; por lo tanto hay que mantener todas las exposiciones "tan bajas como sea razonablemente posible" ALARA (As Low As Reasonably Achievable) teniendo en cuenta las condiciones socioeconómicas aplicables.

El valor ALARA corresponde al nivel de dosis efectiva colectiva por debajo del cual el coste de cualquier medida adicional de protección radiológica sería mayor que el valor de la reducción del detrimento para la salud que con ella se conseguiría. Este criterio se ha venido

denominando como optimización de la protección radiológica.

La determinación del nivel más bajo de exposición que puede alcanzarse razonablemente puede realizarse por distintas técnicas. Una de ellas es el análisis diferencial de coste-beneficio con el fin de obtener la combinación óptima de protección adecuada y coste bajo del detrimento. Esta técnica es aplicable sólo cuando los integrantes de la función pueden ser cuantificados en términos de coste monetario.

La protección radiológica podráser optimizada cuando la suma del coste de la protección, *X*, y del detrimento radiológico para la salud, *Y*, sea mínima. La optimización de la protección radiológica debe efectuarse tanto en el diseño como en la ejecución de toda operación justificable que pueda contribuir de manera significativa a la irradiación de los profesionales y el público.

8.10.3 Limitación de dosis individual

Para poder desarrollar un sistema de protección radiológica se precisa un conocimiento cuantitativo de cómo la probabilidad de los efectos estocásticos y la gravedad de los efectos deterministas varían con la dosis. Sin embargo la ausencia de datos epidemiológicos, sobre todo a dosis y tasas de dosis bajas, hace necesario asumir toda una serie de suposiciones para poder llegar a establecer las curvas dosis-respuesta.

La relación que mejor se ajusta a los datos epidemiológicos disponibles de los efectos estocásticos es la lineal-cuadrática. Para dosis de radiación bajas resulta muy improbable que el núcleo de una célula sea atravesado por más de una partícula ionizante, por lo que la curva dosis-respuesta para efectos en una célula debería ser lineal e independiente de la tasa de dosis. Luego, bajo las suposiciones mencionadas, la relación matemática entre la dosis recibida y la probabilidad de aparición de un efecto atribuible a la radiación, por ejemplo, la generación de cánceres, está casi bligada a ser lineal y a no tener un umbral de dosis. Así, para estimar la probabilidad de los efectos

de la exposición a dosis bajas de radiación con propósitos de protección radiológica, se usa la expresión:

$$P = \beta D$$

donde D es la dosis y β la pendiente de la curva, es decir la probabilidad del efecto considerado por unidad de dosis.

La limitación de dosis que las personas profesionalmente expuestas y las del público en general, puedan recibir, es el requisito establecido para asegurar una protección adecuada, incluso para las que están más expuestas. Los límites recomendados representan los valores inferiores de la dosis efectiva y de la dosis equivalente que no deben ser sobrepasados en las circunstancias en que las personas se vean implicadas durante la realización de las distintas prácticas con radiaciones.

Es importante tener en cuenta que los límites de dosis no deben ser considerados como la línea divisoria entre la seguridad y el peligro y que han de ser realmente considerados como la exposición a un riesgo aceptable.

8.11 Medidas de protección

La dosis de radiación recibida por una persona que permanezca en las proximidades de una fuente de radiaciones ionizantes, depende de tres factores fundamentales:

- Tiempo de permanencia.
- Distancia entre la fuente y la persona.
- Blindaje interpuesto entre ambos.

La dosis acumulada por el individuo al permanecer un tiempo t en las proximidades de una fuente es (recordando la definición de tasa de dosis)

$$D = \dot{D} \cdot t \tag{8.32}$$

por lo que, evidentemente, es conveniente estar el menor tiempo posible.

La radiación γ o rayos X, considerando la fuente de emisión puntual, se propaga en el espacio siguiendo la conocida ley de proporción inversa al cuadrado de la distancia

$$D \sim \frac{1}{d^2} \tag{8.33}$$

Según esto, al alejarse de la fuente, la intensidad de radiación disminuye en la misma proporción y viene expresado por

$$\frac{D(d_1)}{D(d_2)} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \tag{8.34}$$

Se observa con esto que la dosis recibida en un mismo intervalo de tiempo a un metro de la fuente disminuirá a 1/4, al alejarse a 2 metros, como puede comprobarse viendo la ecuación (8.34).

En el caso de la radiación α o β, hay que tener en cuenta su alcancelimitado en aire, que depende de su energía umbral.

8.11.1 Blindajes

Existen casos en los que no se puede reducir el tiempo de permanencia y la distancia de operación. Entonces se recurre a poner un blindaje.

El blindaje interpuesto entre la fuente y el individuo es un material absorbente de las radiaciones ionizantes de que se trate, con la finalidad de tener a la salida una disminución adecuada de la radiación.

Según el tipo de radiación y la energía de la fuente se pueden clasificar los blindajes en tres grupos:

- Para radiación directamente ionizante (partículas cargadas, α,

β...).

- Para radiación γ y rayos X.
- Para neutrones.

Blindajes para partículas cargadas

Los blindajes para partículas α no ofrecen problemas especiales debido a su corto alcance. Basta con conocer el alcance de la partícula para esa energía en ese material y aumentar ligeramente el espesor de material.

Para partículas β aparece el problema de la existencia de la radiación de frenado, que hay que tener en cuenta a la hora de diseñar el blindaje correspondiente, pero el alcance de los electrones es corto, del orden del metro en aire. Un blindaje adecuado en este caso sería una capa de absorbente de número atómico bajo (plástico o aluminio) para minimizar el efecto de la radiación de frenado (recuérdese que es proporcional Z), seguido de una capa fina de plomo para atenuar la radiación de frenado producida en el primer absorbente.

Blindajes para radiación gamma y rayos X

En el estudio de los blindajes para radiación gamma y rayos X, es necesario tener en cuenta diversos factores: naturaleza y forma de la fuente emisora, la energía de emisión y el flujo que se quiere obtener al otro lado del blindaje.

Para hacer un cálculo sencillo, se puede considerar que la fuente es puntual emitiendo S fotones/s y se le interpone un absorbente de espesor r, con coeficiente de absorción μ. Resulta que a la salida del absorbente el flujo será

$$\phi = S\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2} \qquad (8.35)$$

donde el numerador representa la atenuación sufrida al atravesar el espesor r.

Este flujo de radiación se puede medir en magnitudes útiles en dosimetría, como la tasa de dosis, haciendo los cambios de unidades correspondientes.

Al deducir esta sencilla expresión, no se ha considerado el hecho de que los fotones en su recorrido en el material sufren no sólo absorción sino que también pueden sufrir colisiones dispersivas (Compton, creación de pares) y como consecuencia se puede producir radiación en otras direcciones. Se dice que se produce un efecto de acumulación. Para contabilizar este efecto, se introduce otro término en la ecuación (8.35) llamado "factor de acumulación" B_p y que considera el incremento de radiación producido. El término $B_p(\mu, r)$ depende del recorrido del fotón en el material y del coeficiente de atenuación μ. Por lo que queda finalmente:

$$\dot{\phi} = S \cdot B_p(\mu, r) \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2}$$

Los factores de acumulación están tabulados para diferentes materiales y energías.

Blindajes para neutrones

Para atenuar la radiación neutrónica se utilizarán blindajes de distintos materiales. Para estimar su tamaño se tiene en cuenta las propiedades de interacción de los neutrones con la materia, que varían en función de la energía.

Los neutrones rápidos (muy energéticos) se moderan en colisiones elásticas con materiales ligeros (Z bajo). Los neutrones térmicos (baja energía) pueden ser absorbidos en materiales con alta sección eficaz de absorción (boro, cadmio).

El blindaje para neutrones debe cumplir dos misiones: la primera, rebajar la energía de los neutrones hasta alcanzar el equilibrio térmico y

la segunda, absorberlos una vez termalizados.

Generalmente los neutrones se producen a diferentes energías y además, suelen ir acompañados de radiación γ. Un completo blindaje para neutrones sería el siguiente:

- Un espesor de material hidrogenoide (bajo Z) para moderarlos hasta térmicos
- Un espesor de Cd o B, para absorberlos.
- Un espesor de alto Z (Pb) para detener la radiación γ, que acompaña a los neutrones.

8.12 Problemas

8.1 Desintegración radiactiva

Un elemento radiactivo A decae a otro B que a su vez decae a un tercero C. El elemento A tiene una constante de desintegración λ_A y el B λ_B, siendo C estable. Inicialmente la muestra contiene una mezcla de los tres elementos A, B y C. Se pide:

a) Obtener las ecuaciones de evolución temporal para la cantidad de átomos de los tres isótopos. Aplicar al caso en el que en el estado inicial sólo haya una cierta cantidad del isótopo A. Calcular la suma de las poblaciones de los tres isótopos $N_A + N_B + N_C$ y discutir el resultado.

b) Encontrar una expresión que proporcione el tiempo para el cual la cantidad de B es máxima.

c) Aplicar el resultado anterior para el final de la serie radiactiva del uranio que se muestra en la figura 8.6 sabiendo que en $t = 0$ sólo se dispone de ^{210}Bi puro. Estudiar el tipo de equilibrio que tendrá lugar en cada caso.

8.2 Actividad y equilibrio radiactivo

Una muestra contiene inicialmente 10 mg de calcio (^{47}Ca) puro. Se pide:

a) Encontrar su actividad inicial.

b) Obtener la actividad de la muestra después de transcurridos dos días.

c) Estudiar el tipo de equilibrio que se alcanza y encontrar el tiempo para el cual la actividad del producto formado a partir del calcio es máxima.

Datos: $t_{1/2}(^{47}\text{Ca}) = 4{,}54$ d y $t_{1/2}(^{47}\text{Sc}) = 3{,}35$ d.

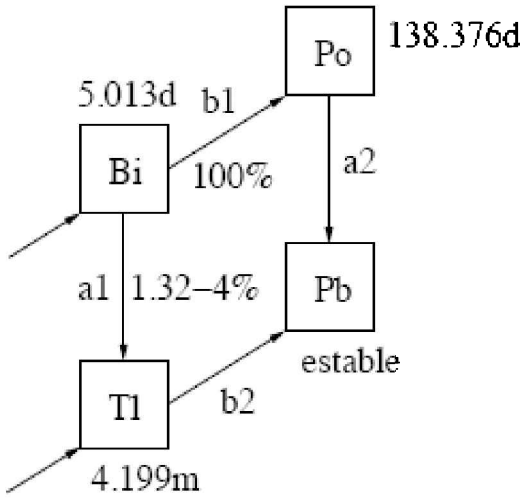


Figura 8.6: Esquema de desintegración correspondiente al final de la serie radiactiva del uranio (véase también la tabla 8.9) donde se muestran las dos ramas del bismuto ^{210}Bi.

8.3 Equilibrio secular

La condición de equilibrio secular en una cadena de desintegraciones radiactivas puede también definirse por la condición:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{N_3}{N_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{N_4}{N_3}\right) = \ldots = 0$$

Si se asume que $\lambda_1 \ll \lambda_2$, λ_3, .., mostrar que esta condición conduce directamente a que:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \ldots$$

¿Qué le ocurre al estado final de la serie?

8.4 Equilibrio en una serie radiactiva

Un isótopo radiactivo tiene un semiperíodo de $t_{1/2} = 10^4$ años y decae, por medio de una cadena de desintegraciones radiactivas, a un isótopo final que es estable. De entre todos los productos de la desintegración el elemento con el semiperíodo más alto es de 20 años mientras que el resto tienen todos un semiperíodo inferior a un año. Se pide:

a) Calcular la actividad inicial del primer isótopo radiactivo si se parte de una población total de 10^{20} núcleos.

b) Calcular el tiempo necesario para que la población del isótopo cuyo semiperíodo es de 20 años alcance aproximadamente el 97 % de su valor de equilibrio.

c) Obtener la población del isótopo de semiperíodo de 20 años después de 10^4 años si se supone que ninguno del resto de isótopos de la serie que conducen a este elemento tiene más de una forma de desintegrarse.

d) Si el isótopo de semiperíodo de 20 años se desintegra por emisión α (99,5%) y β (0,5%), calcular su actividad β al cabo de 10^4 años.

e) Estudiar la forma con la que alcanzarán el equilibrio aquellos isótopos radiactivos resultado de las desintegraciones de la serie con respecto al isótopo de semiperíodo de 20 años.

8.5 Datación geológica por el método K–Ar

a) Calcular el período de semidesintegración del ^{40}K a partir de los siguientes datos:

- El potasio natural está formado por los isótopos A = 39, 40 y 41 en proporciones de 0,933, 1,19 × 10^{-4} y 0,067, respectivamente (proporciones dadas en número de átomos). Los isótopos A = 39 y 41 son estables.
- Un gramo de potasio natural tiene una actividad correspondiente a la desintegración β de 31 Bq.
- Un gramo de potasio natural emite 3,4 γ por segundo.

b) La emisión γ del apartado anterior acompaña a la desintegración por captura (véase el esquema de la figura 8.7). ¿Cómo se podría verificar experimentalmente que el proceso de captura correspondiente a la línea a trazos visible en el esquema de la figura 8.7 no tiene lugar?

c) ¿Cuál es la edad de un mineral de potasio en el que se han acumulado 1,54 × 10^{-2} cm^3 de ^{40}Ar por gramo de potasio? (volumen medido en condiciones normales).

d) Calcular la actividad proveniente del cuerpo humano si se sabe que contiene aproximadamente 2g de potasio por kg y si se supone que el ^{40}K es la única fuente de su radiactividad. Obtener también la dosis efectiva recibida durante un año.

Datos: ρ(Ar) = 1,78 × 10^{-3} g/cm^3 en condiciones normales de presión y temperatura. Coeficiente de absorción másico y densidad del tejido humano: $\bar{\mu}$ = 5,701 × 10^{-2} cm^2/g y ρ = 1,06 g/cm^3, respectivamente. Véase la figura 8.8–(b) para la curva del alcance de electrones en función de su energía.

8.6 Amplificador de energía

a) El isótopo radiactivo ^{233}Pa ($t_{1/2}$ = 27,0 d) se puede producir

como

consecuencia de un proceso de captura de un neutrónpor parte del ^{232}Th. El ^{233}Th se desintegra a ^{233}Pa con una semivida de 22,3 min. La tasa de producción de ^{233}Th mediante captura neutrónica con un flujo de neutrones en un reactor típico de fisión es de 2,0 × 10^{11} s^{-1} por cada gramo de ^{232}Th. Se pide:

b) Calcular las actividades del ^{233}Th y del ^{233}Pa al cabo de una hora de irradiación.

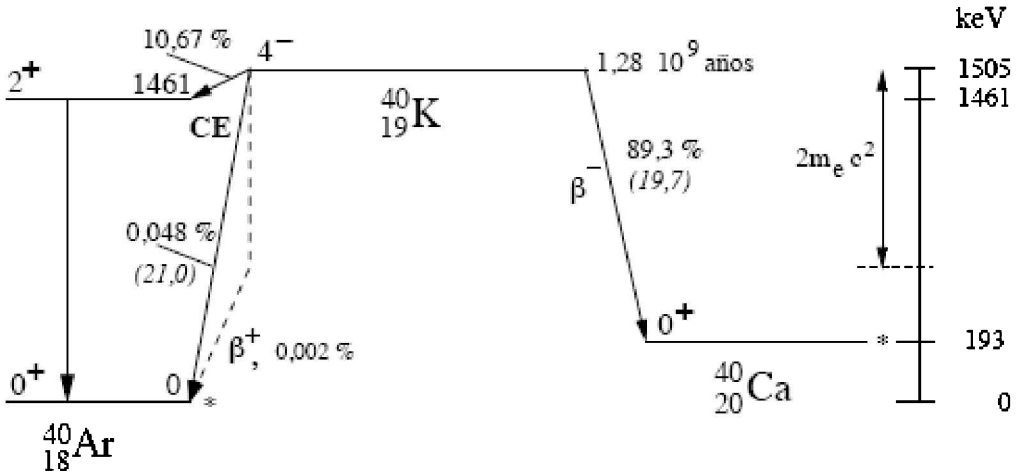


Figura 8.7: Esquema de desintegración del ^{40}K. Todos los valores de energías se dan en keV.

c) Transcurrida una hora de irradiación, la muestra es retirada y almacenada durante 24 horas. Calcular las actividades debidas a los isótopos ^{233}Th y ^{233}Pa al cabo de este tiempo.

d) Como resultado de la desintegración del ^{233}Pa se produce ^{233}U, que a su vez es radiactivo ($t_{1/2}$ = 1,6 × 10^5 años). Si la muestra obtenida anteriormente se almacena durante un año, ¿cuál será la actividad del ^{233}U? (no es necesario establecer una nueva ecuación diferencial para obtener la actividad del ^{233}U).

e) Obtener de forma explícita la evolución temporal de la

población y actividad del ^{233}U.

8.7 Datación arqueológica por el método del ^{14}C

El método de cálculo de la edad de un determinado material mediante el ^{14}C se basa en la suposición de que la proporción de ^{12}C a ^{14}C se ha mantenido constante en la atmósfera durante cientos de años (con una razón de 10^{12}). Si el semiperíodo del ^{14}C es $t_{1/2}$ = 5730 años, se pide:

a) Una muestra de un trozo de madera de edad desconocida se quema de modo que se obtiene carbono puro, encontrándose que un gramo de este carbón tiene una actividad de 3 pCi/g. Determinar la edad de la muestra.

b) Estimar la edad de otra muestra de madera si se sabe que su actividad es 1/3 de la de un árbol del mismo tipo de madera.

8.8 Activación neutrónica y producción de radioisótopos

Una lámina de oro de 0,02 cm de espesor es irradiada durante 5 minutos por un haz de neutrones térmicos cuyo flujo es de 10^{12} cm^{-2} s^{-1}. La sección eficaz de la reacción $^{197}Au(n, \gamma)^{198}Au$ es de $97{,}8 \times 10^{-24}$ cm^2. Si se supone que la abundancia isotópica del oro natural es un 100 % para el ^{197}Au, cuya densidad es 19,3 g/cm^3, se pide:

a) Calcular la población y actividad del ^{198}Au al acabar la irradiación y a los 3 días después de la irradiación. $t_{1/2}(^{198}Au)$ = 2,7 días.

b) Si la irradiación es contínua, obtener la cantidad y actividad máxima de ^{198}Au que se produce en la lámina y el instante en que ocurrirá.

c) Calcular el tiempo durante el cual debe ser irradiada la lámina para alcanzar 2/3 de su actividad máxima.

d) Calcular el número de átomos de ^{198}Hg al cabo de 10 días de irradiación si se supone que el haz de neutrones no afecta estos

núcleos. ¿Qué cantidad máxima de mercurio se obtendrá bajo irradiación constante?

8.9 Actividad por activación neutrónica

Una fuente radiactiva de ^{24}Na con un semiperíodo de desintegración $t_{1/2}$ = 15 horas se prepara bombardeando 500 g de NaF con neutrones térmicos. La velocidad de producción de ^{24}Na es de 50 Ci g^{-1}.¿Cuál es la máxima actividad alcanzable y qué fracción del total de átomos de sodio resulta radiactiva? ¿Qué valor alcanza la actividad tras un tiempo de irradiación de $t = nt_{1/2}$?

8.10 Dosis efectiva

a) Alrededor del 18 % del peso del cuerpo humano se debe al carbón, del cual una pequeña parte corresponde al isótopo inestable ^{14}C que es un emisor β. Aproximadamente un tercio de la energía de desintegración (0,156 MeV) se la lleva el electrón, no habiendo radiación γ asociada. La actividad de un gramo de carbón natural es de 15,3 desintegraciones por minuto. Estimar la dosis anual que recibe el cuerpo humano debido a esta fuente radiactiva.

b) Calcular la cantidad de ^{210}Po ($t_{1/2}$ = 138,39 días) necesaria para conseguir una dosis efectiva letal en una persona a lo largo de un día. El ^{210}Po es un emisor α con una energía de E_α = 5,3 MeV y el alcance de las partículas α en función de la energía puede verse en la figura 8.8–(a).

8.11 Actividad de los productos de fisión

a) Considerar los siguientes tipos de combustible para un reactor nuclear de fisión: ^{235}U puro, U enriquecido al 3,2% (fracción en peso) en ^{235}U, U natural y UO_2 enriquecido también en peso al 3%. Calcular, para cada caso:

- La energía producida por unidad de masa (kg) debido a

la fisión del ^{235}U.

- La energía producida por tonelada de combustible (en GWd/t).
- Toneladas de combustible necasarias para producir una enería eléctrica de 1 GWa (e) (gigavatio–año eléctrico) suponiendo una eficiencia de conversión térmica del 32 %.

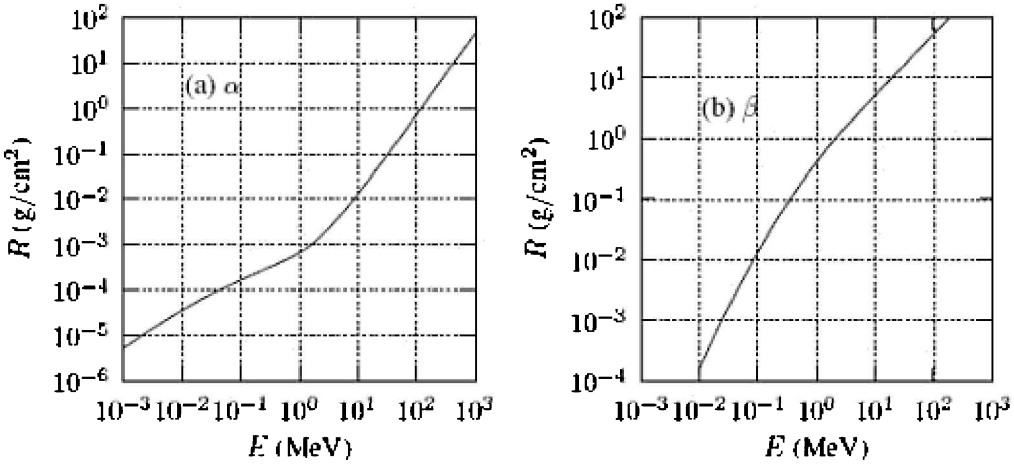


Figura 8.8: Curva del alcance R (en g/cm^2) en función de la energía E (MeV) para (a) partículas α y (b) electrones.

b) El reactor de Cofrentes (Comunidad Valenciana), del tipo BWR (Boiling Water Reactor) o de agua en ebullición, proporciona una potencia eléctrica de aproximadamente 1 GWe con una eficiencia térmica de 1/3. Si el combustible del reactor es dióxido de uranio (UO_2) enriquecido con una fracción en peso del 3% en ^{235}U calcular la cantidad consumida de combustible al año.

c) Calcular el flujo de neutrones necesario para mantener el reactor funcionando a la potencia nominal.

d) En la fisión del ^{235}U un 4,5% de los productos de fisión

resulta en ^{133}Sb el cual da lugar a la cadena radiactiva de emisores β^- que acaba en el ^{133}Cs y que se muestra en la figura 8.9. Calcular las cantidades de los diferentes isótopos de la serie, sus actividades y la actividad total al cabo de una hora y un año de operación del reactor.

e) Durante la operación del reactor, además de los productos de fisión del ^{235}U se forma plutonio y otros actínidos transuránidos inestables por captura neutrónica. Calcular la cantidad y actividad de ^{239}Pu al cabo de un año de irradiación. Suponer que el ^{239}Pu se forma principalmente por captura neutrónica de ^{238}U de acuerdo con los datos de la figura 8.9.

f) Una vez consumido el combustible nuclear el material agotado está formado principalmente por ^{238}U, productos de fisión, plutonio y otros actínidos transuránidos. El combustible gastado se almacena entonces en piscinas adyacentes al reactor que contienen 5×10^3 m^3 de agua. Si se supone las piscinas como sistemas térmicos aislados (de forma que las pérdidas por radiación, convección y evaporación son despreciables frente al calor total de desintegración), calcular el incremento de temperatura al cabo de un año debido a la cadena radiactiva del uranio (ver tabla 8.9). Estimar también la contribución del ^{133}Sb y del ^{239}Pu a dicho calentamiento.

Datos: composición isotópica del uranio natural: ^{235}U (0,71 %) y ^{238}U (99,29 %). $M(^{235}\text{U}) = 235{,}04$ u, $M(^{238}\text{U}) = 238{,}0508$ u. Calor específico del agua $c = 4{,}179$ J/(g° C). $\rho\text{H}_2\text{O} = 1\text{g/cm}^3$.

Tabla 8.9: Serie radiativa del uranio ^{238}U (o serie del radio). Sólo se muestran las desintegraciones parciales dominantes.

Isótopo	Modo de desintegración	Semiperíodo	Energía de desintegración (MeV)	Producto de desintegración
$^{238}_{92}$U	α	$4{,}47 \times 10^9$ años	4,270	$^{234}_{90}$Th
$^{234}_{90}$Th	β^-	24,07 días	0,273	$^{234}_{91}$Pa
$^{234}_{91}$Pa	β^-	6.67 horas	2,195	$^{234}_{92}$U
$^{234}_{92}$U	α	$2{,}46 \times 10^5$ años	4,858	$^{230}_{90}$Th
$^{230}_{90}$Th	α	$7{,}54 \times 10^4$ años	4,770	$^{226}_{88}$Ra
$^{226}_{88}$Ra	α	$1{,}59 \times 10^3$ años	4,870	$^{222}_{86}$Rn
$^{222}_{86}$Rn	α	3,82 días	5,590	$^{218}_{84}$Po
$^{218}_{84}$Po	α (99,98 %) β^- (0,02 %)	3.167 min	6,115 0.260	$^{214}_{82}$Pb $^{218}_{85}$At
$^{214}_{82}$Pb	β^-	26,83 min	1.019	$^{214}_{83}$Bi
$^{214}_{83}$Bi	β^- (99,976 %) α (0,021 %) β^- (0,003 %)	19,833 min	3,270 5.621 11.103	$^{214}_{84}$Po $^{210}_{81}$Tl $^{210}_{82}$Pb
$^{214}_{84}$Po	α	164,3 µs	7.833	$^{210}_{82}$Pb
$^{210}_{82}$Pb	β^-	22,23 años	0,065	$^{210}_{83}$Bi
$^{210}_{83}$Bi	β^- (99.99987 %) α (0.00013 %)	5,013 días	1.161 5.036	$^{210}_{84}$Po $^{206}_{81}$Tl
$^{210}_{84}$Po	α	138,376 días	5,407	$^{206}_{82}$Pb
$^{206}_{82}$Pb	estable			

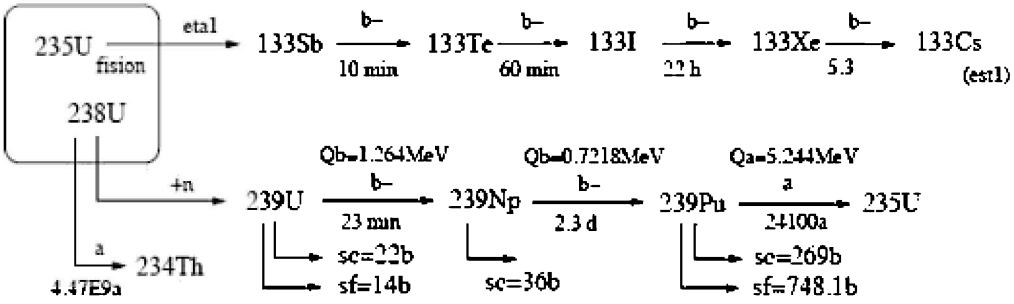


Figura 8.9: Cadena radiactiva para la serie del ^{133}Sb resultado de la fisión del

^{235}U (rendimiento de fisión γ = 4,5%) y formación de ^{239}Pu por captura neutrónica del ^{238}U. Las energías en MeV refieren a las energías de desintegración Q_{β^-} y Q_{α}.

---

[1]H. Becquerel, *Comptes Rendus*, 122 (1896) 501.

[2]Pierre et Marie Curie, *Comptes Rendus*, 127 (1898) 175; 127 (1898) 1215.

[3]E. Rutherford, F. Soddy, *Phil. Mag*, 4 (1902) 370; 5 (1903) 576.

[4]Véase el tema 7 dedicado a métodos estadísticos

[5]C. C. Patterson; Geochimica et Cosmochimica Acta 10, (1956) 230-237

[6]W. J. Makofske, M. R. Edelstein, *Radon and the environment*, Noyes Pub., N. Y.,1988.

9. Teoría de las desintegraciones α

9.1 Propiedades generales de la desintegración α

Rutherford (1903), midiendo el cociente q/m en campos electromagnéticos $\vec{B}$ y $\vec{\mathcal{E}}$, fue el primero en identificar la naturaleza de las partículas α (núcleos de He) emitidas por el radio. Este descubrimiento fue confirmado en 1909 cuando se encontraron indicios de gas helio en la cámara del detector que contenía la fuente radiactiva de Ra.

La partícula α, cuya masa es[1] $m_\alpha c^2$ = 3727, 379 MeV, puede existir como tal en el núcleo (cosa que no sucede con los electrones y fotones en el caso de las desintegraciones β y γ). La gran energía de ligadura ($E_L(\alpha)$ = 28 MeV), del también llamado *cluster* α, origina que la mayoría de los núcleos con $A > 190$ sean energéticamente inestables respecto a la emisión espontánea de partículas α (hecho que también puede tener lugar para algunos núcleos con $150 < A < 190$). Para que sea observable experimentalmente una desintegración α es necesario que:

- la semivida sea detectable ($t_{1/2} < 10^{16}$ años.)
- sea más probable que otros procesos, como el de la desintegración β.

9.1.1 Balance energético

La conservación de la energía en el proceso:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + \alpha \qquad (9.1) $$

suponiendo que el núcleo *padre* $({}^{A}_{Z}X)$ está en reposo, da lugar a:

$$ m_X c^2 = m_{X'} c^2 + m_\alpha c^2 + T_{X'} + T_\alpha \qquad (9.2) $$

Para que la desintegración sea posible, el valor Q de la reacción:

$$ Q_\alpha = (m_X - m_{X'} - m_\alpha)c^2 = T_{X'} + T_\alpha \qquad (9.3) $$

debe ser $Q_\alpha > 0$.

Teniendo en cuenta la conservación del momento lineal, $p_\alpha = p_X'$, y como la energía cinética puede tomarse no relativista, $T = p^2/2m$, queda para la partícula α:

$$ \boxed{T_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{X'}}}} \qquad (9.4) $$

lo que para núcleos hijo con número másico $A' = A - 4 \sim 200$ implica que $T_\alpha \approx Q_\alpha(1 - m_\alpha/m_X') \approx Q_\alpha(1 - 4/A')$ es el 98 % de Q. La energía de retroceso del núcleo hijo es baja ($T_X' \sim 100$ keV), pero es superior a su energía de ligadura en un cristal o en un sólido; de forma que puede ser arrancado de su posición en el sólido. Una partícula α de una determinada desintegración siempre tiene la misma energía. La medida de T_α en espectrómetros, permite determinar Q_α y por lo tanto medir masas atómicas. En efecto, $Q_\alpha = T_\alpha M_X/M_X'$.

La gran energía de ligadura de la partícula α, es la causa de queesta desintegración sea, frecuentemente, la única posible energéticamente. Por ejemplo, en la desintegración del $^{232}U \rightarrow X' + y$, los valores posibles de Q se dan en la siguiente tabla:

y	X'	Q (MeV)	y	X'	Q (MeV)
n	^{231}U	−7,27	^{4}He	^{228}Th	+5,41
^{1}H	^{231}Pa	−6,10	^{5}He	^{227}Th	−2,59
^{2}H	^{230}Pa	−10,70	^{6}He	^{226}Th	−6,18
^{3}H	^{229}Pa	−10,24	^{6}Li	^{226}Ac	−3,79
^{3}He	^{229}Th	−9,91	^{7}Li	^{225}Ac	−1,94

A veces incluso es posible que se puedan emitir núcleos como ^{8}Be o el ^{12}C, pero son procesos con semivida $t_{1/2}$ muy grande (constante de desintegración λ muy pequeña). Otro ejemplo es el de la desintegración del ^{228}Th (la transición alfa del ejemplo que sigue es la que va al estado fundamental del Ra en la figura 9.1):

núcleo		Q (MeV)
$^{228}_{90}\mathrm{Th}$	$\rightarrow {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} + \alpha$	$+5,52$
	$\rightarrow {}^{227}_{89}\mathrm{Ac} + \mathrm{p}$	$-6,37$

Más adelante, al presentar el modelo de Gamow, se comprenderá que aun siendo $Q > 0$, la reacción no es instantánea porque lo impide la barrera culombiana. Si el valor de Q fuera superior al de toda la barrera de potencial, la desintegración tendría una vida media del orden de 10^{-21} s, tiempo de salida de la partícula α en un recorrido igual al radio nuclear.

9.1.2 Predicción de *Q* por la fórmula semiempírica

El valor de Q escrito en función de la energía de ligadura de los núcleos es:

$$Q = E_{\mathrm{L}}(^4\mathrm{He}) + E_{\mathrm{L}}(A-4, Z-2) - E_{\mathrm{L}}(A, Z) \qquad (9.5)$$

A partir de la fórmula semiempírica de masas, ya se ha visto una expresión para las energías de ligadura en (1.36). Tomando los parámetros propuestos por Krane, se obtiene el siguiente valor de Q_{calc} en el caso de algunos núcleos par–par:

	Q_{calc} (MeV)	Q_{exp} (MeV)
^{220}Th	7,3	8,95
^{226}Th	6,2	6,45
^{232}Th	5,2	4,08

en donde se observa una tendencia bastante correcta, al comparar estos valores con las medidas experimentales. En la práctica hay que tener en cuenta efectos debidos a la estructura de capas nuclear, que no reproduce la fórmula de Weisz¨acker, simplemente basada en un modelo macroscópico de gota líquida y que necesariamente predice una evolución muy suave de las energías de ligadura en función del número másico A.

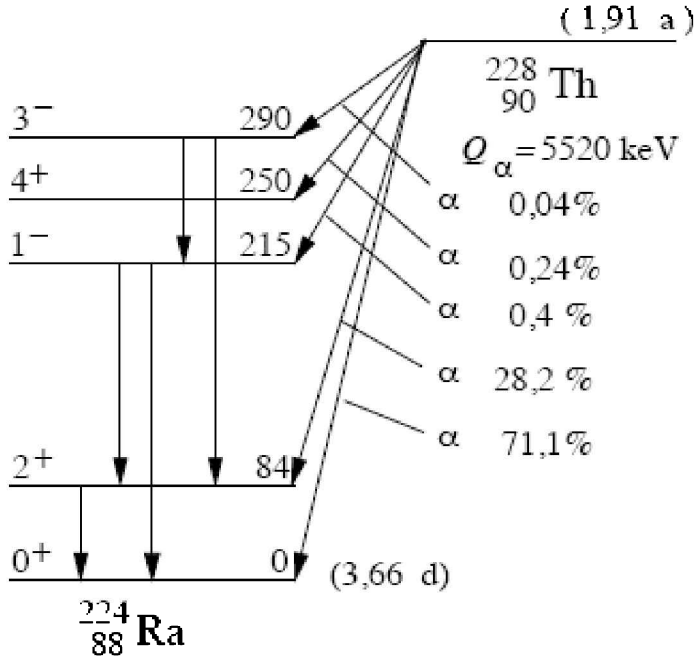


Figura 9.1: Desintegración alfa del ^{228}Th.

La condición de inestabilidad α puede obtenerse a partir de la expresión (9.5), exigiendo que $Q > 0$;es decir: $E_L(^4\text{He}) > E_L(A, Z) - E_L(A-4, Z-2) \approx 4\frac{dE_L}{dA}$, que se puede escribir:

$$4\frac{dE_L}{dA} = 4\left(A\frac{d(E_L/A)}{dA} + \frac{E_L}{A}\right)$$

La pendiente de la curva de estabilidad representada en la figura 1.10 permite calcular, para $A > 120$, $\frac{d(E_L/A)}{dA} \sim -7,7 \times 10^{-3}$ MeV, de forma que, como la energía de ligadura de la partícula alfa es $E_L(^4\text{He}) = 28,3$ MeV, se obtiene la condición de inestabilidad α:

$$4(E_L/A - 7,7 \times 10^{-3}A) = 28,3$$

que define una recta en el plano E_L/A en función de A que corta la curva de estabilidad en $A \sim 151$. Este es el valor de A, a partir del cual la mayoría de núcleos pueden desintegrarse por emisión alfa.

9.1.3 Regla de Geiger–Nuttall

Geiger y Nuttall[2] (1911), encontraron una relación sistemática entre la semivida de los núcleos par–par de las series naturales y la energía cinética de la partícula α (conocida a través del alcance, R_α):

$$\boxed{\log_{10} t_{1/2} = A \log_{10} R_\alpha + A'} \qquad (9.6)$$

en donde el alcance de las partículas α en el aire (R_α) viene dado en cm y el semiperiodo $t_{1/2}$ en segundos, con las constantes $A = -57,5$ y A' que

depende de la serie radiactiva. Por ejemplo, para la serie del ^{238}U, que es del tipo 4n+2, vale $A' = 41$.

Esta regla fue descubierta como consecuencia de medidas de alta precisión de alcances iniciadas por Bragg en 1906. El recorrido de la partícula α en un detector gaseoso, como en los detectores Geiger–Müller, sigue una ley bien conocida. En el caso de un detector que utilice el aire:

$$R^{aire}(\mathrm{cm}) = 0,3\, T_\alpha^{3/2}$$

y T_α en MeV. Midiendo el alcance se conoce perfectamente la energía T_α. La gran calidad de las medidas de T_α es lo que permitió comprobar la validez de la regla. Por ejemplo, si se mide el alcance de las partículas α de la desintegración $^{238}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{234}\mathrm{U} + \alpha$ (cuya energía es $T_\alpha = 5,5$ MeV) se obtiene $R_\alpha = 3,87$ cm.

Otra forma que se ha utilizado para expresar la regla de Geiger–Nuttall es

$$\boxed{\log_{10} t_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{Q}}} \qquad (9.7)$$

Esta relación inversa entre la semivida de la desintegración α y la energía de la desintegración (el valor Q, que está directamente relacionado con T_α por (9.4)), puede verse en la figura 9.2, donde se muestran varias series de isótopos de núcleos par–par.

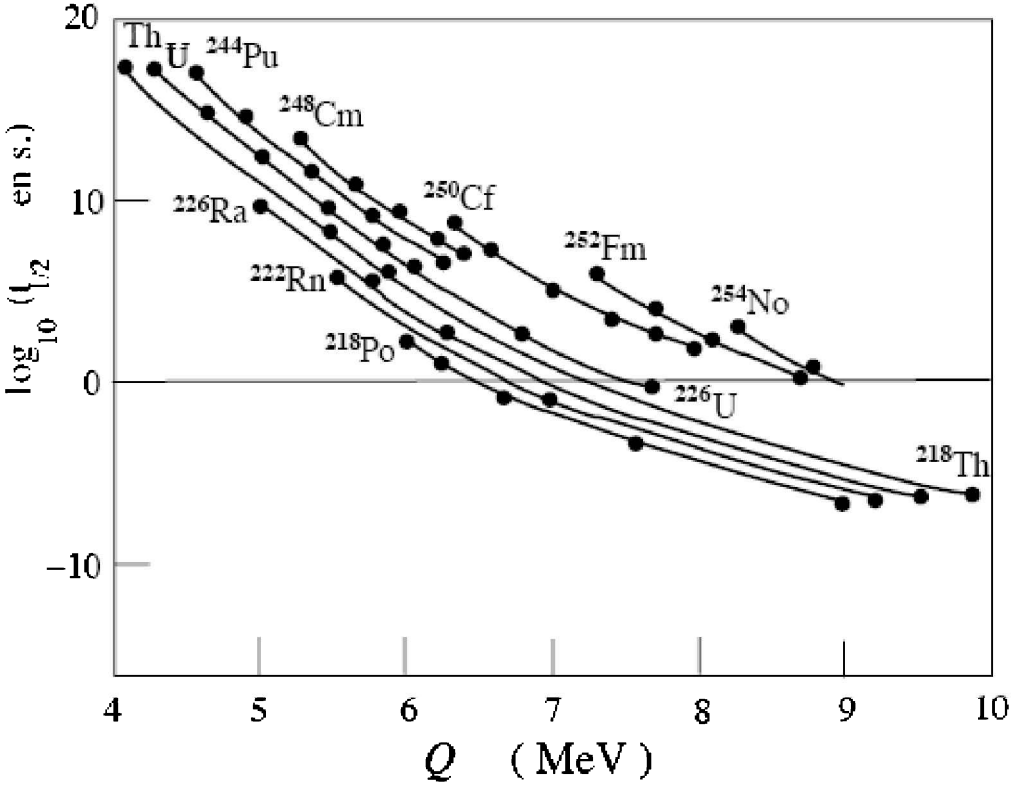


Figura 9.2: Verificación de la regla de Geiger–Nuttall. Cada línea conecta isótopos del mismo elemento.

Es inmediato verificar que esta regla puede explicar los casos extremos presentados en la siguiente tabla en la que se dan los valores de Q para dos desintegraciones del 90Th:

${}^{A}_{Z}X$	$t_{1/2}$	^{Q}(MeV)
^{232}Th	$1,4 \times 10^{10}$ años	^{4}, 08
^{218}Th	$1,0 \times 10^{-7}$ s	9, 85

con lo que un factor 2 en Q ¡produce un factor 10^{24} en $t_{1/2}$! Este tipo de núcleos con periodos muy largos son muy difíciles de medir. Así sucede por ejemplo con el ${}^{152}_{64}$Gd ($t_{1/2} = 1,08 \times 10^{14}$ años) y con $T_\alpha = 2,15$ MeV.

9.2 Modelo de Gamow de la desintegración α

La explicación de la desintegración α fue la primera confirmación del efecto túnel predicho por la mecánica cuántica. La teoría de Gamow,[3] y de Condon-Gurney (1928),[4] es una teoría de un cuerpo; se supone la partícula α en el pozo nuclear del núcleo. Para escapar, debe superar la barrera culombiana *B* responsable de la pared del pozo en la posición del radio ($R = a$) del pozo nuclear (véase figura 9.3). En la gráfica puede observarse la energía potencial de una partícula α en función de su distancia al núcleo. Más alládel radio nuclear, la curva de la energía sigue la forma de Coulomb.

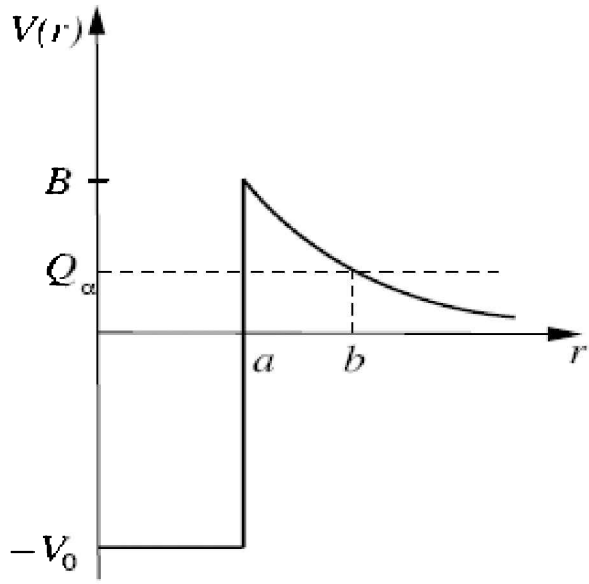


Figura 9.3: Potencial del Modelo de Gamow.

En lo que sigue, se supondrá que *Z* es el número atómico del núcleo padre, Z' el del hijo, con lo que se cumplirá que $\boxed{Z = Z' + z}$, siendo $z = 2$. El potencial electrostático creado por el núcleo Z' es:

$$V(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{zZ'e^2}{r} \approx \frac{2,88Z'}{r}\text{MeV}$$

habiendo expresado r en fm. O sea, que la altura máxima de la barrera de potencial es:

$$B = \frac{2Z'\alpha\hbar c}{a}$$

siendo a el radio nuclear $a = r_0 A^{1/3}$, con $r_0 \approx 1,2$ fm. Por ejemplo $B(^{234}\mathrm{U}) \sim 30$ MeV. Recuérdese también que para el ^{238}Pu, $T_\alpha = 5,50$ MeV y $t_{1/2} = 87,7$ años.

Dentro del alcance de la fuerza nuclear ($r < a$), la partícula alfa está ligada y su energía es positiva aunque inferior a la barrera ($Q_\alpha < B$) por lo que sólo puede escapar del núcleo por efecto túnel. El fenómeno no puede explicarse clásicamente. Se cumple $B = V(a)$ y $Q_\alpha = V(b)$, siendo b la distancia a la que la energía de la partícula α es igual a la repulsión culombiana. Para denominar la energía cinética de la partícula α se utilizará T_α, para distinguirla de la energía total (cinética más masa). Se cumple que $Q_\alpha = T_\alpha A/A'$. De hecho la energía disponible para la desintegración debería incluir un término de apantallamiento de los electrones sobre la partícula α, ya que las desintegraciones siempre tienen lugar en núcleos atómicos; este término de apantallamiento vale $\Delta E_{ap} = 6,5 \times 10^{-5} Z^{1,4}$ MeV; es decir para el uranio representa sólo 36 keV.

El hecho de que la energía de ligadura de la partícula α sea $E_\mathrm{L} = 28,3$ MeV, proporciona una energía suficiente para que la partícula α ocupe una posición $Q_\alpha > 0$ en el pozo nuclear (véase la figura 9.3). Como $Q > 0$ el proceso es exotérmico, pero debe vencerse la barrera culombiana. La energía de la partícula α en el interior del pozo es positiva y puede tomarse el valor Q, aunque T_α es la energía cinética de la partícula α una vez es emitida; pero Q tiene cuenta del retroceso del núcleo hijo. Si la barrera B fuese menor que Q_α, habría emisión espontánea con una vida media $\sim 10^{-21}$ s. Al tener una energía $Q_\alpha < B$, la partícula α aparecerá emitida a una distancia b del centro del núcleo hijo y con una energía

dada por $T_\alpha = V(b)$.

9.2.1 Probabilidad de desintegración α

La teoría de Gamow expresa la probabilidad de desintegración α como un producto:

$$\boxed{\lambda = p_\alpha f P} \tag{9.8}$$

siendo

- p_α: la probabilidad de que el *cluster* α preexista como tal en el interior del núcleo padre (empíricamente se estima $p_\alpha \sim 0{,}1$),
- f: la frecuencia de colisión contra la barrera culombiana, $f = \frac{v_\alpha}{2R} = \frac{\sqrt{2Q_\alpha/m_\alpha}}{2a}$, siendo Q_α la energía de la desintegración α, que, para hacer una estimación rápida se puede aproximar por $Q_\alpha = T_\alpha$, con lo que si se toma por ejemplo $T_\alpha = 5$, 5 MeV, como en el caso de la desintegración $^{238}\text{Pu} \rightarrow {}^{234}\text{U} + \alpha$, se obtiene $f \sim 10^{21}\ \text{s}^{-1}$, una frecuenciaelevadísima.
- P :coeficiente de transmisión por la barrera, $P = e^{-2G}$, siendo G el factor de Gamow:

$$G = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_a^b dr \sqrt{V(r) - Q_\alpha} \tag{9.9}$$

en donde μ es la masa reducida del sistema $\alpha - X'$:

$$\mu = \frac{m_\alpha M_{X'}}{m_\alpha + M_{X'}} \tag{9.10}$$

que, al ser $M_X' >> m_\alpha$ se cumple que $\mu \sim m_\alpha$. Sin embargo, los cálculos deben siempre hacerse empleando μ ya que su efecto es importante puesto que interviene en el exponente.

El factor de Gamow *G* está directamente relacionado con el coeficiente de transmisión a través de una barrera. En efecto, para una partícula de energía *T*, que intenta atravesar un pozo cuadrado de altura *B* > *T* y anchura *d*:

$$P = \left\{ 1 + \frac{B^2}{4T(B-T)} \sinh^2 kd \right\}^{-1}$$

con $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(B-T)}$. En el límite $kd \to \infty$ (o sea $B >> T$) se tiene:

$$P = e^{-2kd}$$

Esta expresión puede obtenerse aplicando la definición de coeficiente de transmisión a través de una barrera de potencial: $T = \frac{j_{sale}}{j_{entra}}$, en donde j_i es la densidad de corriente de una partícula. Si Ψ es su función de ondas, entonces:

$$\vec{j} = -i\frac{\hbar}{2m}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right) \qquad [s^{-1}]$$

es la densidad de corriente buscada (número de partículas por segundo que atraviesan el punto *r*). Para el caso más general de un potencial culombiano, utilizando la aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), se obtiene el mismo resultado sustituyendo:

$$kd \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_b(r) - Q_\alpha\right)} \qquad (9.11)$$

siendo $V_b(r)$ el potencial culombiano con barrera centrífuga:

$$V_b(r) = \frac{2Z'\alpha\hbar c}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \qquad (9.12)$$

Se observa que el momento angular orbital introduce un término en el potencial que varía como r^{-2}. Fijada una distancia (por ejemplo $r = b$), la barrera es mayor si el momento angular es $\ell > 0$. Es una barrera que se añade a la puramente culombiana y se denomina barrera centrífuga. Penetrar una barrera centrífuga es más difícil y por lo tanto las probabilidades de desintegración serán más bajas.

Probabilidad de desintegración α en el caso $\ell = 0$

Para $\ell = 0$, la integral que da el factor G visto en la expresión (9.9) es explícita, con lo que:

$$G = zZ'\alpha\sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q_\alpha}}\left[\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right] \qquad (9.13)$$

siendo $x = \frac{a}{b} = \frac{Q_\alpha}{B}$. Como $x << 1$, se puede aproximar [5] la expresión dentro de los corchetes por $\left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{x}\right]$, quedando una expresión de la forma:

$$G = \pi\alpha\sqrt{2\mu c^2}\frac{Z'}{\sqrt{Q_\alpha}} - 4\alpha\sqrt{\frac{\mu c^2 r_0}{\alpha\hbar c}}\sqrt{Z'A^{1/3}}$$

siendo $\alpha = \frac{1}{137}$, la constante de estructura fina.

Si se aplica para la desintegración del ^{238}U, dado que μc^2 = 3662, 6 MeV es la masa reducida del sistema α – ^{234}Th, el factor de Gamow

queda numéricamente:

$$\log_{10} P = 1,52\sqrt{Z' A^{1/3}} - 1,71\frac{Z'}{\sqrt{T_\alpha}} \qquad (9.14)$$

Así pues, como la probabilidad de desintegración es $\lambda = p_\alpha f e^{-2G}$, al calcular el logaritmo, se reproduce la regla de Geiger–Nuttall vista en (9.6), ya que $T_\alpha \sim Q$;es decir, el modelo de Gamow explica la regla. Además, queda de manifiesto la dependencia con Z', número atómico del núcleo hijo, en la expresión (9.14) anterior.

La figura 9.4 contiene los datos experimentales que muestran efectivamente la dependencia del logaritmo de la probabilidad de desintegración en función de $Z'/\sqrt{T_\alpha}$ visto en la ecuación (9.14), en donde se ha representado la recta a trazos cuya pendiente es $-1,71$, valor encontrado en dicha ecuación.

El siguiente resultado empírico[6] reproduce bastante bien los semiperiodos de todos los núcleos par–par:

$$\boxed{\log_{10} t_{1/2} = -51,37 + \frac{9,54(Z-2)^{0,6}}{\sqrt{Q_\alpha}}} \qquad (9.15)$$

donde $t_{1/2}$ viene dado en segundos y Q_α en MeV. Se trata, pues, de una fórmula de gran utilidad.

La semivida del núcleo inestable por desintegración α se calculará sencillamente utilizando $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, lo que da lugar a:

$$t_{1/2} = 0.693\, p_\alpha^{-1}\, \frac{a}{c}\sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q_\alpha}} \cdot \cdot \exp\left\{2zZ'\alpha\sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q_\alpha}}\left[\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}\right]\right\} \qquad (9.16)$$

en donde, como se ha visto en la fórmula (9.8), p_α es la probabilidad (empírica) de preexistencia del *cluster* alpha en el núcleo padre; $x = Q_\alpha/B$ y para estimar el factor f, se ha usado Q_α, la energía disponible para la desintegración α.

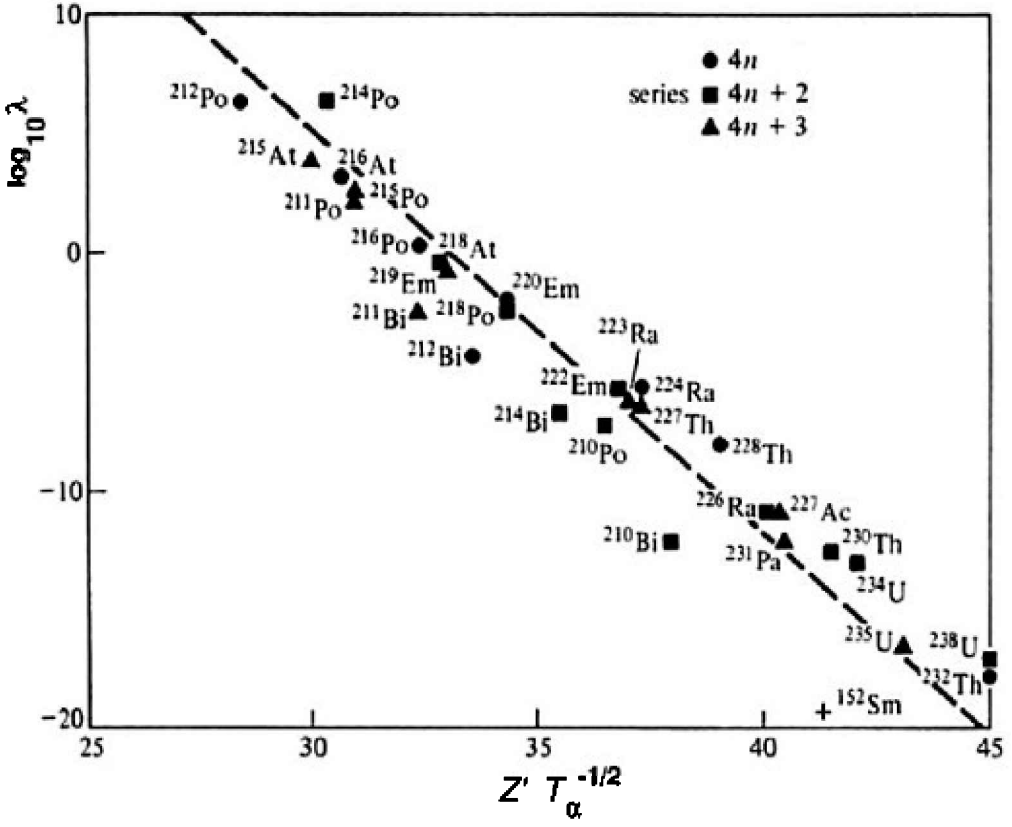


Figura 9.4: Representación del log λ en función de $Z'/\sqrt{T_\alpha}$, que verifica la dependencia del $t_{1/2}$ con T_α plasmada por la regla de Geiger–Nuttall.

La tabla 9.1 compara, para los isótopos par–par del torio, las semividas experimentales con las calculadas por el modelo de Gamow (9.16), habiéndose deducido $p_\alpha = 2,\ 4 \times 10^{-2}$, del cálculo de la desintegración del ^{230}Th. Por ello, en la tabla anterior el semiperiodo calculado y el valor del semiperiodo tomado de las tablas, coinciden. Se observan pequeñas discrepancias. Esto es así porque se han hecho aproximaciones muy

simples al realizar el cálculo. Por ejemplo, se sabe que núcleos con $A \geq 230$ son muy deformados; es decir, no son esféricos y la fórmula de Gamow es muy sensible al radio nuclear. En cualquier caso, para una teoría completa de la desintegración α debe usarse la regla de oro de Fermi, incluyendo:

a) funciones de onda nucleares ψ_i, ψ_f;

b) barrera centrífuga. Su efecto, como se ha visto en (9.12), es el de aumentar la altura máxima de la barrera B en una cantidad $B = B(1 + \varepsilon)$ siendo $\varepsilon \approx 0,002\ell(\ell+1)$, lo que disminuye la probabilidad o aumenta el semiperiodo (9.16). Por ejemplo, para $\ell = 1$ puede aumentar el 50 %, pero para $\ell = 6$ puede aumentar $t_{1/2}$ en un factor ≈ 1000.

c) núcleos no esféricos. Por ejemplo, un cambio del radio nuclear, a, del 4% produce un cambio en $t_{1/2}$ de un factor 5.

Tabla 9.1: Comparación de las predicciones del modelo de Gamow, para algunos isótopos par–par del Th.

A	Q(MeV)	$t_{1/2}(s)$,calc	$t_{1/2}(s)$,exper
220	8,95	$1,2 \times 10^{-5}$	$9,7 \times 10^{-6}$
222	8,13	$2,6 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$
224	7,30	1,5	1,0
226	6,45	$3,5 \times 10^{3}$	$1,8 \times 10^{3}$
228	5,52	$1,5 \times 10^{8}$	$6,0 \times 10^{7}$
230	4,77	$2,4 \times 10^{12}$	$2,4 \times 10^{12}$
232	4,08	$2,2 \times 10^{18}$	$4,4 \times 10^{17}$

9.2.2 Emisión de otras partículas o núcleos

Se puede utilizar la teoría de Gamow para calcular probabilidades de

emisión de otros núcleos, por ejemplo,

a) núcleos más pesados que α;

si se calculan las semividas del $^{220}_{90}$Th, se observa que la detección de núcleos más pesados que la partícula α es poco probable. Así, comparando los valores de la siguiente tabla:

	proceso	Q (MeV)	$t_{1/2}$ calculado
$^{220}_{90}\mathrm{Th}$	$\rightarrow {}^{208}\mathrm{Po} + {}^{12}\mathrm{C}$	$+32,14$	$\sim 2,3 \times 10^{6}$ s.
	$\rightarrow {}^{216}\mathrm{Ra} + \alpha$	$+8,95$	$\sim 1,2 \times 10^{-5}$ s.

se entiende que no se observe el canal con ^{12}C, por la baja probabilidad.

Sin embargo, recientemente se ha puesto de manifiesto (Rose & Jones, 1984) la desintegración del ^{223}Ra dando un ^{14}C en el estado final. Las desintegraciones se comparan:

	proceso	Q (MeV)	$t_{1/2}$ medido
$^{223}\mathrm{Ra}$	$\rightarrow {}^{209}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}$	$+31,82$	$2,7 \times 10^{7}$ años.
	$\rightarrow {}^{219}\mathrm{Rn} + \alpha$	$+5,98$	11,4 d.

La detección del ^{14}C se realizó estudiando las desintegraciones de una fuente de 3,3 μ Ci de ^{223}Ra en equilibrio con ^{227}Ac($t_{1/2}$ = 21 años), de la serie del ^{238}U. Una explicación para la enorme diferencia entre las vidas medias proviene de la probabilidad de preformación del ^{14}C en el núcleo del *Ra*, que lógicamente es muy pequeña ($\sim 10^{-6}$). En efecto, en la anterior tabla el cociente de probabilidades de desintegración λ_C/λ_α predicho por el modelo de Gamow es del orden 10^{-3}, mientras que el medido experimentalmente es 10^{-9}.

b) emisión de protones;

sólo posible en núcleos muy ricos en protones; para este tipo de núcleos entonces puede darse que $S_p < 0$ y $Q_p > 0$. Estos núcleos se obtienen bombardeando iones pesados; por ejemplo ^{58}Ni+^{96}Ru, reacción en la que Hofmann y colaboradores[7] observaron la producción del núcleo ^{151}Lu y su posterior desintegración:

$$^{151}\text{Lu} \rightarrow {}^{150}\text{Yb} + \text{p}$$

con $t_{1/2} = 85 \pm 10$ ms. mientras que la predicción utilizando el modelo de Gamow da $\sim 3, 6\ \mu$s; desacuerdo probablemente debido a la complejidad de las funciones de onda nucleares y al momento angular orbital.

9.3 Espectroscopía alfa y estructura nuclear

Los cálculos de Gamow hechos hasta ahora han tomado en consideración transiciones entre estados fundamentales. Pero desde que se pudo medir con mucha precisión la energía cinética de las partículas α, por ejemplo a través del alcance en detectores gaseosos. Si se utiliza el aire, se cumple:

$$\boxed{R^{aire}[\text{cm}] = 0,3\, T_\alpha^{3/2}\ [\text{MeV}]} \qquad (9.17)$$

se puso en evidencia la llamada estructura fina del espectro α; o sea, que aparecen varios niveles nucleares, cada uno con un valor de T_α (o lo que casi es lo mismo Q_α) diferente y con intensidad diferente (véase la figura 9.5).

La espectroscopía alfa es pues muy útil para estudiar la estructura nuclear (de los núcleos hijo). Ayuda a conocer los números cuánticos de los niveles nucleares.

9.4 Reglas de selección: Momento angular y paridad

El momento angular y la paridad se conservan en la desintegración α. En efecto, ello es consecuencia de la invariancia del hamiltoniano de la interacción (fuerte y electromagnética) bajo las rotaciones y bajo la transformación de paridad.

Así pues en el proceso $X \rightarrow X' + \alpha$ se cumplirá:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_X &= \mathbf{J}_{X'} + \ell_\alpha \\ \mathcal{P}_X &= \mathcal{P}_{X'}(-1)^{\ell_\alpha} \end{aligned}$$

ya que los correspondientes números cuánticos de la partícula α son $J_\alpha^{\mathcal{P}} = 0^+$. Siempre que exista un momento angular orbital $\ell_\alpha \neq 0$, existirá la siguiente relación entre los momentos angulares nucleares:

$$| J_{X'} - J_X | \leq \ell_\alpha \leq (J_X + J_{X'})$$

pudiéndose encontrar que $J_X \neq J_{X'}$, es decir los dos núcleos no tienen el mismo espín.

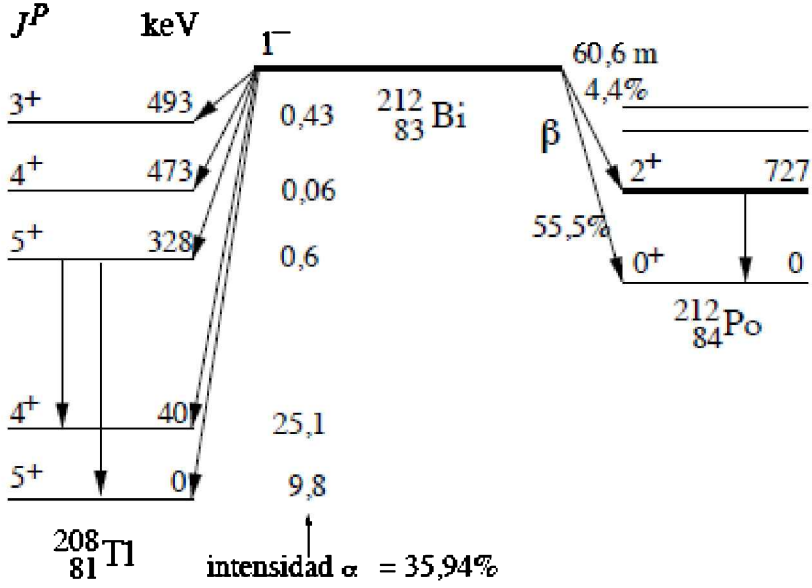


Figura 9.5: Estructura fina en la desintegración alfa. Cuando se mide la energía de las partículas α se observan cinco picos de energía bien definida que corresponden a las cinco desintegraciones. La intensidad de cada

desintegración se determinarámidiendo elárea de cada pico.

Las consecuencias de las reglas de selección pueden clasificarse en dos grandes conjuntos de desintegraciones, como son los casos siguientes:

a) transiciones entre núcleos par–par.

Entre estados fundamentales será un proceso $0^+ \rightarrow 0^+$, como por ejemplo en $^{242}_{96}\mathrm{Cm} \rightarrow {}^{238}_{94}\mathrm{Pu} + \alpha$($t_{1/2}$ = 162,8 días). Si los valores de ℓ_α son pares, aparecen bandas rotacionales (estados con espín–paridad 0^+, 2^+, 4^+ …) con distintas probabilidades de transición para cada estado debido a los distintos valores de *Q* y de la barrera centrífuga. También podrán tener lugar transiciones con ℓ_α impar; en este caso la paridad de los niveles cambiará y aparecerán transiciones $0^+ \rightarrow 1^-, 3^-, 5^-$, etc. (véase el ejemplo de la figura 9.1).

Por contra, no podrán existir transiciones prohibidas, como $0^+ \nrightarrow 2^-, 3^+, 4^-$.

b) transiciones entre núcleos con *A* impar.

Las reglas de selección no acotan el valor de ℓ_α, pudiendo existir varios ℓ_α posibles. Se recurre entonces a medidas de distribuciones angulares de α, que informan sobre los momentos angulares orbitales.

He aquí algunos ejemplos de desintegraciones entre estados fundamentales:

$$^{253}\mathrm{Es} \rightarrow \quad ^{249}\mathrm{Bk} + \alpha\ (20{,}5\ \mathrm{d.}) \qquad 7/2^+ \rightarrow 7/2^+$$
$$^{251}\mathrm{Fm} \rightarrow \quad ^{247}\mathrm{Cf} + \alpha\ (5{,}3\ \mathrm{h.}) \qquad 9/2^- \rightarrow 7/2^+$$
$$^{239}\mathrm{Pa} \rightarrow \quad ^{235}\mathrm{Ac} + \alpha\ (1{,}5\ \mathrm{d.}) \qquad 5/2^+ \rightarrow 3/2^-$$

La medida de los espectros nucleares se realiza mediante técnicas que facilitan la asignación correcta de los niveles iniciales y finales del

núcleo. La más popular es el la conocida como coincidencia α–γ:

- se determinan las intensidades de cada desintegración α midiendo elárea de los picos de las distribuciones energéticas de las partículas α;

- a continuación, se seleccionan *ventanas* de T_α, es decir, se selecciona una determinada desintegración a un nivel nuclear definido, y se miden los espectros de γ asociados.

Este método puede comprenderse ayudándose de la figura 9.5. La coincidencia α–γ podría emplearse para identificar con precisión los niveles existentes por debajo del estado 5^+ de 328 keV, seleccionando las partículas α con la energía de ese estado (que además aparecerá como un pico en el espectro α que representará el 1,7 % del total) y representando el espectro de energías de fotones γ asociados, se observarían dos picos: el de 328 keV, transición directa al estado fundamental y el de 288 keV, es decir 328 − 40 keV, que es la transición del nivel 5^+ al primer estado excitado, 4^+, del *Tl*.

Todo esto da lugar a la detección y medida de espectros rotacionales.[8] En efecto, la energía de los niveles nucleares pertenecientes a un espectro rotacional viene dada por:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) + E_K$$

el momento angular J puede tomar una serie de valores que dependen de los números cuánticos del núcleo base (cuyo espín es K y su energía E_K). En el caso frecuente de núcleos con A impar y estado base con espín-paridad diferente a 0^+, se cumple que los valores posibles de $J = \Omega, \Omega + 1, \Omega + 2, \ldots$, varían de uno en uno.

Por ejemplo, en el ^{247}Cf aparecen picos con E_γ = (0,55, 122, …) keV, por lo que si se calculan:

$$\Delta E_{21} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}[(\Omega+1)(\Omega+2) - \Omega(\Omega+1)] \quad = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} 2(\Omega+1)$$

$$\Delta E_{31} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}[(\Omega+2)(\Omega+3) - \Omega(\Omega+1)] \quad = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} 2(2\Omega+3)$$

se obtiene, Ω = 3,5±0,2; es decir Ω = 7/2, lo que da lugar a la banda rotacional del estado fundamental del ^{247}Cf: 7/2$^+$, 9/2$^+$, 11/2$^+$, … Se puede determinar el valor intrínseco $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}$ = 6,11 ±0,02 keV, con lo que se puede predecir el valor de los niveles ΔE_{41} = 201,6 keV, etc.

9.5 Problemas

9.1 Factor de transmisión en la desintegración α

El factor de penetración se define como la relación entre el flujo de partículas que inciden sobre una barrera de potencial y el flujo de partículas que consiguen atravesar dicha barrera. Se pide:

a) Demostrar que la expresión del factor de penetración para el caso de una barrera de potencial unidimensional como la que se muestra en la figura 9.6–(a) puede escribirse como:

$$T = \frac{16V}{E} e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2mV}}$$

con E la energía cinética y m la masa de la partícula, V la altura de la barrera de potencial y a su anchura.

b) Obtener la función de ondas y representarla de forma gráfica para las diferentes regiones del potencial de la figura 9.6–(a). Tomar V = 10 MeV, E = 5 MeV, a = 4 fm y m_α = 3727,4 MeV/c^2.

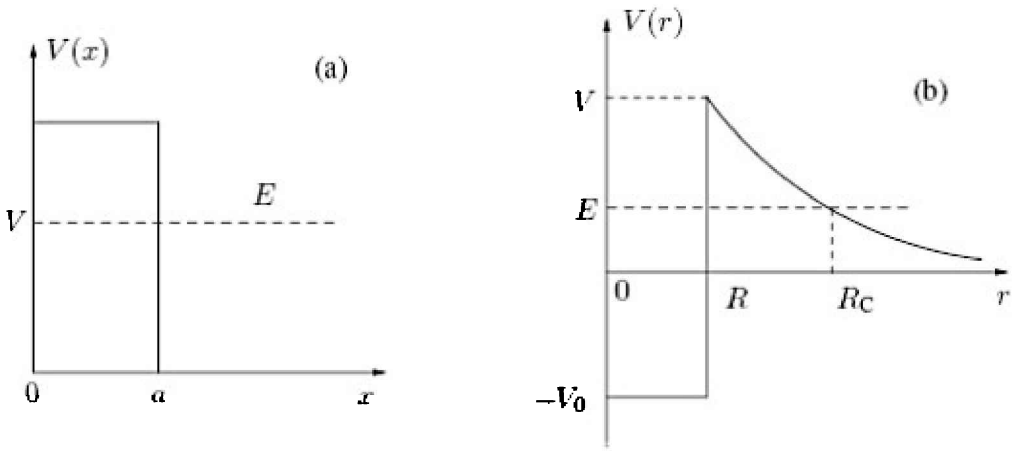


Figura 9.6: Ejemplos de barreras de potencial: (a) barrera rectangular unidimensional de altura V y anchura a y (b) pozo cuadrado junto a una barrera de Coulomb para un potencial central.

c) Obtener el factor de transmisión para el caso tridimensional de una barrera de potencial central que debe atravesar una partícula α emitida por un núcleo (Figura 9.6–(b)).

d) Discutir el papel del término de barrera centrífuga en el potencial del apartado anterior. En particular estimar su efecto sobre la probabilidad de transmisión para la desintegración α del ^{234}U.

e) Calcular la constante de desintegración para la emisión α aplicando la aproximación WKB delamecánica cuántica con el potencial del apartado **b)**.

9.2 Ley de Geiger–Nuttall

La figura 9.7 muestra el esquema de desintegración α del curio ^{244}Cm al plutonio ^{240}Pu.

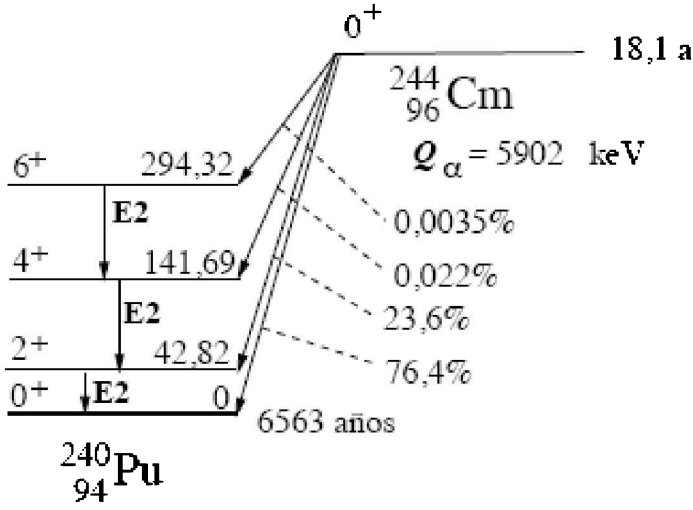


Figura 9.7: Esquema de desintegración α del ^{244}Cm y niveles de energía del ^{240}Pu. Todas las energías se dan en keV.

Las transiciones están marcadas con sus correspondientes porcentajes. La probabilidad de desintegración α correspondiente a la transición entre ambos estados fundamentales viene dada por la ley de Geiger–Nuttall:

$$\ln \lambda = C - D\frac{Z}{Q^{1/2}}$$

donde C = 132,8, D = 3,97 MeV$^{1/2}$, Q es la energía total cinética disponible para la desintegración α y λ se da en s^{-1}. Se pide:

a) Calcular la vida media del ^{244}Cm y compararla con el resultado experimental.

b) Suponiendo que los mismos valores de C y D son válidos para la transición desde el estado fundamental del ^{244}Cm al nivel 6$^+$del ^{240}Pu, mostrar que la fórmula anterior sobreestima la probabilidad de desintegración para esta transición y razonar un posible motivo para dicha discrepancia.

Datos: M(^{244}Cm) = 244,0628 u, M(^{240}Pu) = 240,0538 uy M(^{4}He)

= 4,0026 u.

9.3 Desintegración β retrasada de partículas α

El ^{20}Na se desintegra via transiciones β^+ a los estados excitados del ^{20}Ne de acuerdo con el diagrama de la figura 9.8. Estos estados pueden, a su vez, decaer via emisión α en lo que se conoce como emisión beta retrasada de partículas α. El valor para Q_{EC} se refiere a la energía total disponible para transiciones entre estados fundamentales. Las masas atómicas del ^{20}Ne, ^{16}O y ^{4}He son $M(^{20}\text{Ne})$ = 19,992436 u, $M(^{16}\text{O})$ = 15,994915 u y $M(^4\text{He})$ = 4,002603 u. Se pide:

a) ¿Con qué probabilidad la emisión β^+ viene acompa˜nada de emisión α?

b) ¿Cuál es el valor máximo de la energía cinética de los positrones en los diferentes espectros β^+ del ^{20}Na? Explicar cualitativamente las probabilidades de desintegración β^+ a los diferentes niveles del ^{20}Ne.

c) ¿Cuál es la energía cinética y probabilidad de emisión de las partículas α de acuerdo con los datos de la figura 9.8? ¿Porqué no hay emisión α desde el resto de niveles que aparecen del ^{20}Ne?

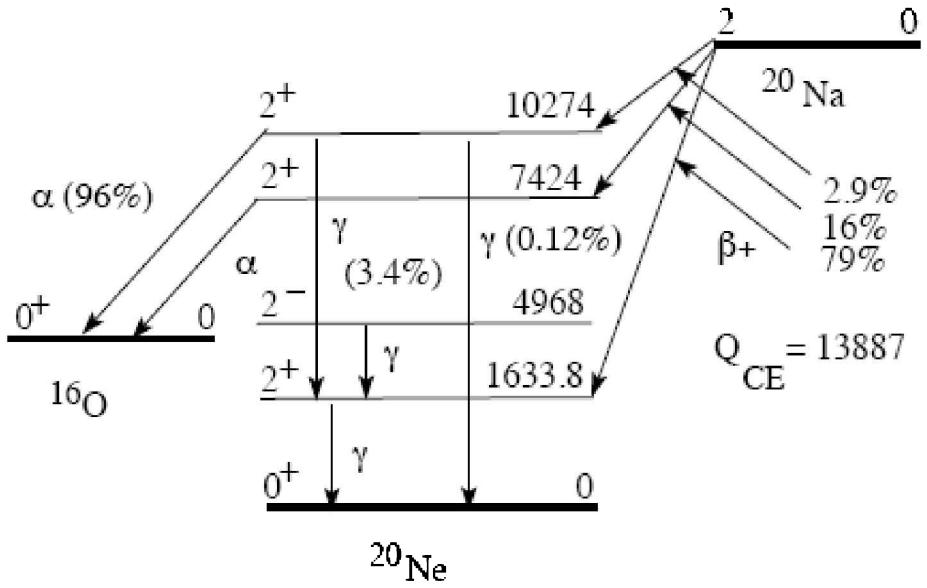


Figura 9.8: Esquema de desintegración β retrasada del ^{20}Na a partículas α. Se muestran también los niveles del ^{20}Ne. Todas las energías se dan en keV.

9.4 Desintegración del ^{8}Li a dos partículas α

La desintegración del ^{8}Li a dos partículas α es otro ejemplo de emisión β retrasada de partículas. El estado fundamental del ^{8}Li tiene un semi-período de $t_{1/2}$ = 0,84 s y se desintegra al nivel de 2,94 MeV del ^{8}Be de acuerdo con el esquema de la figura 9.9. A continuación este nivel se desintegra a dos partículas α con una anchura de 1,5 MeV.

Se pide:

a) Explicar porqué se espera que el núcleo de ^{8}Li sea inestable a partir de los datos de las masas atómicas que se dan.

b) ¿Cuál es la paridad del estado excitado de energía 2,94 MeV del ^{8}Be?

c Calcular a partir de los datos de la figura 9.9 los semiperíodos del ^{8}Be y ^{8}Be(2,94) y explicar la enorme diferencia con respecto al del estado fundamental del ^{8}Li.

d) Obtener mediante un modelo simple de penetración por

barrera la semivida del ^{8}Be. Suponer la partícula α esférica con un radio de 2,08 fm.

e) Calcular el umbral de energía para la captura neutrónica del ^{7}Li con respecto al estado fundamental del ^{8}Be.

Datos: $M(^{7}\text{Li})$ = 7,016003 u, $M(^{8}\text{Li})$ = 8,022486 u, m_α = 4,001506 u y m_n = 1,0087 u.

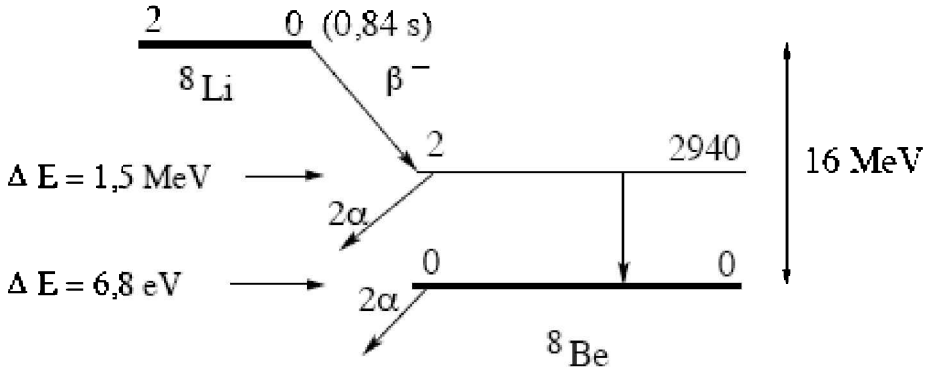


Figura 9.9: Esquema de desintegración β retrasada del ^{8}Li a dos partículas α.

9.5 Factorización de la probabilidad de desintegración α

La probabilidad o frecuencia de desintegración α por unidad de tiempo puede escribirse como el producto:

$$\lambda = p_\alpha f T$$

donde el término p_α representa la la probabilidad de preformación de una partícula α en el núcleo, f la frecuencia con la que la partícula interacciona con la barrera de Coulomb en la superficie nuclear y T la probabilidad de transmisión a través de la barrera de potencial. Se pide:

a) Estimar un orden de magnitud para el valor de p_α y f en un modelo nuclear semiclásico de partícula independiente donde los nucleones se distribuyen de forma uniforme en el núcleo.

b) La desintegración α entre los estados 0^+ del $^{244}_{98}\text{Cf}$ al $^{240}_{96}$

tiene un valor Q_α = 7,33 MeV y la semivida del proceso es $t_{1/2}$ = 19,4 min. Calcular la semivida de la desintegración $0^+ \rightarrow 0^+$ del $^{228}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} + \alpha$ suponiendo que la probabilidad de preexistencia de la partícula α en el núcleo padre es la misma que en el del $^{244}_{98}\mathrm{Cf}$.

c) Comparar el resultado del apartado anterior con la predicción de la formula empírica de Brown:

$$\log_{10} t_{1/2} = -51{,}37 + \frac{9{,}54(Z-2)^{0,6}}{Q_\alpha^{1/2}}$$

con Z el número atómico del núcleo padre y donde $t_{1/2}$ viene dado en segundos y Q_α en MeV.

9.6 Modelo de Gamow para la desintegración α

El $^{212}_{84}\mathrm{Po}$ tiene una semivida de 299 ns y se desintegra mediante la emisión de partículas α con una energía cinética de 8,8 MeV.

a) Utilizando el modelo de Gamow de la desintegración α, calcular el radio del núcleo de polonio.

b) Calcular el número de interacciones que una partícula α emitida por el $^{212}_{84}\mathrm{Po}$ debe realizar con la barrera de Coulomb de un núcleo de $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ antes de poder escapar.

c) Estimar la probabilidad de preformación de la partícula α en el núcleo de polonio así como su constante de desintegración reducida.

---

[1]La masa atómica del He es 3728,4 MeV, como puede verificarse tomando el defecto de masa de las tablas al final del libro y aplicando las fórmulas (1.23) y (1.25).

[2]H. Geiger and J. M. Nuttall; Phil. Mag. **22** (1911) 613.

[3]G. Gamow, Z. Phys. **51** (1928) 204 y Z. Phys. **52** (1929) 510.

[4] E. U. Condon and R. W Gurney, Nature 122 (1928) 439 y Phys. Rev. **33** (1929) 127.

[5] En efecto, la función arc cos$(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{3!} - \ldots$ para $x \longrightarrow 0$.

[6]B. A. Brown; Phys. Rev. **C46** (1992) 811.

[7]S. Hofmann *et al., Z. für Physik,* **A305** (1982) 111.

[8]Véase la sección 3.5 en el capítulo 3 sobre Modelos nucleares.

10. Teoría de las desintegraciones β

10.1 Introducción

La desintegración β nuclear es una manifestación de la interacción débil, responsable de la mayoría de las interacciones de los leptones (cargados o neutros) y de las desintegraciones de los leptones y de muchos hadrones (debidas a su vez a desintegraciones de quarks). La desintegración beta originó una verdadera revolución conceptual; primero, porque no se entendía la forma del espectro de los electrones (véase figura 10.1) y también porque inicialmente se creyó que los electrones preexistían en el núcleo. Se esperaba que el electrón tuviese una energía bien definida, como pasaba con las partículas α, porque parecía que se trataba de una desintegración a dos cuerpos; por ejemplo $X \rightarrow Y + e$; sin embargo, el espectro contradecía esta idea. Se llegó a suponer la violación de la energía! (por el propio N. Bohr). Así fue como Pauli en 1930 sugirió la emisión de una tercera partícula en el estado final, neutra, invisible, que Fermi bautizó con el nombre de *neutrino*, para diferenciarla del neutrón.

En los núcleos, los procesos básicos de desintegración β pueden identificarse como procesos que sufren los nucleones constituyentes. Pueden clasificarse en tres variantes; se denominan β^-, β^+ y captura electrónica (CE) y se explicitan en la tabla 10.1.

Tabla 10.1: Variantes de la desintegración beta de los núcleos. La desintegración β^+ se describe como una transición de un protón a un neutrón, que energéticamente no es posible si fueran libres; por eso se usa la notación “p”. Sin embargo, entre

núcleos, se conserva la energía.

tipo	proceso básico	atribuída a	Ejemplos
β^-	$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$	Rutherford, (1898)	$^{23}Ne \rightarrow {}^{23}Na + e^- + \overline{\nu}_e$
β^+	$"p" \rightarrow n + e^+ + \nu_e$	Joliot-Curie, (1934)	$^{25}Al \rightarrow {}^{25}Mg + e^+ + \nu_e$
CE	$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$	L. Alvarez, (1937)	$^{41}Ca + e^- \rightarrow {}^{41}K + \nu_e$

En todos ellos aparece el neutrino ν_e (o su antipartícula, el antineutrino $\overline{\nu}_e$, para que se conserve el número leptónico), partícula de masa pequeñísima y espín 1/2, con lo que se explica la conservación de la energía en la desintegración β nuclear. En efecto, el espectro de energías de los electrones emitidos en la desintegración beta tiene la forma de la figura 10.1, desde $T_e = 0$ hasta $T_e = T_0$, que es el valor máximo posible de la energía cinética del electrón.

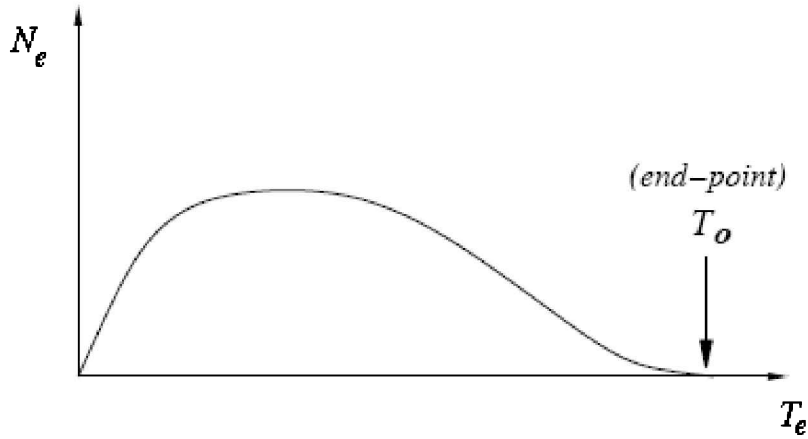


Figura 10.1: Espectro energético de los electrones emitidos en la desintegración β de los núcleos. La energía cinética máxima T_0 se conoce como el punto final (*end-point*) del espectro.

Las primeras estimaciones de las propiedades del neutrino, se obtuvieron de la desintegración beta del neutrón y del núcleo ^{14}C. En efecto; en la desintegración β del neutrón: $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$ se cumple que el valor $Q = (m_n - m_p - m_e - m_{\overline{\nu}_e})c^2 = T_p + T_e + T_{\overline{\nu}_e}$. Si de momento se toma $m_\nu = 0$,

como la energía cinética del protón es despreciable ($T_p \approx 300$ eV) se cumple:

$$Q = T_e + T_{\overline{\nu}_e} = 0,782\,\text{MeV}$$

por lo tanto $T_0 = (T_e)_{max} = Q$, siendo Q la magnitud que fija el valor máximo (*end-point*) de la energía cinética del e^-. La medida experimental $(T_e)_{max} = 0,782 \pm 0,013$ MeV. Así quedó de manifiesto originalmente que la masa del neutrino podría considerarse como compatible con una masa nula. También era necesaria la existencia del neutrino para conservar el momento angular total. En efecto, la desintegración del ^{14}C no se podía explicar sin el neutrino puesto que el proceso $^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^-$ no conserva el momento angular total ya que el espín $J(^{14}C) = 0$ y el del estado fundamental del ^{14}N vale $J(^{14}N) = 1$.

Entre partículas, los procesos débiles se clasifican en:

- *puramente leptónicos*, como en el caso de la desintegración $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$;
- *semi–leptónicos*, por ejemplo $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$, o $K^- \rightarrow K^0 + e^- + \overline{\nu}_e$, como en el caso nuclear y
- *no–leptónicos*, por ejemplo $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$; $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$.

La interacción débil está mediada por los denominados *bosones intermediarios*, $W^\pm(80,385 \pm 0,015\ \text{GeV/c}^2)$ y $Z^0(91,1876 \pm 0,0021\ \text{GeV/c}^2)$, muy masivos, que fueron descubiertos en 1983 en los experimentos UA1 (C. Rubbia *et al.*,) y UA2 (P. Darriulat *et al.*,) del CERN.[1] Por ello las primeras teorías consideraban que la interacción es puntual ya que el alcance de la fuerza:

$$R_0 = \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-3}\ \text{fm}$$

es 3órdenes de magnitud inferior al caso del intercambio de π de Yukawa.

Se distingue entre dos tipos de interacciones débiles: las denominadas corrientes neutras, que dan lugar a procesos sin cambio de carga ($e^+e^- \rightarrow \nu_e\overline{\nu}_e$) y las corrientes cargadas, que por ejemplo cambian el sabor de los quarks ($d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$). Utilizando el concepto de fuerzas por intercambio (véase la figura 10.2), las corrientes neutras están mediadas por el bosón Z^0 y las corrientes cargadas por los bosones $W_{\pm}$.

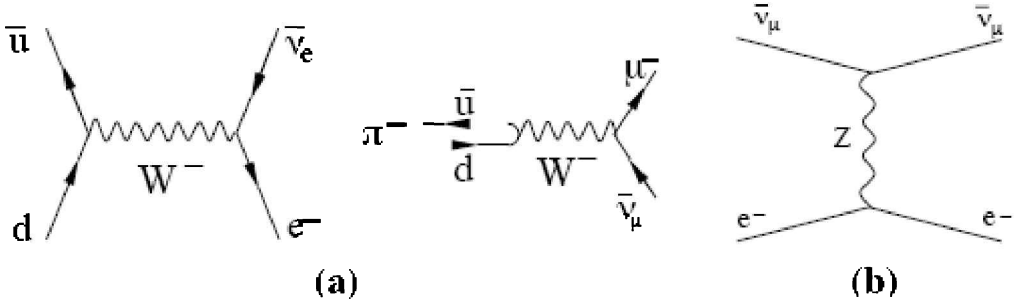


Figura 10.2: **a)** Diagramas de Feynman para la desintegración β^- del quark d ($d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$), que explica la desintegración β del neutrón, y del pión ($\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$) y **b)** Diagrama de intercambio del Z^0.

Inicialmente se postuló que una misma constante de acoplamiento se utilizaba en todos los procesos (hipótesis de universalidad); la llamada constante de Fermi, que vale:

$$G_F = 1,166 \times 10^{-11}\ (\hbar c)^3\ \mathrm{MeV}^{-2} \qquad (10.1)$$

obtenida gracias a las medidas de los semiperiodos de la desintegración beta nuclear.

10.1.1 Balance energético

Los valores de Q para cada uno de los tres procesos β nucleares se calculan a continuación en función de las masas atómicas de los núcleos que entran en juego:

$$X(Z,N) \longrightarrow X'(Z+1,N-1) + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$
$$Q_{\beta-} = \Big(\mathcal{M}(Z,N) - \mathcal{M}(Z+1,N-1)\Big)c^2$$

$$X(Z,N) \longrightarrow X'(Z-1,N+1) + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$$
$$Q_{\beta+} = \Big(\mathcal{M}(Z,N) - \mathcal{M}(Z-1,N+1)\Big)c^2 - 2m_\mathrm{e}c^2$$

$$X(Z,N) + \mathrm{e}^- \longrightarrow X'(Z-1,N+1) + \nu_\mathrm{e}$$
$$Q_{CE} = \Big(\mathcal{M}(Z,N) - \mathcal{M}(Z-1,N+1)\Big)c^2 - B_\mathrm{e}$$

como $B_\mathrm{e} \sim 10$ eV (núcleos ligeros), sólo debe considerarse en el caso de medidas precisas de la masa del ν. Podrían haberse utilizado las energías de ligadura, $E_\mathrm{L}(Z, N)$, en vez de masas, con lo que aparecerían términos ± 0,782 MeV, diferencia entre M_n y $\mathcal{M}(^1\mathrm{H})$. Por conservación de la energía, hay ciertos núcleos que pueden tener captura electrónica y no β^+; por ejemplo el $^7_4\mathrm{Be}$($t_{1/2}$ = 53,4 días) → $^7_3\mathrm{Li}$ sólo puede desintegrarse a través de captura electrónica, CE, ya que $\Delta\mathcal{M}$ = 0,86 MeV/c^2 y para que $Q_{\beta+} > 0$ es necesario[2] que $\Delta\mathcal{M} > 1{,}022$ MeV.

En la tabla 10.2 se muestran ejemplos de desintegración beta nuclear de los tres tipos descritos. Se observa que el rango de valores del semiperiodo es muy amplio y está ligado al valor de Q. Más adelante se demostrará la regla de Sargent, que relaciona la vida media de la desintegración beta con la quinta potencia de la energía disponible para la desintegración $1/\tau \sim Q^5$. A pesar de ello, es evidente que, en el caso de la desintegración beta, el rango medido de las vidas medias (desde el milisegundo hasta unos 10^{16} a˜nos) es más reducido que en el caso de la desintegración α.

Tabla 10.2: Ejemplos típicos de procesos de desintegración beta nuclear.

Desintegración	tipo	Q(MeV)	$t_{1/2}$
$^{23}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{23}\mathrm{Na} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$	β^-	4,38	37,2 s
$^{99}\mathrm{Tc} \rightarrow {}^{99}\mathrm{Ru} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$	β^-	0,29	$2{,}1\times10^5$ años
$^{25}\mathrm{Al} \rightarrow {}^{25}\mathrm{Mg} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$	β^+	3,26	7,2 s
$^{124}\mathrm{I} \rightarrow {}^{124}\mathrm{Te} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$	β^+	2,14	4,2 días
$^{15}\mathrm{O} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{15}\mathrm{N} + \nu_\mathrm{e}$	CE	2,75	122 s
$^{41}\mathrm{Ca} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{41}\mathrm{K} + \nu_\mathrm{e}$	CE	0,42	$1{,}0\times10^5$ años

Un buen ejemplo que ilustra todos los modos de desintegración β es el del núcleo impar–impar $^{40}_{19}\mathrm{K}$, que tiene un semiperiodo de $1{,}28\times10^9$ años (véase la figura 10.3). A la derecha de la figura, se puede apreciar la escala de energías. Se puede observar que el balance energético de la desintegración β^+ requiere una mayor diferencia de energía que en el caso de la captura electrónica, o sea que se necesita al menos una energía igual a $2m_\mathrm{e}c^2$ para que pueda existir la desintegración β^+, como se ha visto más arriba. El $^{40}_{19}\mathrm{K}$ tiene una abundancia isotópica igual a $1{,}14 \times 10^{-4}$ en el potasio natural. Es un elemento que tiene una gran importancia para el hombre ya que la transmisión de se˜nales del sistema nervioso se realiza intercambiando iones de potasio. Su presencia hace que contribuya en un $\approx$ 16 % a la radiación de origen natural a la que está expuesto el cuerpo humano.

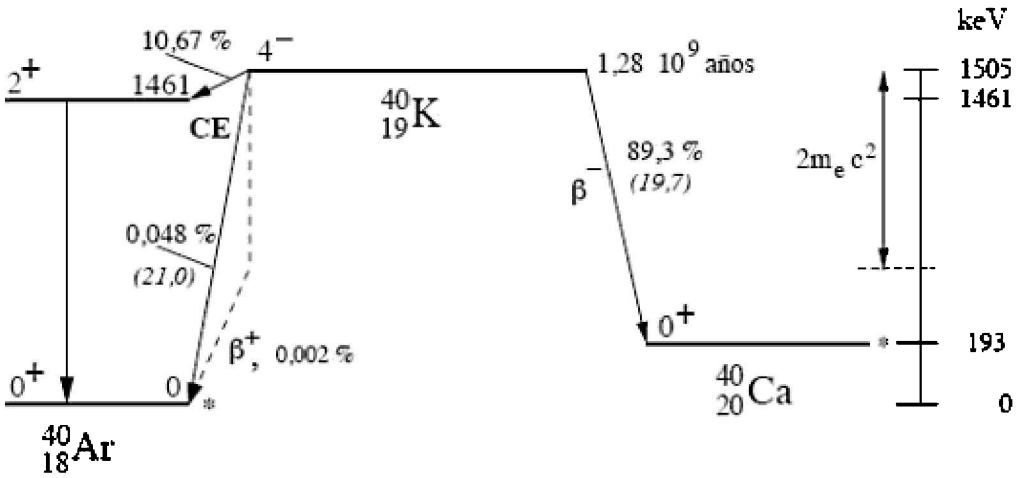


Figura 10.3: Modos de desintegración del núcleo $^{40}_{19}K$, uno de los núcleos impar–impar representativos que pueden tener desintegraciones β^+ y β^+. La transición β^+ $(4^- \rightarrow 0^+)$es de las llamadas 3.º prohibidas.

10.2 Teoría de la desintegración β nuclear

Aunque se sabe que la desintegración β, en términos de quarks está mediada por el intercambio de un bosón W virtual, se usará la teoría que inicialmente propuso Fermi (1934), que supone la interacción débil como una inter-acción puntual, cuya intensidad viene cuantificada por la constante de Fermi. Su idea fue simple; igual que en la desintegración γ, un núcleo se desexcita emitiendo un fotón (que no existe en el núcleo), Fermi pensó que en la transición n → p, se emite el par $e^- + \overline{\nu}_e$, que tampoco existen. La intensidad de la inter-acción es una pequeña perturbación si se compara con los estados estacionarios nucleares. Por ello es aplicable la teoría de perturbaciones. Se ampliará la idea de Fermi para construir la teoría V–A que explica razonablemente bien los resultados de las desintegraciones beta nucleares.

10.2.1 Probabilidad de transición

Se aplicará la regla de oro de Fermi con lo que la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, viene dada por la expresión:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \mid \langle f|H'|i\rangle \mid^2 \rho(E_f)} \qquad (10.2)$$

Esto es posible porque el hamiltoniano nuclear puede escribirse $H = H_0 + H'$, siendo H_0 el término responsable de los estados estacionarios nucleares y H' una pequeña perturbación, con lo que se puede aplicar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, que da lugar a la regla de oro de Fermi. Al término $H'_{fi} = \langle f|H'|i\rangle$ se le llama elemento de matriz nuclear y $\rho(E_f)$ es el llamado espacio fásico.

El estado inicial es un núcleo en un estado estacionario, con momento angular bien definido:

$$|i\rangle = |J_i M_i \zeta\rangle$$

en donde ζ representa los otros parámetros necesarios para definir completamente el estado nuclear (isospín, coordenadas espaciales,…).

El estado final, considerando que los dos leptones (electrón y neutrino) son partículas libres (ondas planas) se describirá como producto de las funciones de onda de las tres partículas del estado final:

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}} |J_f M_f \xi\rangle = \frac{1}{V} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |J_f M_f \xi\rangle$$

en donde V es el volumen arbitrario de normalización de las funciones de onda leptónicas (el volumen nuclear) y ξ (al igual que ζ en el estado inicial) representa el conjunto de funciones que completan el estado final. Se ha escrito $\vec{k} = \vec{k}_e + \vec{k}_\nu$. Si θ es elángulo entre $\vec{k}$ y $\vec{r}$, se puede desarrollar:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(i\vec{k}\cdot\vec{r})^2 + ...$$

quedando:

$$|f\rangle = \frac{1}{V}(1 + ikr\cos\theta + ...)|J_f M_f \xi\rangle \qquad (10.3)$$

Cada uno de los términos del desarrollo de la la onda plana suma de las ondas del electrón y del neutrino corresponde a un momento angular orbital ℓ de los lep-tones, distinto; el 1 del primer sumando es el término con $\ell = 0$, y el exponente de las potencias de $\vec{k}\cdot\vec{r}$ coinciden con ℓ. Históricamente, al término del 1, con $\ell = 0$, se le ha conocido como el de las transiciones *permitidas* y los siguientes, con $\ell > 0$, los que generaban las transiciones *prohibidas*. Como las energías en juego son bajas ($Q \sim$ MeV), los términos del desarrollo se van haciendo muy pequeñnos, ya que $pc \sim$ MeV y $r \sim$ fm; como $\hbar c = 197$ MeV fm se cumple que $(pcr/\hbar c) \approx 10^{-2}$. A medida que se haga mayor, la probabilidad de la transición irá disminuyendo aproximadamente como $10^{-2}\ell$, es decir, dará lugar a vidas medias cada vez más largas.

10.2.2 Elemento de matriz en la teoría de Fermi

En principio, la invariancia relativista permite que el elemento de matriz de la transición $|i\rangle \longrightarrow |f\rangle$ se pueda escribir:

$$H'_{fi} = \langle f|H'|i\rangle = G\int(\psi_f^*\phi_e^*\phi_\nu^*)\mathcal{O}_X\psi_i dV \qquad (10.4)$$

siendo G la constante de acoplamiento, que da la intensidad de la interacción. Las propiedades relativistas del operador $\mathcal{O}_X$ pueden dar lugar a los siguientes términos[3] $X = S, P, V, A, T$. Fermi postuló que el hamiltoniano era de forma parecida a la interacción electromagnética: tipo

corriente por corriente y con intercambio de un fotón; es decir una interacción vectorial, pero en este caso, la interacción era puntual (interacción de contacto) y $\mathcal{O}_X = 1$.

10.2.3 Elemento de matriz en la teoría V–A

Sin embargo, la teoría de Fermi fue mejorada después de muchos a˜nos de estudio e investigación, puesto que quedó probado experimentalmente, que el operador que describe la interacción débil es de la forma V–A, de aquí el nombre de la teoría. Como de $|i\rangle$ a $|f\rangle$ puede darse una transformación n ↔ p, se debe utilizar el operador $\tau_{\pm}$ de subida/bajada de isospín.[4] Según la teoría V–A yenellímite no relativista el hamiltoniano es un operador de la forma:

$$H' = \mathcal{O}_{\lambda\mu} = \sum_{j=1}^{A} \{G_{\mathrm{V}} \tau_{\mp}(j) + G_{\mathrm{A}} \sigma(j) \tau_{\mp}(j)\} \qquad (10.5)$$

Se trata de una interacción puntual descrita mediante dos términos. El primero es un término vectorial; contiene la constante de acoplamiento G_{V} yenellímite no relativista se representa por el operador unidad multiplicado por el opera-dor isospín $\tau_{\mp}$. Este es el operador que describe la transición entre el neutrón (protón) del estado inicial con tercera componente de isospín $\tau_0 = -\frac{1}{2}(\tau_0 = +\frac{1}{2})$, al protón (neutrón) del estado final. Siempre existe un cambio de tercera componente de isospín $|\Delta\tau_0| = 1$. El segundo término del hamiltoniano, con la constante G_{A}, es un vector axial formado por el producto del operador espín y $\tau_{\mp}$. Este término explica la posibilidad de cambio de la tercera componente del espín del nucleón además del necesario cambio del isospín.

La notación $\mathcal{O}_{\lambda\mu}$ recuerda que se trata de un tensor esférico de rango λ(el subíndice μ podrátomarlos $2\lambda + 1$ valores $\lambda, \lambda-1, \ldots, -\lambda$, como para cualquier momento angular), que es lo mismo que decir que el operador $\mathcal{O}$

'transporta' un momento angular igual a λ. Con ello, H' es un operador cuyo primer término (vectorial), transporta $\lambda = 0$ y el segundo (axial) transporta momento angular $\lambda = 1$. De esta manera, utilizando la aproximación de longitud de onda larga vista en (10.3), quedará:

$$H'_{fi} = \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^{A} \{ G_{\mathrm{V}} \tau_{\mp}(j) + G_{\mathrm{A}} \sigma(j) \tau_{\mp}(j) \} \cdot \cdot \frac{1}{V} (1 + ikr\cos\theta + ...) | J_i M_i \zeta \rangle$$

en donde aparecen dos tipos de términos, los asociados con el "1", que generan las transiciones permitidas (que corresponden al valor $\ell = 0$), y los asociados con el término $(kr)^{\ell}$, con $\ell > 0$, que dan lugar a las transiciones prohibidas. El valor de da lugar al rango de prohibición; de esta manera se conocen transiciones 1.º prohibidas ($\ell = 1$), 2.º prohibidas ($\ell = 2$), etc.

Si se retienen los términos que multiplican al "1", que son los que se asocian a las transiciones permitidas, el hamiltoniano se simplifica:

$$\begin{aligned} H'_{fi} &\approx G_{\mathrm{V}} \sum_{\mu M_f} \frac{1}{V} \left\{ \langle J_f M_f \xi | \mathcal{O}_{\lambda\mu} | J_i M_i \zeta \rangle \right\} = \\ &= G_{\mathrm{V}} \sum_{\mu M_f} \frac{1}{V} \left\{ \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^{A} \tau_{\mp}(j) | J_i M_i \zeta \rangle + \right. \\ &\qquad \left. + g_{\mathrm{A}} \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^{A} \sigma(j) \tau_{\mp}(j) | J_i M_i \zeta \rangle \right\} = \\ &= \frac{G_{\mathrm{V}}}{V} \left\{ \sum_{M_f} \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^{A} \tau_{\mp}(j) | J_i M_i \zeta \rangle + \right. \\ &\qquad \left. + g_{\mathrm{A}} \sum_{\mu M_f} \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^{A} \sigma(j) \tau_{\mp}(j) | J_i M_i \zeta \rangle \right\} \end{aligned}$$

siendo μ el subíndice de la tercera componente del momento angular

transportado por el término axial del hamiltoniano (en transiciones prohibidas, el término vectorial también transporta momento angular) y M_f representa la suma sobre todos los posibles estados de polarización del núcleo final.

El primer término corresponde a las transiciones de Fermi. Llamando $\vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu$, al espín del sistema leptónico, para cumplir con la conservación del momento angular entre el estado inicial y final ($J_i = J_f$) estas transiciones requieren que $S = 0$, es decir que el sistema $e + \nu_e$ está en estado singlete, o lo que es lo mismo, sus espines son antiparalelos; y el segundo, en donde se ha escrito $g_A = \frac{G_A}{G_V}$, que corresponde a las transiciones Gamow–Teller, deben cumplir que $S = 1$ (el sistema $e + \nu_e$ está en estado triplete de espín; es decir, las proyecciones de espín de los leptones están alineadas). Por ello el término G-T del hamiltoniano tiene un operador de espín, σ, que permite el cambio de la tercera componente del espín entre estados inicial y final nucleares.

Por lo tanto, la forma más general del elemento de matriz de la teoría V–A será:

$$\boxed{|H'_{fi}|^2 = G_V^2\{\langle F\rangle^2 + g_A^2\langle GT\rangle^2\}} \qquad (10.6)$$

en donde la integral $\langle F\rangle$ corresponde a las transiciones Fermi y la integral $\langle GT\rangle$ a las de Gamow–Teller. En la expresión (10.3) el volumen de integración V que se introdujo al definir las funciones de onda de los leptones, se cancelaráconel mismo V que aparece en el término de espacio fásico, $\rho(E_f)$, que se verá en la próxima sección. Por ello no aparece explícitamente en la expresión (10.6).

La visualización gráfica de las transiciones tipo Fermi y tipo Gamow–Teller se muestra en la figura 10.4 que representa la desintegración del neutrón. Como se explica en la figura, la desintegración del neutrón resulta ser una mezcla (suma) de los dos tipos de transiciones. Se cumple además que el momento angular orbital de los leptones es $\ell = 0$. Por ello la

desintegración del neutrón es una transición permitida, mezcla de Fermi y Gamow–Teller.

En esta figura aparecen los cambios de tercera componente de espín posibles; si entre el neutrón y el protón no hay cambio de espín, la conservación del momento angular exige que los dos leptones tienen que ser emitidos en la misma dirección, formando un singlete de espín, $S = 0$; se trata de una transición de Fermi y el término del hamiltoniano es $\langle F \rangle$. Por el contrario, si las terceras componentes del espín del neutrón y del protón son opuestos, los dos leptones son emitidos en dirección opuesta y se acoplan formando un triplete de espín, $S = 1$; entonces es una transición de tipo Gamow–Teller y el término correspondiente del hamiltoniano es $\langle GT \rangle$. Todo ello es debido a que los leptones, cuando participan en la interacción débil, son levógiros (su dirección de espín es opuesta a la dirección de movimiento).

Una simplificación importante tiene lugar en las desintegraciones permitidas, ya que $|H'_{fi}|$ es constante e independiente de la energía del electrón, T_e. Esto hace más sencillo el estudio de la forma del espectro β y el cálculo de las vidas medias en dichas transiciones permitidas.

10.2.4 Densidad de estados finales $\rho(E_f)$

La densidad de estados finales en el volumen V, de partículas con momento en el intervalo $(p, p + dp)$ enunelementodeángulo sólido $d\Omega$ es:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

con:

$$dn = \frac{V d\Omega p^2 dp}{h^3} \qquad (10.7)$$

que efectivamente da el número de funciones de onda discretas, con

longitud de onda $\lambda = h/p_e$ que pueden ocupar un volumen V.

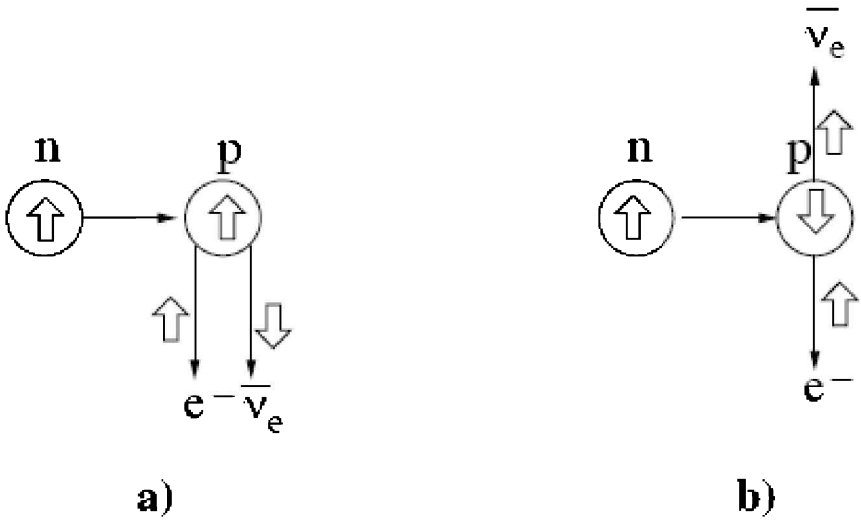


Figura 10.4: Esquema de los dos posibles tipos de desintegración del neutrón (las flechas ⇑ y ⇓ representan la proyección del espín de las partículas): **a)** Es una transición tipo Fermi sin cambio de proyección del espín entre n y p. **b)** Es una transición tipo Gamow–Teller con cambio de proyección de espín entre n y p.

Las energías totales de los leptones serán:

$$E_e = T_e + m_e c^2 \qquad \text{y} \qquad E_\nu = T_\nu + m_\nu c^2$$

yenel casodeque $m_\nu = 0$ entonces se simplifica $E_\nu = T_\nu = p_\nu c$, siendo E la energía total y T la energía cinética.

Aplicando lo visto a cada uno de los leptones del estado final:

a) para el ν_e, suponiendo que $m_\nu = 0$,

$$dn_{\nu_e} = \frac{V p_{\nu_e}^2 dp_{\nu_e}}{2\pi^2\hbar^3} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3}\left(T_0 - T_e\right)^2 dT_e \qquad (10.8)$$

y en caso de que se suponga que $m_\nu = 0$,

$$dn_{\nu_e} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\frac{T_0 - T_e}{c^3}\sqrt{(T_0 - T_e)^2 - (m_{\nu_e}c^2)^2}dT_e \qquad (10.9)$$

en donde se ha utilizado el llamado *end point* (que representa el valor máximo) de las energías cinéticas del electrón, T_0, en vez de Q, puesto que $Q = T_n + T_e + E_{\nu_e}$ ycomo $T_N \sim 0$ queda $T_0 = T_e + T_{\nu_e}$.

b) para el $e^{\pm}$, denominando Z' el número atómico del núcleo hijo,

$$dn_e = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}p_e^2 dp_e F(Z', p_e) \qquad (10.10)$$

debe introducirse la función F de Fermi, que da cuenta de los efectos culombianos del $e^{\pm}$ al atravesar el núcleo. De hecho es laúnica diferencia entre la desintegración β^- y β^+. Es una función bien conocida y tabulada. En el límite no relativista $v_e << c$, se tiene $F(Z', T_e) = x/(1 - e^{-x})$ siendo $x = \mp 2\pi\alpha Z'/\beta$, para $e^{\pm}$.

Con la densidad de estados finales vista más arriba, el ritmo probabilidad de transición β en función del momento p_e queda:

$$\lambda(p_e) \equiv \frac{d\lambda}{dp_e} =$$
$$= \frac{1}{2\pi^3\hbar^7c^3} \mid H'_{fi} \mid^2 F(Z', T_e)p_e^2(T_0 - T_e)\sqrt{(T_0 - T_e)^2 - (m_{\nu_e}c^2)^2} \qquad (10.11)$$

En el caso de transiciones prohibidas, hay que incluir también un factor de forma, $S(p_e, p_\nu)$, función de los momentos de los leptones, debido a las integrales con los términos $(kr)^\ell$, del desarrollo visto en (10.3). Por ejemplo en el caso del ^{91}y$(1/2^-) \rightarrow {}^{91}Zr(5/2^+)$, transición 1.º prohibida, el factor de forma se escribe $S = p_e^2 + p_\nu^2$.

10.3 Espectro β: Plot de Kurie. Medida de la masa del ν_e

Ha quedado bien establecido que los neutrinos se mezclan,

precisamente porque tienen masa (por ello sufren oscilaciones de sabor viajando en el vacío), y se sabe que su masa es muy peque˜na. Los tres sabores de los neutrinos son superposición de los tres estados propios de masa ν_1, ν_2, ν_3, conmasas m_1, m_2 y m_3, según

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathcal{V} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

La matriz $\mathcal{V}$ y los valores absolutos de los términos de mezcla $|V_{ij}|$, son conocidos con suficiente precisión (del orden de varios %), pudiéndose escribir (véase 18.5, en el Capítulo 18):

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}82 & 0{,}55 & 0{,}16 \\ 0{,}44 & 0{,}65 & 0{,}62 \\ 0{,}36 & 0{,}52 & 0{,}77 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

valores que se pueden calcular tal y como se describe en la Sección 18.1.1, donde se dan los valores de losángulos mezcla necesarios.

Por lo tanto la determinación de la masa de los neutrinos es una tarea compleja. El estudio de las oscilaciones de neutrinos ha permitido determinar que la diferencia entre masas al cuadrado entre ν_1 y ν_2 vale $\delta m^2 = 75{,}4 \pm 2{,}6$ meV^2; luego es muy peque˜na y para ν_3 se ajusta el valor $\Delta m^2 = m_3^2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2}$ y se obtiene $\Delta m^2 = 2430 \pm 60$ meV^2, aunque no se conoce la escala absoluta; es decir no se sabe si ν_3 es el neutrino de mayor o menor masa o dicho de otra manera, no se conoce la jerarquía. Existen tres métodos para determinar la masa de los neutrinos, que se presentan a continuación.

1) Las observaciones cosmológicas, que son sensibles a $\sum_{i=1}^{3} m_i$, gracias al modelo cosmológico ΛCDM; o sea, el modelo *lambda* de

materia oscura fría (no relativista), compatible con $\sum_i m_i$ < 600 meV. Incluyendo lo que se sabe de las oscilaciones permite afirmar que para cada neutrino $m_i \leq 200$ meV.

2) Las medidas de la desintegración doble beta sin neutrinos ($\beta\beta0\nu$), $|m_{ee}| = |\sum_{i=1}^{3} V_{ei}^2 m_i|$ que son sensibles al valor absoluto de la masa

3) La medida directa de la masa del neutrino (en este caso del ν_e) que se discutirá en lo que sigue y que hay que entenderla como el valor ponderado de la masa, que se denomina masa efectiva del neutrino: $m_{\nu_e}^2 = \sum_{i=1}^{3} |V_{ei}^2|^2 m_i^2$, utilizando los valores de los elementos de la matriz (10.13).

Así pues, suponiendo

a) que $|H'_{fi}|$ es constante e independiente de T_e, lo que sucede en las desintegraciones permitidas, y

b) que la masa del ν_e es despreciable

se puede predecir el espectro β, que da la distribución del número de electrones en función de su momento; si se estudian N_0 desintegraciones, el espectro viene dado por $N(p_e) = dN/dp_e = N_0 d\lambda/dp_e$. Si se calcula: $\sqrt{N(p_e)/(p^2F)}$ se observa que esta cantidad es simplemente proporcional a $(T_0 - T_e)$, o sea que al representar la cantidad

$$N' = \sqrt{\frac{N(p_e)}{p^2 F}}$$

en función de T_e se espera una recta cuyo *end–point* es T_0. Este es el llamado Plot de Kurie, que se muestra en la figura 10.5. En la anterior expresión $N(p_e)$ es el número de desintegraciones medidas

experimentalmente para cada intervalo de momento del electrón; entre p_e y $p_e + \Delta p_e$ siendo Δp_e la anchura del *bin* del histograma.

De hecho el cálculo debe tener en cuenta la existencia de los tres neutrinos; por lo tanto hay que modificar el ritmo de probabilidad de desintegración $\lambda(p_e)$ incluyendo el promedio ponderado de la masa de los tres neutrinos, con lo que la raiz cuadrada de la expresión (10.11) quedaría modificada de la siguiente manera:

$$\lambda(p_e) \equiv \frac{d\lambda}{dp_e} = ... \sum_{i=1}^{3} |V_{ei}^2| \sqrt{(T_0 - T_e)^2 - (m_i c^2)^2}$$

La desintegración del neutrón en reposo, cuya vida media es τ_n = 880,3 ±1,1 s; es decir, su semiperiodo es $t_{1/2}$(n) = 610,2 ±0,8 s, da inmediatamente una predicción de la masa del $\overline{\nu}_e$. En efecto, la medida de la energía cinética máxima del e^- es $T_{e,\,max}$ = 0,782 ± 0,013 MeV. Como $Q = (m_n - m_p - m_{\overline{\nu}_e})c^2 = (0,782 - m_{\nu_e}c^2)$ MeV, se tiene entonces que la masa del neutrino es: m_{ν_e} = (0 ± 13) keV/c^2; o sea, compatible con masa nula pero el resultado no puede excluir una masa superior a cero.

En principio, se espera el mismo valor en la medida de la masa del neutrino que la del antineutrino. En efecto, el teorema $\mathcal{CPT}$ predice[5] que las masas de las partículas deben ser iguales a las de sus antipartículas.

La determinación más precisa de $m_{\overline{\nu}_e}$ se ha realizado con el tritio: $^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \overline{\nu}_e$ ($t_{1/2}$ = 12,32 a˜nos, Q_β = 18,6 keV). El bajo valor de Q_β favorece la sensibilidad para detectar $m_{\overline{\nu}_e}$. Además sólo existe un nivel nuclear, el del estado fundamental del ^3He, aunque dos estados atómicos. También las fuentes de tritio son fáciles de preparar. La resolución experimental modifica el espectro de Kurie cerca del *end–point*. En la figura 10.5 las curvas a trazos, representan los casos teóricos $m_\nu = 0$ y $m_\nu \neq 0$. Al tener en cuenta la resolución experimental esas curvas cerca del *end–point* cambian de forma. Este cambio se puede calcular simulando todos los efectos experimentales del detector y, por supuesto, se tienen en cuenta al analizar los datos.

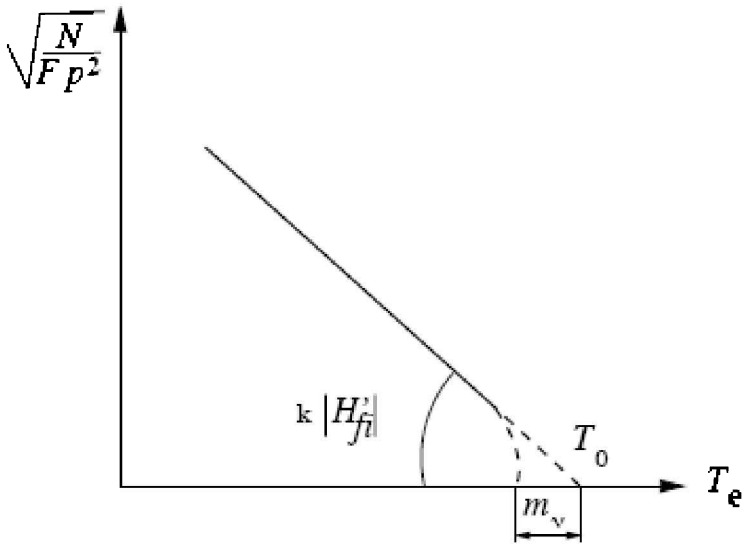


Figura 10.5: Plot de Kurie. Se puede observar el denominado *end point,* T_0 es decir el valor máximo de la energía cinética del electrón emitido en la desintegración β.

En la figura 10.6 pueden observarse los resultados de uno de los experimentos basados en la medida del espectro de los electrones de la desintegración del tritio, que han dado lugar a los valores límites de la masa del $\overline{\nu}_e$ y en donde aparece con claridad el efecto de la resolución experimental cerca del *end point*. Los límites sobre la masa del neutrino de mayor precisión han sido obtenidos por el experimento MAINZ[6] ($m_{\nu_e} \leq 2{,}3$ eV) y TROITSK[7] ($m_{\nu_e} \leq 2{,}05$ eV), y el más ambicioso de los experimentos en preparación se encuentra en Alemania y se llama KATRIN cuyo objetivo es llegar al límite superior cosmológico, $m_{\nu_e} <$ 200 meV.

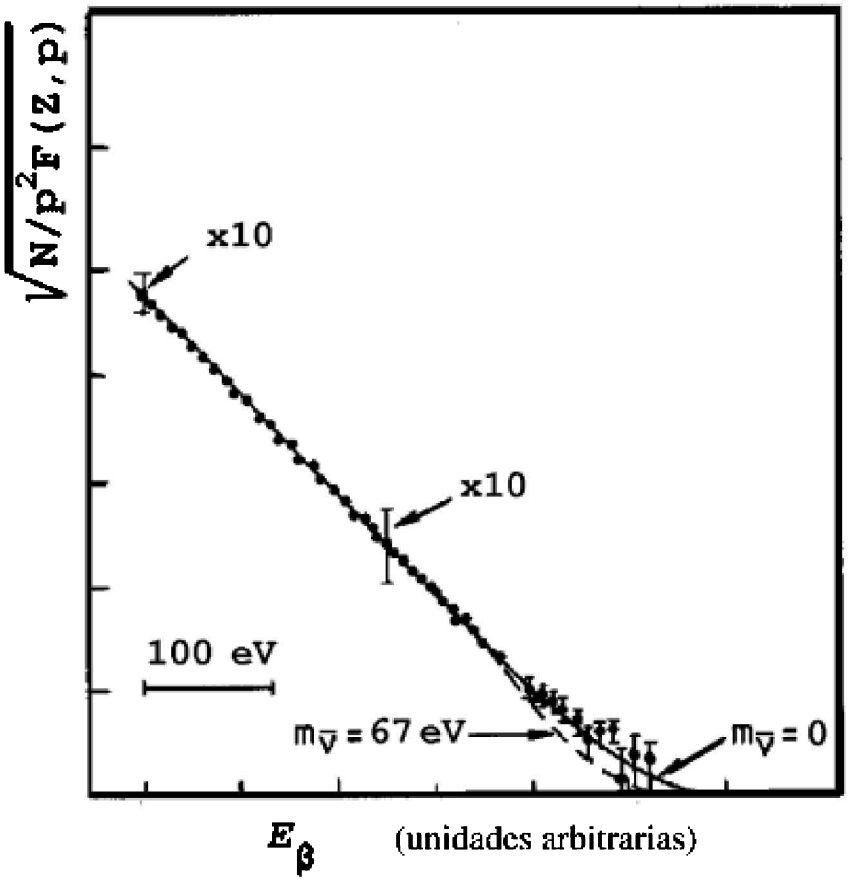


Figura 10.6: Medida de la masa del neutrino por el plot de Kurie en la desintegración beta del tritio. Se observa el efecto de la resolución experimental cerca del *end–point*. Resultados del experimento de Bergkvist (K. E. Bergkvist *Nucl. Phys.*, **B39** (1972) 317).

Las medidas directas actuales de las masas de los neutrinos de las tres especies conocidas, arrojan los límites superiores siguientes:

$$m_{\bar{\nu}_e} < 2\,\text{eV/c}^2 \qquad m_{\nu_\mu} < 0.19\,\text{MeV/c}^2 \qquad m_{\nu_\tau} < 18\,\text{MeV/c}^2$$

Además es bien sabido que aunque minúscula, la masa de los neutrinos es $m_\nu > 0$, luego existen importantes consecuencias físicas, que son de plena actualidad. Algunas ya han podido establecerse, otras están todavía sin confirmar:

- existen oscilaciones entre neutrinos ($\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$). La evidencia ha sido puesta de manifiesto en el experimento Superkamiokande (Japón), estudiando los neutrinos atmosféricos. Este fenómeno permite explicar la reducción de un factor 3 del flujo de ν_e solares; el conocido déficit del flujo de neutrinos solares.

- podría contribuir a explicar parte de la masa oscura del universo: las evidencias actuales apuntan que sólo se conoce la naturaleza del 5 % del universo; hay un 27 % de materia *oscura*, porque no es luminosa y no se ha detectado, y un 68 % de energía oscura, que todavía no se sabe lo que es. Para explicar la materia oscura bastaría con que la masa de los neutrinos fuese $m_\nu \sim 5$ eV, lo que es poco probable. Según la teoría del *big–bang* deben existir $\sim 10^8 \nu/m^3$, con lo que se puede "cerrar" el universo.

En relación con el problema de la materia oscura del universo, en nuestra galaxia de la Vía Láctea, la propia distribución de masa visible y su movimiento circular determinan que en la cercanía del Sol, la densidad de masa oscura (*dark matter*) es $\rho^{DM} \approx 0{,}3$ GeV cm^{-3}. Sea cual sea su naturaleza debe comportarse como un gas sin colisiones, con una distribución de Maxwell de velocidades, cuyo valor medio es $\langle v \rangle \sim \Delta v \sim 300$ km $\cdot$ s^{-1}. No se conoce la identidad de la materia oscura; hay candidatos (no de tipo bariónico) que se denominan *WIMPs* (*Weak Interacting Massive Particles*) y se clasifican en dos grupos:

a) Materia oscura caliente. Representada por ν masivos (de 1 −10 eV).

b) Materia oscura fría. Los candidatos podrían ser los neutralinos (fotinos, higgsinos, binos) de las teorías de supersimetría (con masas entre 20−350 GeV) y el axión (con una masa estimada entre 10^{-5} − 10^{-3} eV) que aparece para eliminar propiedades no deseables de la simetría $\mathcal{CP}$ fuerte, en la teoría QCD.

10.4 Semivida comparativa y transiciones prohibidas

La probabilidad de desintegración por unidad de tiempo λ, que da la vida media del proceso β se obtiene al integrar:

$$\lambda = \int_0^{p_{max}} \frac{d\lambda}{dp_e} dp_e = k_1 f(Z', T_0) \mid H'_{fi} \mid^2 \qquad (10.14)$$

en donde:

$$k_1 = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \qquad (10.15)$$

Tomando $m_\nu = 0$ y dado que $|H'_{fi}|$ es constante e independiente de T_e (sobre todo para las transiciones permitidas), se puede escribir:

$$f(Z'.T_0) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int_0^{p_{max}} F(Z', T_e) p_e^2 (T_0 - T_e)^2 dp_e \qquad (10.16)$$

que es una función adimensional llamada integral de Fermi, y que se calcula numéricamente (excepto para $Z = 1$). El valor de la integral de Fermi puede verse en la figura 10.7 para transiciones β^- y β^+ yparanúcleos hijo con número atómico Z.

Tomando en el hamiltoniano de la ecuación (10.14) sólo el término de Fermi, $|H'_{fi}|^2 = G_V^2 |M_{fi}|^2$, en donde $|M_{fi}|$ es el elemento de matriz nuclear; es decir, sin los leptones; suponiendo F (la función de Fermi) constante e igual a 1, y aproximando muy burdamente $T_e >> m_e c^2$, la integral de Fermi es inmediata ya que la integral:

$$\int_0^{p_{max}} p_e^2 (T_0 - T_e)^2 dp_e = \frac{1}{30} \left(\frac{T_0}{m_e c^2} \right)^5 \qquad (10.17)$$

obteniéndose la regla de Sargent:[8]

$$\lambda = \frac{G_V^2 |M|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \frac{T_0^5}{30} \qquad (10.18)$$

que da la dependencia de λ según la potencia 5 del valor máximo de la energía del e^-. Fue una regla muy bien verificada experimentalmente, sobre todo en las transiciones permitidas y superpermitidas, que fue utilizada inicialmente para determinar G_V.

Se define la semivida comparativa:

$$ft_{1/2} = f(Z', T_0)t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1 |H'_{fi}|^2} \qquad (10.19)$$

y es la cantidad[9] más representativa para el estudio de la desintegración β nuclear ya que es inversamente proporcional al elemento de matriz nuclear $|H'_{fi}|^2$, único término del que depende.

El valor experimental del producto $ft_{1/2}$va de 10^3 a 10^{20} s. y suele utilizarse para clasificar las desintegraciones β nucleares en permitidas y prohibidas. De hecho se suele tomar el log $ft_{1/2}$, con lo que en el caso de las transiciones superpermitidas ($0^+ \rightarrow 0^+$) toma valores log $ft_{1/2} = 3-4$.

Para calcular el proceso de captura electrónica habrá que tener en cuenta

- que sólo se emite una partícula en el estado final (el ν_e), es decir que la densidad de estados finales es proporcional a $p_\nu^2 \propto Q_{\mathrm{CE}}^2$,
- que el elemento de matriz es idéntico al de la desintegración β,
- y que habrá que incluir la probabilidad $|\Psi_K(0)|^2$ de que un e^- de la capa K se encuentre en el núcleo ($r \sim 0$),

con lo que:

$$\lambda_{\mathrm{CE}} = G_{\mathrm{V}}^2 |M_{fi}|^2 |\Psi_K(0)|^2 Q_{\mathrm{CE}}^2$$

y al sustituir el valor de $|\Psi_K(0)|^2$ queda finalmente:

$$\lambda_{\mathrm{CE}} = \frac{G_{\mathrm{V}}^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 \frac{2\pi m_{\mathrm{e}}}{c\hbar^4} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 Q_{\mathrm{CE}}^2 \qquad (10.20)$$

siendo a_0 el radio de Bohr (a_0 = 0,529 Å). Si se compara λ_{CE} con λ_β se observa que la captura electrónica domina a gran Z, pero que λ_β domina a energía elevada. Las capturas de electrones de la capa K son mucho más probables que las capturas de electrones de otras capas más alejadas. En todo caso, la captura electrónica se detecta gracias a la presencia de un rayo X resultante de llenar el vacío que dejó el electrón capturado en el núcleo hijo.

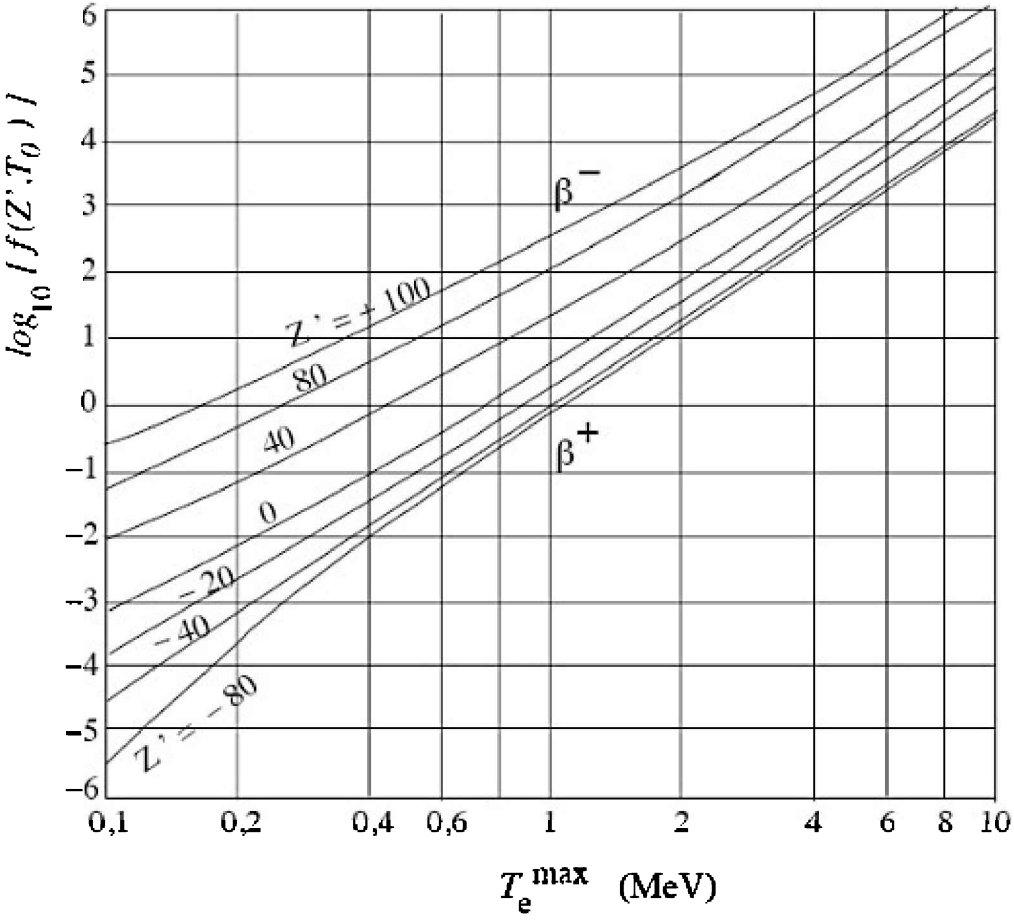


Figura 10.7: Valores de la integral de Fermi definida por la ecuación (10.16). El número atómico Z' es el del núcleo hijo y las curvas para Z' positivo se

refieren a transiciones β^-, mientras que las curvas de Z' negativos se refieren a transiciones β^-. Puede consultarse Feenberg and Trigg, *Rev. Mod. Phys.*, 22 (1950) 399.

10.4.1 Tipos de transiciones y reglas de selección en la desintegración β nuclear

Como siempre, las reglas de selección son consecuencia de los principios de conservación. Al igual que la conservación de la energía, el momento angular debe de conservarse en los procesos nucleares. También es posible encontrar relaciones entre las paridades de los núcleos. En el caso de la desintegración β se trata de conocer las relaciones que pueden darse entre los valores del espín y paridad de los estados nucleares inicial y final.

La ley de conservación del momento angular obliga a tener en cuenta tanto los núcleos como los leptones participantes. Sin embargo, una de las propiedades más sorprendentes de la interacción débil es que la paridad no se conserva. La paridad no es un buen número cuántico para los leptones. Por ello, sólo tendrá sentido estudiar la relación entre paridades de los núcleos.

Recuérdese que el hamiltoniano se puede escribir:

$$|H'_{fi}|^2 = \sum_{mM_f} |\langle f|\mathcal{O}_{\ell,m}(\beta)|i\rangle|^2$$

El orden de la transición viene dado por el momento angular orbital ℓ, o sea el rango del operador $\mathcal{O}_{\ell m}(\beta)$ que interviene en el elemento de matriz nuclear $|H'_{fi}|$. Ya se ha visto que el valor de ℓ del hamiltoniano clasifica las desintegraciones β en: permitidas y prohibidas según que $\ell = 0$ o $\ell = 0$.

Ahora bien, para cada tipo de transición deberán tenerse en cuenta las siguientes reglas:

1 La diferencia entre los espines de los estados nucleares: $\Delta J = |J_f - J_i|$, coincidirá con el momento angular total que poseen los leptones: $\Delta J = s_e + s_\nu + \ell$.

2 La relación entre las paridades de los núcleos $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f \cdot \Delta\mathcal{P}$, en donde $\Delta\mathcal{P} = (-1)^\ell$, viene definida por el momento angular orbital ℓ.

Por lo tanto, para cada orden (o para cada valor de ℓ) se tendrá:

- transiciones Fermi.
  Se cumplirá ΔJ = ya que $s_e + s_\nu = 0$; los elementos de matriz serán los que den cuenta del cambio de carga $p \longleftrightarrow n$ (cambio de la tercera componente del isospín);

$$\langle f|T_\mp|i\rangle = \sqrt{T_i(T_i+1) - T_{3i}(T_{3i}\mp 1)}\,\delta_{J_f J_i}\delta_{M_f M_i}\delta_{T_f T_i}\delta_{T_{3f} T_{3i}\mp 1} \tag{10.21}$$

en donde $T_\mp = \sum_{j=1}^{A} \tau_\mp(j)$, es el isospín nuclear y T_3 representa la componente z (ó tercera componente) del isospín nuclear. En la anterior expresión (10.21), las deltas de Kronecker contienen explícitamente las reglas de selección de las transiciones Fermi.

- transiciones Gamow–Teller.
  En este caso se tendrá $\Delta J = \ell + 1$ puesto que $s_e + s_\nu = 1$. También podrá existir cambio de isospín además del cambio de la tercera componente. Los elementos de matriz serán:

$$\langle f|\sum_{j=1}^{A} \tau_\mp(j)\sigma(j)|i\rangle$$

calculables una vez conocidos los estados $|i\rangle$, $|f\rangle$.

Los cálculos de los elementos $\langle f|\sigma(j)|i\rangle$ pueden realizarse utilizando las componentes esféricas (las matrices de Pauli son tensores esféricos de rango 1) de la matriz σ, relacionadas con las componentes x, y, z:

$$\sigma_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x \pm i\sigma_y) \qquad \text{y} \qquad \sigma_0 = \sigma_z$$

Habrá transiciones permitidas y transiciones prohibidas en cada uno de los tipos de transiciones beta nucleares estudiadas, Fermi o Gamow–Teller, como se describe a continuación.

Transiciones permitidas ($\ell = 0$)

Se clasifican en dos tipos. Corresponden a los dos términos del hamiltoniano:

$$\textbf{a) Fermi: } \vec{s}_e + \vec{s}_\nu = 0, \begin{cases} \Delta J = 0, & \\ \Delta T = 0, & \text{pero } T_i + T_f \neq 0, \\ |\Delta T_3| = 1, & \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f & \text{no hay cambio de parida} \\ & \text{entre núcleos} \end{cases}$$

Las transiciones Fermi puras tipo $0^+ \rightarrow 0^+$ se llaman *transiciones superpermitidas*. Con ellas se puede determinar la constante de acoplamiento de Fermi G_V. En efecto, el elemento de matriz de la transición vale $H'_{fi} = G_V\sqrt{2}$ conloque:

$$\boxed{ft_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1 2 G_V^2}} \qquad (10.22)$$

Ejemplos de medidas experimentales realizadas con desintegraciones β^+ entre núcleos (puede tratarse del estado fundamental o de un estado excitado, caso del ^{26}Al) con espín–paridad 0^+, son los siguientes:

desintegración	$ft_{1/2}(s)$
$^{10}\mathrm{C} \rightarrow {}^{10}\mathrm{B}$	3100 ± 31
$^{14}\mathrm{O} \rightarrow {}^{14}\mathrm{N}$	3092 ± 4
$^{26}\mathrm{Al} \rightarrow {}^{26}\mathrm{Mg}$	3081 ± 4
$^{54}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{54}\mathrm{Fe}$	3091 ± 5

todos ellos emisores β^+. Se trata de transiciones del elemento $T_3 = +1$ al $T_3 = 0$ del triplete de isospín. Por ello el elemento de matriz vale $\langle F \rangle = \sqrt{2}$, al calcular el valor esperado (10.21).

Se obtiene así para la constante de Fermi, $G_V = 0{,}88 \times 10^{-4}$ MeV fm^3, que, al eliminar las dimensiones, tomando la masa del protón como unidad $G_V(m_p c^2)^2/(\hbar c)^3$, queda:

$$G_V \simeq 1{,}0 \times 10^{-5} \qquad (10.23)$$

directamente comparable a las constantes de acoplamiento de las otras fuerzas: α_s 1; $\alpha \simeq$ = 1/137 y $G_N = 10^{-39}$.

Ya se verá en su momento (en el estudio de las interacciones débiles entre partículas), que al comparar con otros procesos entre partículas, la constante universal de Fermi, G_F, está relacionada con G_V por la expresión $G_V = G_F \cos \theta_C$, en donde aparece elángulo de Cabibbo, que vale $\cos \theta_C$ = 0,975. Un proceso en el que interviene G_F es la desintegración leptónica del $\mu^{\pm}$, por ejemplo en $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \overline{\nu}_e$, puesto que G_F es la constante de acoplo universal W$\ell\nu$. Sin embargo, los procesos de desintegración de hadrones (y núcleos) se explican a través del cambio de sabor de quarks o sea, en el caso del quark u, a través de los acoplos Wud, Wus y Wub que valen respectivamente 0,975, 0,222 y 0,004. Esta propiedad de ausencia de mezcla de generaciones leptónicas contraria a la posibilidad de mezcla entre generaciones de quarks tiene consecuencias observables muy

importantes; entre ellas, la no existencia de hipernúcleos estables, es decir, núcleos en los que algún nucleón es reemplazado por un hiperón. Estos hipernúcleos se han observado (véase sección 3.7.7), pero con vidas medias igual a las de los hiperones (Λ^0, por ejemplo).[10]

b) Gamow–Teller: $\vec{s}_e + \vec{s}_\nu = 1$,
$$\begin{cases} \Delta J = 0, \pm 1 & (0 \not\to 0) \\ |\Delta T| = 0, 1 & \text{pero } T_i + T_f \neq 0. \\ |\Delta T_3| = 1 & \\ \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f & \text{no cambia la paridad} \end{cases}$$

Una transición pura Gamow–Teller, permitida, es ^{6}He → ^{6}Li + e$^-$ + $\overline{\nu}_e$, que es de tipo $0^+ \to 1^+$. Su semiperiodo es $t_{1/2}$ = 0,8 s, la energía del *end–point* T_0 = 3,51 MeV y log $ft_{1/2}$ = 2,77.

En el caso más general en el que se den transiciones mezcla de Fermi y Gamow–Teller, el elemento de matriz nuclear ya se ha visto que vale:

$$|H'_{fi}|^2 = G_V^2 \left\{ \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \right\}$$

Aplicado a la desintegración del neutrón ($1/2^+ \to 1/2^+$), que es un caso en el que existe mezcla de transición Fermi: $\langle F \rangle^2 = 1$ y Gamow–Teller:

$$\langle GT \rangle^2 = \sum_{\mu m_f} | \langle \chi m_f | \sigma_\mu | \chi m_i \rangle |^2 = 3$$

permite determinar g_A. La figura 10.4 ayuda a entender este proceso y el significado de los dos términos. Así pues, en este caso se tiene:

$$ft_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1 G_V^2 \left\{ \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \right\}} \qquad (10.24)$$

con $\dfrac{\ln 2}{k_1 G_V^2}$ = 6141,2 ± 3,2 *s*. Para el neutrón, $t_{1/2}$(n) = 610,2 ±0,8 s; con

ello y tomando el valor de la función integral *f*, se llega a $ft_{1/2}$ = 1061 ± 9 *s*, conloque $|g_A|$ = 1,26. Otras medidas son sensibles al signo y se encuentra que el signo es negativo. La mejor determinación actual de la constante $g_A$da como valor:

$$\boxed{g_A = -1,267 \pm 0,003} \qquad (10.25)$$

Es por ello por lo que se denomina teoría V–A.

Transiciones prohibidas ($\ell = 0$)

En este caso los operadores $\mathcal{O}$ transportarán momento angular orbital $\ell \neq 0$. Las probabilidades de transición λ serán muy pequeñas ya que con $\ell > 0$ habrá barreras de momento angular que inhibirán la emisión de los leptones. De nuevo habrá dos términos:

a) Fermi: conteniendo productos $rY_{\ell\, m}(\theta, \varphi)$ que inducen cambios en los espines nucleares que cumplen $\Delta \mathbf{J} = \ell$,

b) Gamow–Teller: que contienen $[\vec{\sigma} \times rY_{\ell,m}(\theta, \phi)]_{\lambda,\mu}$ e inducen cambios en los espines nucleares que cumplen $\Delta J = \ell \pm 1$.

Si entre momentos angulares, por ejemplo, se cumple $\Delta \mathbf{J} = \ell$, entonces esto implica que:

$$|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f \qquad (10.26)$$

La paridad de los estados nucleares deberá cumplir $\Delta \mathcal{P} = (-1)^{\ell}$, siendo el rango del armónico $Y_{\ell\, m}$ (θ, φ). Las reglas de selección serán consecuencia del valor de ℓ, combinando con singlete de espín para transiciones F y triplete de espín para las de GT.

Si bien, según la relación (10.26) existen una serie de valores del momento angular orbital ℓ permitidos, sólo serán importantes aquellos que sean más probables, que son los de menor ℓ, y se cumplirán las reglas de conservación tal y como se clasifican a continuación.

i) 1.º prohibidas ($\ell = 1$) (Entre paréntesis, valores no permitidos si J_i o $J_f = 0$)

$$\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}_f$$

$$\begin{cases} \text{Fermi, } |\Delta J| = (0), 1 \\ \text{Gamow–Teller, } |\Delta J| = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Ejemplo: $^{76}\text{Br} \rightarrow {}^{76}\text{Se}\ (1^- \rightarrow 0^+)$

ii) 2.º prohibidas ($\ell = 2$)

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f$$

$$\begin{cases} \text{Fermi, } |\Delta J| = (1), 2 \\ \text{Gamow–Teller, } |\Delta J| = 2, 3. \end{cases}$$

Ejemplo: $^{22}\text{Na} \rightarrow {}^{22}\text{Ne}\ (3^+ \rightarrow 0^+)$

iii) 3.º prohibidas ($\ell = 3$)

$$\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}_f$$

$$\begin{cases} \text{Fermi, } |\Delta J| = (2), 3 \\ \text{Gamow–Teller, } |\Delta J| = 3, 4. \end{cases}$$

Ejemplo: $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{40}_{20}\text{Ca}\ (4^- \rightarrow 0^+)$

En las 2.ºprohibidas (3.º prohibidas) Gamow–Teller, no cabe considerar el caso $|\Delta J| = 1(2)$, ya que entonces sería una transición permitida (1.º prohibida).

Incluso se conoce un caso de 4.º prohibidas ($|\Delta J| = 4{,}5$), $^{115}\text{In}(9/2^+) \rightarrow {}^{115}\text{Sn}(1/2^+)$, que cumple $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f$ y cuya transición tiene lugar entre núcleos con $|\Delta J| = 4$. Para esta desintegración, $Q_\beta = 495$ keV, el valor log $ft_{1/2} = 22{,}5$ lo que da lugar a una semivida muy larga, $t_{1/2} = 4{,}4 \times 10^{14}$ a˜nos. El lector puede verificar, con los datos de espín–paridad de los siguientes núcleos, que sus desintegraciones beta se clasifican como en la tabla que sigue:

desintegración	tipo
$_{19}\mathrm{K}(4^-) \rightarrow {}_{18}\mathrm{Ar}(0^+)$	3.º prohibida Gamow–Teller
$_{30}\mathrm{Zn}(3/2^-) \rightarrow {}_{29}\mathrm{Cu}(5/2^-)$	permitida Gamow–Teller
$_{30}\mathrm{Zn}(3/2^-) \rightarrow {}_{29}\mathrm{Cu}(3/2^-)$	permitida Fermi
$_{35}\mathrm{Br}(2^-) \rightarrow {}_{36}\mathrm{Kr}(2^+)$	1.º prohibida Gamow–Teller

Los valores de la semivida comparativa log $ft_{1/2}$, se corresponden bastante bien al nivel de prohibición de las transiciones β nucleares dando lugar a una clasificación que puede verse en la figura 10.8 y cuyas regularidades están de acuerdo (aproximado) con la siguiente tabla:

tipo	$\log ft_{1/2}$
super–permitidas	$3-4$
permitidas	$4-8$
1.º prohibidas	$6-10$
2.º prohibidas	$10-14$
3.º prohibidas	$14-20$

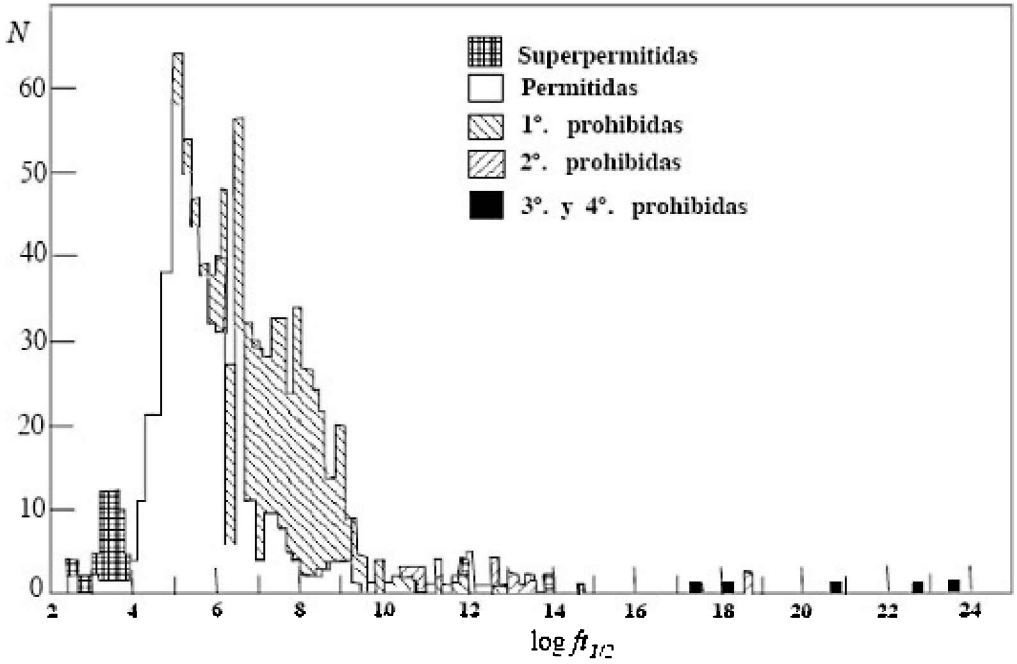


Figura 10.8: Distribución de valores observados de log $ft_{1/2}$ tomados de Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, 1967.

10.5 Experimento de Reines y Cowan

En 1995 se concedió el premio Nobel de Física a F. Reines y a M. Perl. Al primero, por la primera evidencia experimental del $\overline{\nu}_e$ a través de la detección de las interacciones de antineutrinos procedentes de un reactor nuclear,[11] sobre un blanco de $CdCl_2$ y agua; al segundo por el descubrimiento de otro leptón (el tauón),[12] el $\tau^{\pm}$, leptón que fue detectado gracias a la aniquilación $e^+e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$ estudiada en el colisionador SPEAR del laboratorio SLAC en Stanford (EEUU). Su masa es m_τ = 1777 MeV/c^2, por lo tanto es el más masivo de los leptones cargados. Tiene una vida media $\tau_\tau = 0{,}291 \times 10^{-12}$ s.

Para realizar el experimento, Reines y Cowan (1959) partieron de un flujo incidente de $\overline{\nu}_e$ procedentes de un reactor nuclear (véase figura 10.9). Como se emiten, en promedio, unos 6 $\overline{\nu}_e$ por fisión, en un reactor de 1000 MW que es el que utilizaron (como el de Cofrentes), el flujoútil

de $\overline{\nu}_e$ era del orden de 10^{13} cm^{-2} s^{-1} a varios metros de distancia del corazón del reactor.

La probabilidad de interacción de los neutrinos (o antineutrinos) es extremadamente pequeña; considérese la reacción:

$$\boxed{\overline{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+} \qquad (10.27)$$

que puede tener lugar porque se conserva el número leptónico electrónico L_e, definido para el e y el neutrino ($L_e = -1$ en (10.27) por tratarse de antileptones, en ambos lados de la reacción). La sección eficaz será $\sigma = \lambda/\varphi_i$ siendo φ_i el flujo incidente de neutrinos (proporcional a la velocidad de los neutrinos en el centro de masas, v_i=c), o sea:

$$\sigma = \frac{\text{prob de reacción/átomo}}{\text{flujo de } \nu} = \frac{\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{V^2}|H'_{fi}|^2 \frac{4\pi p^2 V dp}{h^3 dE}}{c/V} = \frac{1}{\pi c^2 \hbar^4}|H'_{fi}|^2 p^2$$

es decir:

$$\sigma = \frac{G_V^2}{\pi c^2 \hbar^4}\left(\langle F\rangle^2 + g_A^2\langle GT\rangle^2\right)p^2 \approx \frac{4G_V^2 p^2}{\pi c^2 \hbar^4} \qquad (10.28)$$

ya que $\langle F\rangle^2 = 1,\ g_A^2\langle GT\rangle^2 \sim 3$ y p representa el momento del neutrón o del positrón en el centro de masas.

Se tiene así que, para neutrinos de energías del orden de 1 MeV, la sección eficaz vale $\sigma \approx 10^{-43}$ cm^2; o sea, tienen un recorrido libre medio en el agua $\langle \ell \rangle = \frac{1}{n\sigma} = 10^{20}$ cm (n es la densidad volúmica de blancos en el agua), que representa ¡unos 100 años luz! de recorrido en el agua.

La detección del neutrino a partir de la reacción (10.27) quedó probada al detectar varias reacciones mediante la presencia de 2 pulsos separados entre síde varios microsegundos. Los pulsos electrónicos corresponden a

la interacción de los fotones procedentes de la aniquilación del positrón (~ 10^{-9} s.), fenómeno casi instantáneo, seguidos de un pulso debido al fotón de la desexcitación del Cd*, producido por captura neutrónica (proceso que tiene lugar tras el tiempo necesario de termalización de los neutrones en el agua), es decir unos 10 microsegundos después. En ambos casos, los fotones eran detectados a través del efecto Compton o del efecto fotoeléctrico en el centelleador.

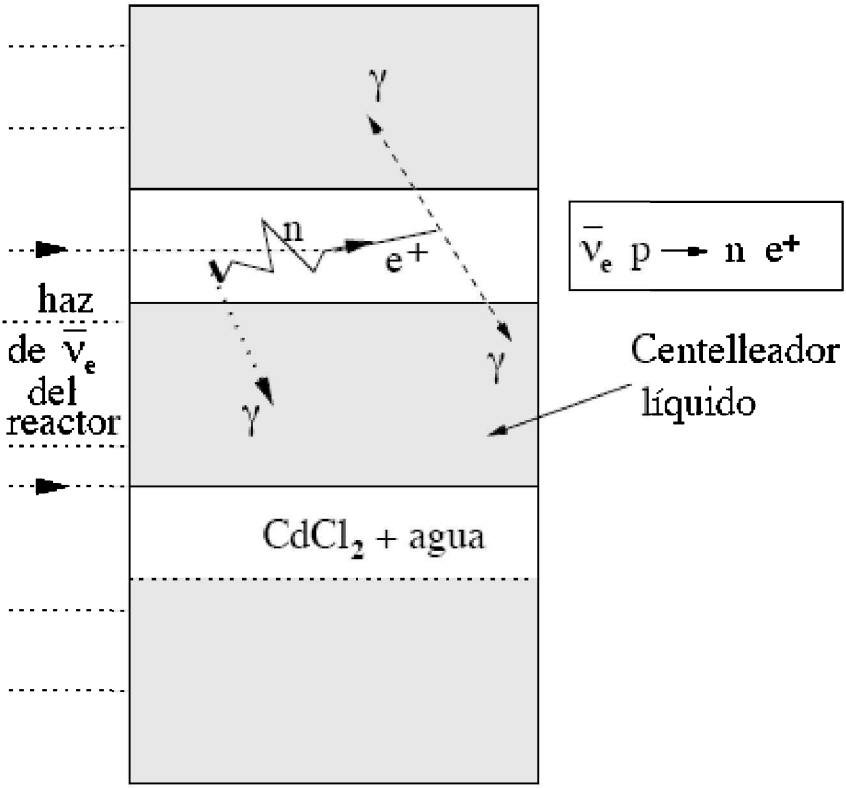


Figura 10.9: Esquema del experimento de Reines y Cowan que detectó antineutrinos procedentes de un reactor nuclear.

10.6 Violación de la paridad en la desintegración β

Se ha visto que los núcleos poseen un número cuántico, llamado paridad; toma los valores +, − y es necesario ya que se conserva en las

interacciones fuertes y electromagnéticas (véanse por ejemplo, las reglas de selección en las desintegraciones alfa y gamma). Sin embargo, fue una sorpresa descubrir que existe violación de la paridad en la desintegración beta (propuesta inicialmente por T. D. Lee y C. N. Yang,[13] 1956). Se tuvo evidencia tras la observación de que la partícula $K^+(J^{\mathcal{P}} = 0^-)$ podía desintegrarse a dos estados finales de distinta paridad (el estado $\pi^+\pi^0$, con paridad $\mathcal{P}$ = +1, bautizado como partícula θ o el estado $\pi^+\pi^+\pi^-$, con paridad $\mathcal{P}$ = −1, bautizado τ). Es lo que se denominóel *puzzle* $\theta - \tau$.

La primera confirmación de la violación de la paridad viene del estudio de la distribución angular de los electrones emitidos por el cobalto (figura 10.10) polarizado a baja temperatura, que confirmó experimentalmente que la paridad no se conserva en los procesos debidos a la interacción débil. Se observó una asimetría respecto al espín del Co en la emisión de los electrones (70 % de los e^- son emitidos en la dirección opuesta a la del espín del ^{60}Co). Este experimento fue realizado por Mme. Wu[14] y colaboradores.

Posteriormente, la no conservación de la paridad en las interacciones débiles fue confirmada en otros procesos entre partículas (desintegración del muón o del pión). Esta violación está implícita en la propia teoría V–A que explica la desintegración beta de los núcleos (en efecto, el hamiltoniano V–A es una suma de términos que se comportan de manera opuesta ante la operación de paridad).

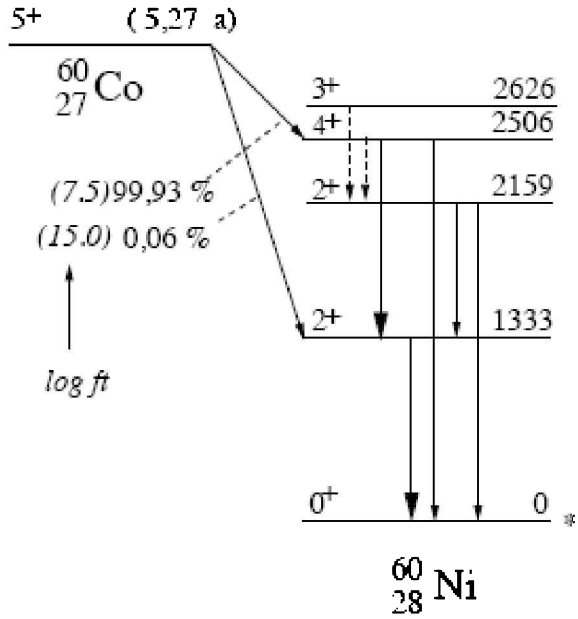


Figura 10.10: Desintegración beta del $^{60}_{27}\mathrm{Co}$. La desintegración más probable, puebla el nivel excitado $J^{\mathcal{P}} = 4^+$ del $^{60}_{28}\mathrm{Ni}$. Se trata de una transición tipo permitida, pura Gamow–Teller.

10.7 Espectroscopía β. Desintegración doble beta

La desintegración doble beta:

$$A(Z,N) \rightarrow A(Z+2,N-2) + 2\mathrm{e}^- + 2\overline{\nu}_\mathrm{e} \qquad (10.29)$$

es una desintegración rara, que tiene lugar entre dos núcleos con el mismo número másico A y es un proceso de segundo orden, que cambia la carga nuclear Z en dos unidades. Su interés es debido a que esta desintegración puede informar sobre la naturaleza de los neutrinos. Existe la conocida desintegración doble beta *estándar* ($\beta\beta 2\nu$), como desintegración beta de segundo orden, por ejemplo la desintegración doble beta del ^{82}Se al ^{82}Kr visible en la figura 10.11, donde se representan las masas de los núcleos, y se entiende porqué existe este tipo de desintegración. Se ha observado en

varios núcleos como: $^{48}_{20}\mathrm{Ca}, ^{76}_{32}\mathrm{Ge}, ^{100}_{42}\mathrm{Mo}, ^{82}_{34}\mathrm{Se}$ o $^{150}_{60}\mathrm{Nd}$. Las semividas medidas valen alrededor de 10^{20} a˜nos.[15]

Si los neutrinos tuvieran masa y fueran de tipo Majorana, podría existir la desintegración doble beta sin neutrinos ($\beta\beta 0\nu$), prohibida en el marco del Modelo Estándar por violar el número leptónico. En este caso, el semiperíodo se calcula:

$$\frac{1}{t^{0\nu}_{1/2}} = |M^{0\nu}_{if}|^2 m^2_{\beta\beta} \rho_{0\nu}(Q_{\beta\beta}, Z)$$

siendo $|M^{0\nu}_{if}|$ el elemento de matriz nuclear, $m_{\beta\beta}$ la masa efectiva Majorana del ν_e y $\rho_{0\nu}$, el espacio fásico.

La teoría convencional supone que los neutrinos (sin masa) son soluciones de la ecuación de Dirac; sólo existen el neutrino levógiro (ν_L) y el antineutrino dextrógiro $(\overline{\nu}_R)$. Según la teoría de Majorana, neutrino y antineutrino son la misma partícula, $\nu = \overline{\nu}$ (únicamente se distinguen por su helicidad, $\nu_L = \nu_R$). Pero, si tienen masa nula, no puede distinguirse entre Dirac y Majorana. Si existiera desintegración doble beta sin emisión de neutrinos se demostraría (indirectamente) que la masa del neutrino es distinta de cero. Se puede pensar que si los dos neutrinos son de tipo Majorana, se aniquilan y no son emitidos en la desintegración.

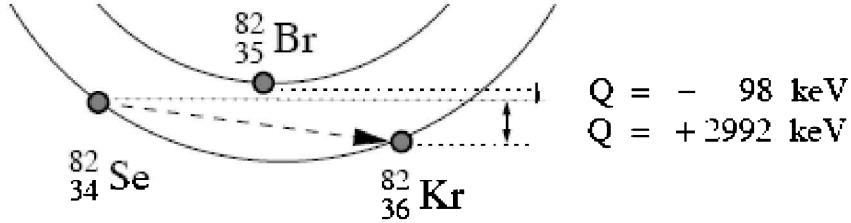


Figura 10.11: Desintegración doble beta del ^{82}Se $\rightarrow ^{82}$Kr. A través de una ampliación de la zona del mínimo de la parábola de masas para $A = 82$, se muestra la imposibilidad de desintegración del Se al Br ya que $Q < 0$. La desintegración $^{82}_{34}\mathrm{Se} \rightarrow ^{82}_{36}\mathrm{Kr} + 2e^- + 2\overline{\nu}_e$ fue la primera evidencia experimental de la desintegración doble beta de un núcleo (Elliot *et al., Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2020).

Por el experimento de R. Davis (1955),[16] que estudiaba neutrinos procedentes de reactores nucleares, se sabe que el neutrino *real* es distinto del antineutrino. En efecto, no se encontróningún núcleo de $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ radiactivo procedente de la reacción $\overline{\nu}_e + {}^{37}_{17}\mathrm{Cl} \nrightarrow \mathrm{e}^- + {}^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. Ello es consistente con la conservación del número leptónico: la reacción $\overline{\nu}_e + n$ no puede tener lugar. Pero en la reacción doble beta se podría tratar de neutrinos virtuales, que podrían aniquilarse en el caso de ser tipo Majorana. Entonces el doble beta sin neutrinos sería más rápido que los procesos con neutrinos en el estado final, por cuestiones de espacio fásico.

Hay dos tipos de medidas que se llevan a cabo en el estudio de las desintegraciones doble beta.

a) Por espectroscopía de masas, contando el número deátomos del núcleo padre e hijo. Por ejemplo, en rocas de Te se encuentran núcleos de Te. La medida de $t_{1/2}$(Te) se obtiene al comparar los números deátomos de cada tipo:

$$N_{\mathrm{Xe}} = N_{\mathrm{Te}}\left(1 - e^{-\lambda T}\right) \approx N_{\mathrm{Te}}\frac{T \ln 2}{t_{1/2}} \qquad (10.30)$$

Así se han determinado por ejemplo los siguientes semiperiodos de doble beta estándar:

$$^{128}_{52}\mathrm{Te} \rightarrow {}^{128}_{54}\mathrm{Xe} \quad (3,5 \pm 1,0) \times 10^{24} \text{ años}$$
$$^{82}_{34}\mathrm{Se} \rightarrow {}^{82}_{36}\mathrm{Kr} \quad (1,7 \pm 0,3) \times 10^{20} \text{ años}$$

b) Método directo.

Si efectivamente el neutrino y el antineutrino son la misma partícula ($\nu_e \equiv \overline{\nu}_e$), entonces puede tener lugar la desintegración doble beta sin neutrinos en el estado final: $X \rightarrow X'' + 2e^-$. Aparecería un pico correspondiente a la suma de las energías de los dos e^-, por ejemplo en el $^{76}_{32}\mathrm{Ge} \rightarrow {}^{76}_{34}\mathrm{Se}$ el pico estaría situado a una energía $E(2e^-)$ = 2,04 MeV. El experimento en el observatorio del Mont–Blanc ha

medido la desintegración con neutrinos y ha obtenido $t_{1/2} = 5 \times 10^{21}$ a˜nos. Otros experimentos (uno de ellos, espa˜nol, en el túnel de Canfranc, en los Pirineos aragoneses), están en funcionamiento actualmente. No se tiene evidencia experimental concluyente de la existencia de desintegraciones doble beta sin neutrinos. El límite experimental actual sobre la vida media de la desintegración doble beta sin neutrinos es:

$$\tau(^{76}\mathrm{Ge} \rightarrow {}^{76}\mathrm{Se} + 2\mathrm{e}^- + 0\nu) > 10^{26} \text{ años}$$

que, es el límite con el que se ha verificado la conservación del número de leptones.

10.8 Problemas

10.1 Desintegración β y calor de reacción

Indicar cuál de los dos núcleos del siguiente par de isóbaros es inestable, su modo de desintegración y la energía total aproximada liberada en la desintegración:

$$(^{7}\mathrm{Li}, {}^{7}\mathrm{Be}) \quad (^{13}\mathrm{C}, {}^{13}\mathrm{N}) \quad (^{34}\mathrm{P}, {}^{34}\mathrm{S}) \quad (^{35}\mathrm{S}, {}^{35}\mathrm{Cl}) \quad (^{19}\mathrm{Fc}, {}^{19}\mathrm{Ne})$$

10.2 Desintegración β superpermitida

Considerar el ejemplo clásico de la desintegración β^+de Fermi superperimitida del ^{14}O al estado excitado de 2,3 MeV del ^{14}N que se muestra en la figura 10.12:

$$^{14}\mathrm{O} \rightarrow {}^{14}\mathrm{N}^*(2312{,}9) + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$$

a) Obtener el espín–paridad J^P e isospín de los estados inicial y final.

b) Calcular la energía máxima de los positrones para las desintegraciones del ^{14}O.

c) Calcular el semiperíodo $t_{1/2}$ de la desintegración superpermitida del ^{14}O conocido el valor de la integral de Fermi $f(Z, E_0)$ = 43,398, con Z el número atómico del núcleo de desintegración y E_0 la energía máxima del positrón. Comparar el resultado con el valor experimental de $t_{1/2}$ = 70588 ±28 ms.

d) Obtener el espín–paridad e isospín del estado fundamental del ^{14}N y establecer el tipo de desintegración β de los estados fundamentales del ^{14}O y ^{14}C al fundamental del ^{14}N. Comparar los elementos de matriz para las transiciones β^+ y β^-.

e) Estimar la dependencia del semiperíodo con el número másico A para este tipo de desintegraciones y aplicarlo para calcular el semiperíodo de la desintegración $^{54}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{54}_{26}\mathrm{Fe} + \beta^+ + \nu$. Emplear para ello los resultados del apartado c) y comparar el resultado con el valor experimental de 0,19s.

Datos: Constante de Fermi: g = 1,4 ×10^{-49} erg cm^3.

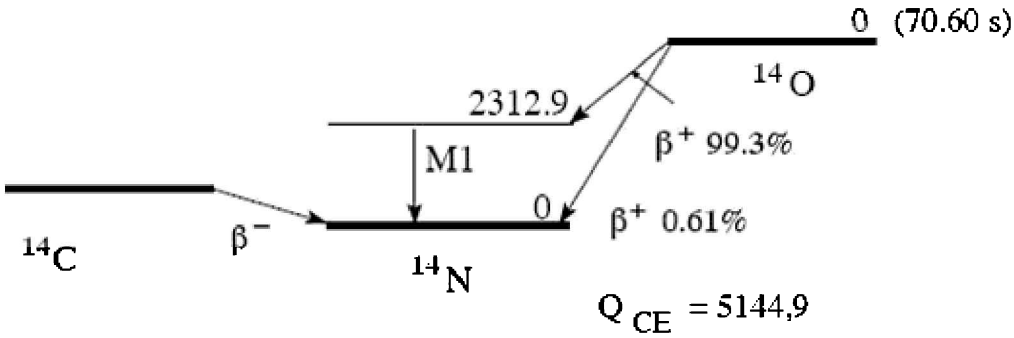


Figura 10.12: Esquema de desintegración β^+del ^{14}O y espectro de niveles energéticos del ^{14}N. Todas las energías se dan en keV.

10.3 Elementos de matriz para la desintegración β

a) Mostrar que para una desintegración β entre núcleos espejo (el número de protones de uno es igual al de neutrones del otro y viceversa) del mismo momento angular total j, los elementos de matriz vienen dados por:

$$|M^{\mathrm{F}}|^2 = 1$$
$$|M^{\mathrm{GT}}|^2 = (j+1)/j \qquad j = l + 1/2$$
$$|M^{\mathrm{GT}}|^2 = j/(j+1) \qquad j = l - 1/2$$

b) Demostrar que para una transición β del tipo Gamow–Teller en un modelo extremo de partícula individual donde la transición es atribuida al

nucleón de valencia se tiene que, si hay cambio de momento angular total:

$$|M^{\mathrm{GT}}|^2 = \frac{2j_f + 1}{l + 1/2} \quad \begin{cases} j_i = l + 1/2 & j_f = l - 1/2 \\ j_i = l - 1/2 & j_f = l + 1/2 \end{cases}$$

con j_i el momento angular del estado inicial y j_f el del final.

10.4 Desintegración β. Elementos de matriz

Aplicar los resultados del Problema 10.3 al cálculo de los elementos de matriz de las transiciones:

a) $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}$
$(1/2^+ \rightarrow 1/2^+)$

b) $^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \overline{\nu}_e$
$(1/2^+ \rightarrow 1/2^+)$

c) $^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu_e$
$(1/2^- \rightarrow 1/2^-)$

d) $17F \rightarrow {}^{17}O + e^+ + \nu_e$
$(5/2^+ \rightarrow 5/2^+)$

e) $^{39}Ca \rightarrow {}^{39}K + e^- + \overline{\nu}_e$
$(3/2^+ \rightarrow 3/2^+)$

f) $^{41}Sc \rightarrow {}^{41}Ca + e^+ + \nu_e$
$(7/2^- \rightarrow 7/2^-)$

10.5 Desintegración β retrasada de partículas

En la desintegración del ^{17}Ne se produce ^{17}F en un estado excitado de alta energía, el cual se desintegra al estado fundamental del ^{16}O emitiendo un protón de 10,597 MeV en lo que se conoce como desintegración β retrasada de protones (ver figura 10.5). Se pide:

a) ¿Cuál es el valor de la energía máxima de los positrones emitidos en la desintegración al estado excitado del ^{17}F?

b) Calcular el valor máximo de la energía de los protones emitidos en la desintegración del flúor ^{17}F.

c) Establecer la posibilidad de emisión de otras partículas por parte del ^{17}F, como partículas α o neutrones, y determinar sus energías de excitación.

Datos: $S_p(^{17}F)$ = 600,27 keV, $S_n(^{17}F)$ = 16,8 MeV y S_α (^{17}F) = 5,819 MeV.

10.6 Reglas de selección en la desintegración β

Clasificar las siguientes desintegraciones β por su tipo (Fermi, Gamow– Teller) y por su grado de prohibición:

a) $^{89}Sr(5/2^+) \rightarrow {}^{89}y(1/2^-)$

b) $^{36}Cl(2^+) \rightarrow {}^{36}Ar(0^+)$

c) $^{26}Al(5^+) \rightarrow {}^{*26}Mg(2^+)$

d) $^{97}Zr(1/2^+) \rightarrow {}^{*97}Nb(1/2^-)$

e) $n \rightarrow p + e^- + \nu f)\ {}^{60}Co(5^+) \rightarrow {}^{60}Ni(4^+)$

g) $^{17}F(5/2^+) \rightarrow {}^{17}O(5/2^+)$

h) $3H(1/2^+) \rightarrow {}^{3}He(1/2^+)$

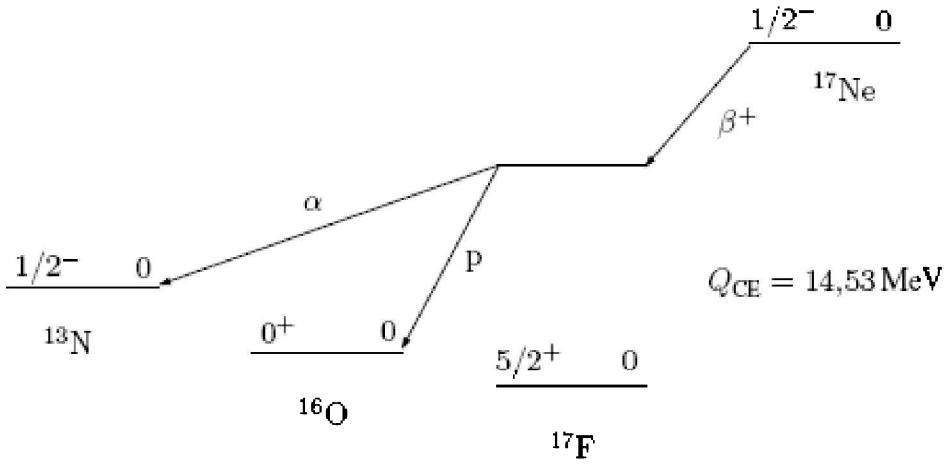


Figura 10.13: Desintegración β^+retrasada de partículas para el ^{17}Ne.

10.7 Espectro β y masa del neutrino

Estudiar la influencia del valor de la masa del neutrino, m_ν, sobre la forma teórica del espectro β en las proximidades de su límite superior.

10.8 Captura electrónica

Calcular mediante el uso de la Regla de Oro de Fermi el cociente entre las probabilidades de desintegración β^+ y de captura electrónica, $\lambda_{\beta+}/\lambda_{EC}$. Tomar la aproximación $p_{\beta+}^{\text{máx}} \ll m_e c$ y no considerar el efecto del campo de Coulomb sobre los leptones cargados emitidos durante la desintegración.

10.9 Diagrama de Kurie

El ^{24}Na es un emisor β^-con un semiperíodo de $t_{1/2}$ = 15,0 h. A partir de los datos de la tabla 10.3 para el número de cuentas por unidad de intervalo de momento y el producto $B\rho$(rigidez magnética expresada en G cm) del espectrómetro magnético, construir el diagrama de Kurie y determinar la energía del punto final del espectro β.

Tabla 10.3: Cuentas por unidad de momento $I(p)$ y rigidez magnética $B\rho$(G cm)

para el espectro de desintegración β^+del ^{24}Na.

$B\rho$	5950	5600	5280	4950	4600	4280	3950	3600	
$I(p)$	0.7	4,0	9,3	15.5	23,0	29,9	34,6	39,7	
$B\rho$	3280	2950	2600	2280	1950	1600	1280	950	600
$I(p)$	42,0	41,1	39,7	37,8	32,1	26,2	22,2	16,0	7,8

10.10 Captura electrónica y neutrinos solares

Uno de los procesos responsables de la producción de neutrinos en el Sol es la desintegración por captura electrónica del ^{7}Be al estado fundamental estable del ^{7}Li:

$$^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \longrightarrow {}^7\mathrm{Li} + \nu_\mathrm{e}$$

a) Establecer los diferentes modos de desintegración por captura electrónica del estado fundamental del ^{7}Be y estimar sus probabilidades relativas de desintegración así como el cociente entre sus semividas comparativas *ft* a partir del diagrama de la figura 10.10.

b) Calcular la energía de los neutrinos emitidos y la energía del núcleo de retroceso del litio.

c) Para la detección de neutrinos solares y la medida experimental de su flujo se puede emplear un detector de litio enriquecido con el isótopo ^{7}Li y la determinación por métodos radioquímicos de la cantidad del isótopo ^{7}Be Fiproducido en la reacción de captura:

$$\nu_\mathrm{e} + {}^7\mathrm{Li} \longrightarrow {}^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^-$$

Estimar la frecuencia de desintegración del ^{7}Be producido en equilibrio si se emplea para calibrar el detector una fuente de neutrinos monocromáticos de 10^{17}*v*/ sy 1,5 MeV de energía situada en el centro de una tonelada métrica esférica de litio. Tomar para la sección eficaz de captura por el litio a esta energía el valor 6,8 $\times 10^{-44}$cm^2.

Datos: $g_A = C_{GT}/C_F = -1{,}259$, $\rho(^7\text{Li}) = 0{,}53$ g/cm^3.

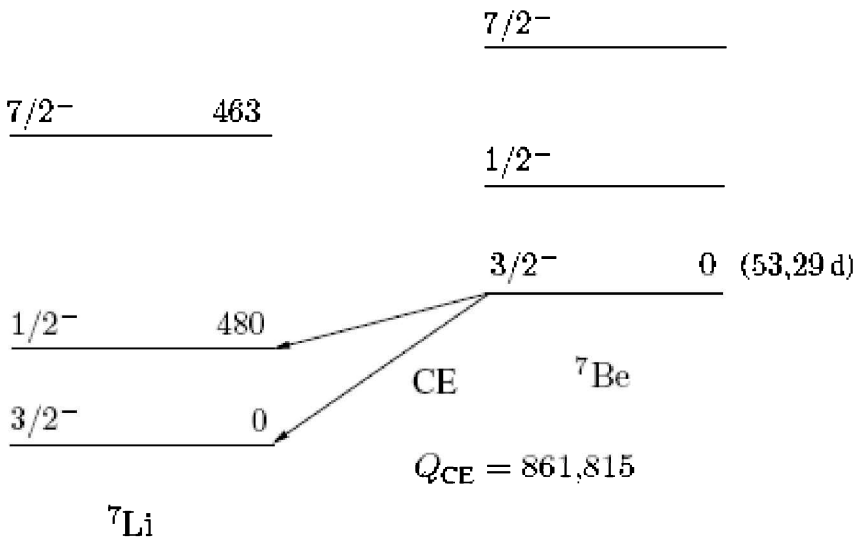


Figura 10.14: Niveles energéticos del ^{7}Be y ^{7}Li. Todas las energías se dan en keV.

---

[1]Laboratorio europeo para la física de partículas, Ginebra, Suiza.

[2]En efecto, $\mathcal{M}(^7_4\text{Be}) = 7{,}016928$ u; $\mathcal{M}(^7_3\text{Li}) = 7{,}016003$ u, con lo que $\Delta\mathcal{M} = 925\times10^{-6}$ u = 0,862 MeV.

[3]Las iniciales informan del tipo de término que se trata: *S*, escalar; *P*, pseudoescalar; *V* vector polar, *A* vector axial y *T* tensor.

[4]Al igual que en el caso de los operadores de espín (matrices de Pauli), ahora también se tiene $\tau_\pm = (\tau_x \pm i\tau_y)$.

[5]Este teorema se estudia en la sección 16.5.4 del capítulo dedicado a las simetrías.

[6]Ch. Krauss *et al.*, *Eur. Phys. J.*, **C40** (2005) 447

[7]V. N. Aseev *et al.*, *Phys. Rev.*, **D84** (2011) 112003

[8]B. W. Sargent, *Proc. of the Royal Society*, **139** (1933) 659-672.

[9]El valor numérico de $(\ln 2)/k_1 = 1{,}23\times10^{-120}$ J^2 m^6 s.

[10]Estos conceptos se describen con más detalle en el Capítulo 18 dedicado a las interacciones débiles en la parte de física de partículas.

[11]F. Reines, C. L. Cowan, *Phys. Rev.*, **113** (1959) 273-279.

[12]M. Perl *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 1489.

[13]T. D. Lee, C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **104** (1956) 254.

[14]C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.*, **105** (1957) 1413.

[15]La desintegración doble beta con neutrinos fue explicada por primera vez por Maria Goeppert–Mayer, *Phys. Rev.*, 48 (1935) 512.

[16]R. Davis Jr., *Phys. Rev.* **97** (1955) 766.

11. Teoría de las desintegraciones γ

11.1 Introducción

Un núcleo puede ocupar una serie (infinita) de estados cuánticos. Estos, como en el caso de losátomos, tienen valores de energía discretos, E_n. La desintegración de los estados excitados de los núcleos $X \rightarrow X + \gamma$(véase el esquema de la figura 11.1), se realiza a estados de menor energía:

- por emisión de un nucleón, si su energía de excitación, $E_i - E_f$ *e*es mayor que la energía de separación nucleónica, S_po S_n.

- a través de emisión de fotones γ, sin cambio de tipo de núcleo.

En esteúltimo caso se habla de radiactividad γ, descubierta en 1900 por Villard. Se trata siempre de una emisión de fotones monoenergéticos.

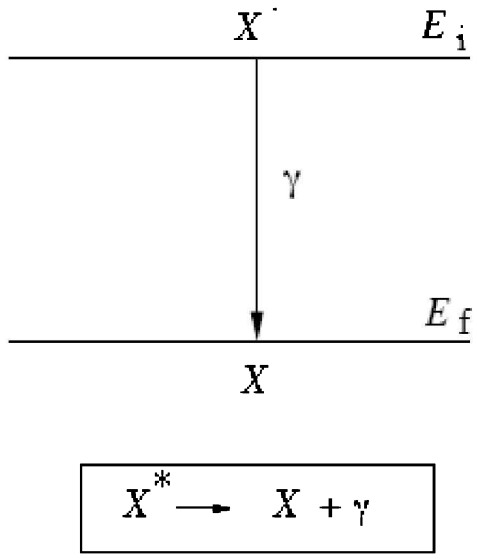


Figura 11.1: Diagrama de desintegración γ de un estado nuclear X^* de energía E_i *a*a otro, *X*, de menor energía E_f.

Las energías de los fotones, E_γ, van de 0,1 a 10 MeV; o sea, con energías generalmente mayores que las de los conocidos rayos X de origen atómico (que llegan a tener hasta un centenar de keV, aproximadamente). Los fotones de las desintegraciones nucleares tienen energías del orden de ~ 10^6veces la de los fotones del espectro visible emitidos por losátomos excitados (~ eV). Por ejemplo, un fotón *rojo* del espectro visible (λ = 6.200Å), equivale a E_γ = 2,0 eV.

Los estados excitados nucleares resultan de las desintegraciones α, β, de núcleos radiactivos o de reacciones nucleares.

La interpretación física de los estados excitados de un núcleo y la explicación de los valores posibles de los niveles energéticos E_n, estema de estudio de los modelos nucleares. Siguiendo ideas del modelo de capas nuclear, la desintegración γ puede comprenderse como el resultado de transiciones de nucleones entre niveles, al igual que las desexcitaciones de electrones enátomos.

Otros procesos similares a la desintegración γ son:

$$X^\star \rightarrow X + e^- \quad \text{(conversión interna de capas K,L,M...)}$$
$$\rightarrow X + (e^+e^-) \quad \text{(creación interna de pares)}$$

Ambos procesos son poco probables excepto en transiciones entre estados nucleares de espín-paridad $0^+ \rightarrow 0^+$. Estas transiciones son posibles porque inter-viene un fotón virtual. En efecto, recuérdese que al tener el fotón $J^P = 1^-$, las transiciones $0 \rightarrow 0$ no pueden tener lugar por emisión de un fotón real ya que el momento angular total no se conservaría (un fotón real sólo tiene dos polarizaciones posibles $M = \pm 1$, de las tres que debe tener cualquier partícula de espín $J = 1$).

Entre partículas elementales también existen procesos de desintegración γ, llamados a veces procesos radiativos. Si el valor Q de reacción es bastante grande, la desintegración tendrá lugar emitiendo partículas. En los núcleos pueden darse estados muy excitados, o sea con $Q > |S_n|$, entonces tendrá lugar necesariamente la emisión de un neutrón; análogamente, habrá emisión de un protón si $Q > |S_p|$. Un ejemplo es el estado excitado del $^{15}N^*$ a 12,15 MeV, que se compara con la desintegración hadrónica de la resonancia $\Delta(1232)$ en la tabla 11.1.

Tabla 11.1: Modos de desintegración del estado excitado de 12,15 MeV del ^{15}N y de la resonancia $\Delta(1232)$. Estos procesos no son electromagnéticos; tienen lugar por interacción fuerte.

proceso	Q(MeV)	$\lambda(s^{-1})$
$^{15}_{7}N^* \longrightarrow {}^{14}_{6}C + p$	$1,94$	$2,5 \cdot 10^{19}$
$^{15}_{7}N^* \longrightarrow {}^{14}_{7}N + n$	$2,31$	$4,5 \cdot 10^{19}$
$\Delta^{++} \longrightarrow p + \pi^+$	154	$1,7 \cdot 10^{23}$

Sólo cuando el valor de Q no permite la emisión de un nucleón, entonces la desintegración debe tener lugar por emisión γ. En la tabla 11.2 se presentan dos ejemplos; uno entre partículas extra˜nas y otro entre estados nucleares.

Tabla 11.2: Dos ejemplos de desintegraciones gamma; una, de un isómero del núcleo ^{137}Ba que aparece en la desintegración β^- del ^{137}Cs, y otra del hiperón Σ^0.

proceso	Q	$\lambda(\mathrm{s}^{-1})$
$^{137m}_{56}\mathrm{Ba} \longrightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \gamma$	662 keV	$4,5 \cdot 10^{-3}$
$\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma$	76,9 MeV	$1,4 \cdot 10^{19}$

Los hiperones Σ^0 y Λ^0son los dos bariones extra˜nos más ligeros. Se observa que el rango de probabilidades de transición electromagnética es enorme. Los semiperiodos van desde 10^{-19}hasta 10^3s. La mayoría de las transiciones tienen valores del $t_{1/2}$del orden del nanosegundo (10^{-9}s).

Experimentalmente, el desarrollo de los detectores de estado sólido (sobre todo los basados en el Ge) ha hecho muy popular la espectroscopía γ nuclear, ya que se trata de detectores muy eficientes y con una resolución energética muy buena (0,1 %).

11.1.1 Desarrollo multipolar

Los núcleos se desintegran emitiendo fotones porque contienen cargas en movimiento que radian energía (la potencia emitida viene dada en teoría clásica del electromagnetismo por el flujo del vector de Poynting). En electromagnetismo clásico se define el dipolo eléctrico como $d = qr$ en donde r es la separación entre las cargas q y $-q$. El dipolo magnético es simplemente $\mu = iA$, siendo i la corriente eléctrica en un círculo deárea A. Si los dipolos varían con el tiempo generan campos E y B de radiación dipolar (eléctrica y/o magnética). Lo mismo pasa con multipolos más elevados. Cuánticamente, la radiación multipolar corresponde a la emisión de fotones, cuyas propiedades vienen dadas por la multipolaridad de la emisión. La emisión de radiación por los núcleos suele clasificarse según su momento angular L y su paridad. Son dos buenos números cuánticos que se conservan en los procesos

electromagnéticos. Para ello es habitual utilizar un desarrollo multipolar de los campos eléctrico y magnético. El orden del multipolo L es 2^L. Así los términos con L = 0,1, 2,3, … corresponden, respectivamente, a un monopolo, dipolo, cuadrupolo, octupolo,… Además, para cada multipolo se distinguen dos términos: el eléctrico (asociado a la distribución de cargas eléctricas) que tiene paridad $(-1)^L$ y el magnético (debido a las corrientes eléctricas y al espín), con paridad $(-1)^{L+1}$. Se denominan, respectivamente, transiciones *EL* y *ML*(L = 1,2, …).

El monopolo (*E*0 o *M*0) se anula siempre ya que una distribución de cargas con simetría esférica no emite radiación. El comportamiento del monopolo eléctrico (*E*0) es idéntico al de una carga eléctrica. En el caso del monopolo magnético (*M*0), aunque postulado, todavía no se ha probado su existencia. Se da el caso de que por conservación del momento angular, existen transiciones en las que está prohibido emitir un fotón; por ejemplo en transiciones con momento angular $0 \rightarrow 0$. Es decir, se trata de transiciones monopolares eléctricas (*E*0), en las que al no poder emitir un fotón, el núcleo *expulsa* uno de los electrones de las capas internas delátomo. Es la llamada *conversión interna*(CI), que se estudiará más adelante. Así pues, el proceso de desintegración γ es debido a la estructura de cargas y del magnetismo intrínseco de los constituyentes; es un proceso electromagnético multipolar; el núcleo inicial con espín J_i *s* se desintegra al estado final con espín J_f, emitiendo un fotón de multipolaridad L. Dado que el fotón tiene espín-paridad: $J^P_\gamma = 1^-$(es un bosón vectorial), la multipolaridad L es debida al espín del fotón y al momento angular orbital entre el fotón y el núcleo de retroceso. Pero el fotón sólo tiene dos polarizaciones posibles: espín paralelo o antiparalelo respecto a su dirección de movimiento. Esto explica que no existan transiciones γ entre estados nucleares de espín 0; es decir, transiciones $0 \rightarrow 0$.

11.2 Conservación de la energía en las desintegraciones γ

Un núcleo, en un estado excitado con energía E_i, se desintegra emitiendo un fotón γ de energía E_γ, y el núcleo queda en un estado con energía E_f, que puede ser el estado fundamental u otro estado excitado, pero en todo caso con energía menor que la inicial. (Véase el diagrama que se presenta en la figura 11.1).

Sea E_f el estado final y E_i el estado excitado, inicial. Se tiene $\Delta E = E_i - E_f$. Aplicando la conservación de la energía y del momento:

$$E_i = E_f + E_\gamma + T_R$$
$$0 = p_\gamma + p_R$$

y como $E_\gamma = p_\gamma c$, queda:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}, \qquad (11.1)$$

siendo M la masa del núcleo de retroceso. Al resolver para E_γ se obtiene:

$$\boxed{E_\gamma = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}} \qquad (11.2)$$

que es la misma expresión si se despeja E_γ de la expresión (11.1) y se toma $E_\gamma \approx \Delta E$.

Las energías de los fotones emitidos en las desintegraciones nucleares son mucho mayores que la de los análogos en física atómica. Ello se debe a que la separación energética entre niveles nucleares es mucho mayor. Si se relacionan las energías (o las longitudes de onda $\lambda = hc/E_\gamma$) de los fotones (del orden de décimas de eV para las atómicas y centenares de keV para las nucleares) con el tama˜no atómico/nuclear se obtiene:

$$\lambda_{\text{át.}} \sim 10^{-7}\ \text{m}, \qquad R_{\text{át.}} \sim 10^{-10}\ \text{m} \quad \rightarrow \left.\frac{R}{\lambda}\right|_{\text{át.}} \sim 10^{-3}$$

$$\lambda_{\text{nú.}} \sim 10^{-13}\ \text{m}, \quad R_{\text{nú.}} \sim 10^{-14}\ \text{m} \quad \rightarrow \left.\frac{R}{\lambda}\right|_{\text{nú.}} \sim 10^{-1}$$

Se verá más adelante que las probabilidades de transición (vidas medias) son proporcionales a los productos $kR \sim \frac{R}{\lambda}$, puesto que $p = \hbar k$; es por ello que en física atómica basta con considerar radiación eléctrica dipolar (primer orden) mientras que en física nuclear, en principio, siempre hay que tener en cuenta más multipolos.

11.3 Estimadores de Weisskopf. Vidas medias

Antes de pasar al cálculo de las probabilidades de transición, es muy instructivo estimarórdenes de magnitud de transiciones multipolares por argumentos dimensionales.

11.3.1 Órdenes de magnitud de transiciones γ multipolares

En teoría de perturbaciones, y considerando sólo el término de primer orden, la probabilidad de desintegración γ de unátomo o de un núcleo es proporcional al elemento de matriz del operador dipolo eléctrico, $\vec{d} = e\vec{r}$, que en efecto es el que representa la interacción elemental de un dipolo con el campo eléctrico: $W = -\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}$. El elementodematrizserá:

$$|\langle f|e\vec{r}|i\rangle|^2 = |\langle \vec{d} \rangle|^2$$

Dimensionalmente, en el caso dipolar (L = 1), para la probabilidad de transición dipolar eléctrica se tendrá:

$$\lambda(E1) \propto \alpha c R^2 \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3$$

y generalizando a cualquier multipolaridad eléctrica:

$$\boxed{\lambda(EL) \propto \alpha c R^{2L} E_\gamma^{2L+1}} \qquad (11.3)$$

en donde se puede observar la relación entre el orden multipolar y la potencia de R; en concreto, el momento cuadrupolar eléctrico es eQ teniendo Q dimensiones de superficie [L^2], y así sucesivamente. La constante α es la constante de estructura fina, o constante de acoplamiento de la interacción electromagnética cuyo valor (adimensional) es α = 1/137. También puede observarse que, con cada aumento de una unidad en la multipolaridad, la probabilidad se reduce por lo menos en un factor $\left(\frac{R}{\lambda_\gamma}\right)^2 \sim 10^{-2}$.

En física nuclear es frecuente hablar de la resonancia dipolar gigante. Su nombre es debido al hecho de que se trata de un proceso catalogado como $E1$, o sea, dipolar eléctrico, en el que los protones y neutrones oscilan alrededor del centro de masas nuclear produciendo un aumento de la sección eficaz de colisión de fotones con núcleos. Para los núcleos ligeros el fenómeno tiene lugar en las interacciones con fotones de energía $E_\gamma \sim 25$ MeV y para los núcleos pesados disminuye hasta $E_\gamma \sim 12$ MeV. La resonancia nuclear gigante, tiene una anchura de varios MeV y se suele desintegrar emitiendo un nucleón.

Pero existen también transiciones magnéticas, asimilables a la interacción del espín con un campo magnético $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{B}}$ Dimensionalmente, en el caso dipolar magnético se tendrá:

$$\lambda(M1) \propto \alpha c \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{g_s^{\mathrm{p}} \hbar}{2M}\right)^2$$

o sea, el elemento de matriz de $|\mu|^2$.

Si la transición es de orden *ML*, entonces el espín nuclear puede llegar a cambiar de un valor igual a *L* y queda:

$$\lambda(ML) \propto \alpha c \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1} R^{2L-2} \left(\frac{g_s^{\mathrm{p}} \hbar}{2M}\right)^2$$

Porúltimo, esútil volver a recordar que la probabilidad de transición radiativa λ está relacionada con la vida media τ_γ *d*del estado nuclear y con la anchura intrínseca del estado Γ_γ por las conocidas relaciones:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{\Gamma_\gamma}{\hbar}} \qquad (11.4)$$

La anchura total del nivel, Γ, es mayor que la determinada con las desintegraciones γ(radiativas) porque hay que incluir la conversión interna, de forma que, como se verámás adelante $\lambda_t = \lambda_\gamma(1 + \alpha)$.

11.3.2 Regla de oro de Fermi

En teoría de perturbaciones dependiente del tiempo el cálculo de la probabilidad de emisión γ por unátomo/núcleo puede realizarse en la aproximación de Bohr (primer orden de teoría de perturbaciones), de forma que la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo viene dada por la conocida regla de oro de Fermi:

$$\boxed{\lambda_{fi} = \frac{dP_{fi}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \mid \langle f|H'|i\rangle \mid^2 \rho(E_f)} \qquad (11.5)$$

en donde el hamiltoniano de la interacción entre una carga q y el campo electro-magnético, representado por el potencial vector $\vec{A}$, es $H' = H'_1 + H'_2$, siendo:

$$\boxed{H'_1 = -\frac{q}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2} \qquad (11.6)$$

el término eléctrico y si se toma en cuenta la interacción de un dipolo (el espín del protón S_p) con el campo magnético (recuérdese que $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$)

$$\boxed{H'_2 = -g_s^p \frac{\mu_N}{\hbar}\vec{S}_p\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})} \qquad (11.7)$$

La densidad de estados finales:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE}$$

con

$$dn = \frac{Vp^2dp}{h^3}d\Omega = \frac{V\omega^2}{(2\pi)^3\hbar c^3}d\Omega dE$$

ya que para el fotón, $E = \hbar\omega = pc$. Se llega pues a las siguientes expresiones para la probabilidad de transición;

a) para el caso de transiciones eléctricas, sin tener en cuenta el término A^2, que sólo interviene en la emisión de 2 fotones o en términos de orden superior:

$$\lambda_{fi}(EL) = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_\nu \int \mid \langle f|\frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p}|i\rangle \mid^2 \rho_f d\Omega \qquad (11.8)$$

b) para el de las transiciones magnéticas:

$$\lambda_{fi}(ML) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\nu} \int \mid (f|g_s^{\mathrm{P}} \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S}_{\mathrm{p}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})|i) \mid^2 \rho_f d\Omega \qquad (11.9)$$

en donde el subíndice ν representa los estados de polarización del fotón.

Estimadores de Weisskopf

En electromagnetismo clásico, la potencia multipolar eléctrica o magnética ($\Sigma = E, M$), radiada por un multipolo $m(\Sigma L)$ viene dada por

$$P(\Sigma L) = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{c}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} |m(\Sigma L)|^2$$

Según la mecánica cuántica, los multipolos se reemplazan por operadores multipolares que permiten definir los elementos de matriz del multipolo:

$$m_{if}(\Sigma L) = \int \psi_f^* \, m(\Sigma L) \, \psi_i dV$$

y se calcula la probabilidad de emisión de un fotón por unidad de tiempo (constante de desintegración): $\lambda(\Sigma L) = \frac{P(\Sigma L)}{\hbar\omega}$. Para transiciones eléctricas, si se calcula la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, λ, tomando los operadores multipolares er^L entre estados de protón individual (*single particle*; abreviadamente *sp*) en el modelo de capas esférico, si se supone que el núcleo es uniforme, la parte radial de las funciones de onda ψ_i y ψ_f es constante entre 0y R y al calcular su contribución al elemento de matriz se obtiene

$$\int_0^R r^2 r^L dr \Big/ \int_0^R r^2 dr = \frac{3}{L+3} R^L$$

ya que $dV = 4\pi r^2 dr$. Entonces, sólo falta incluir el momento angular. El

protón ocupa un estado con momento angular bien definido $|jm$, y al suponer que en el estado final tiene momento angular orbital = 0, da lugar a los llamados estimadores de Weisskopf, que se han convertido en los valores estándar por convenio. Por su método de cálculo se observa que elúnico ingrediente utilizado ha sido suponer que la emisión gama es debida a un cambio de estado de un protón en el núcleo. Esto es una simplificación, pues no tiene en cuenta otros efectos colectivos.

El resultado del cálculo de Weisskopf da como probabilidad de transición en el caso de multipolaridades eléctricas:

$$\lambda(EL)_{sp} = \alpha c \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2 R^{2L} \qquad (11.10)$$

donde como siempre el radio nuclear vale $R = r_0 A^{1/3}$, con r_0 = 1,2 fm. Para las transiciones magnéticas:

$$\lambda(ML)_{sp} = \alpha c \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1} \cdot \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 R^{2L-2}\left(\mu_p - \frac{1}{L+1}\right)^2\left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \qquad (11.11)$$

es decir, aproximadamente las dos probabilidades de desintegración, magnética yeléctrica, estarían relacionadas:

$$\lambda(ML)_{sp} \simeq 10\left(\frac{\hbar}{m_p c R}\right)^2 \lambda(EL)_{sp}$$

Los valores numéricos resultantes, en función del número másico A y de la energía del fotón E_γ se dan en la tabla 11.3.

Puede verse el rango de valores de $t_{1/2}$, semiperiodo de desintegración γ de los núcleos, en la figura 11.2.

Tabla 11.3: Valores de los estimadores de Weisskopf de las probabilidades de transición $\lambda(EL)$ y $\lambda(ML)$ para transiciones multipolares eléctricas y magnéticas

respectivamente, en función del número másico A ydela energía del fotón emitido E_γ en MeV.

L	$\lambda(EL), \mathrm{s}^{-1}$	L	$\lambda(ML), \mathrm{s}^{-1}$
1	$1,03 \cdot 10^{14} \cdot A^{2/3} \cdot E_\gamma^3$	1	$3,15 \cdot 10^{13} \cdot E_\gamma^3$
2	$7,28 \cdot 10^{7} \cdot A^{4/3} \cdot E_\gamma^5$	2	$2,24 \cdot 10^{7} \cdot A^{2/3} \cdot E_\gamma^5$
3	$3,39 \cdot 10^{1} \cdot A^{2} \cdot E_\gamma^7$	3	$1,04 \cdot 10^{1} \cdot A^{4/3} \cdot E_\gamma^7$
4	$1,07 \cdot 10^{-5} \cdot A^{8/3} \cdot E_\gamma^9$	4	$3,27 \cdot 10^{-6} \cdot A^{2} \cdot E_\gamma^9$
5	$2,40 \cdot 10^{-12} \cdot A^{10/3} \cdot E_\gamma^{11}$	5	$7,36 \cdot 10^{-13} \cdot A^{8/3} \cdot E_\gamma^{11}$

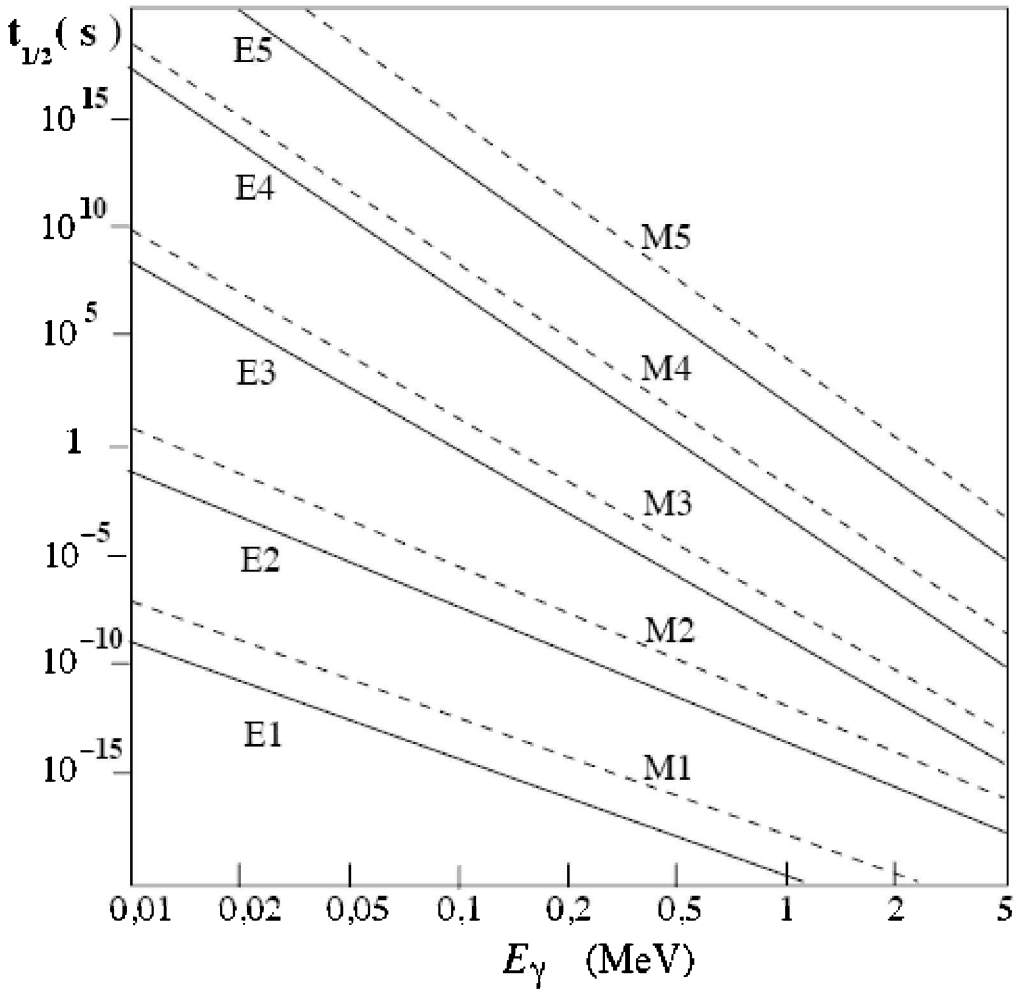


Figura 11.2: Semiperiodos calculados por los estimadores de Weisskopf en función de la energía E_γ del fotón emitido en la desintegración. Los valores corresponden a un núcleo con $A = 100$.

La comparación de las probabilidades obtenidas con el experimento, muestra diferencias de un orden de magnitud (para transiciones $E2$) o incluso mayores ($E1$), lo que demuestra que deben tenerse en cuenta los efectos colectivos nucleares. Para multipolaridades elevadas, los estimadores de Weisskopf son una buena referencia, aunque siempre sobreestiman la probabilidad; incluso en más de un orden de magnitud. Esto se entiende debido a la aproximación realizada.

La observación de las predicciones de las probabilidades obtenidas en la aproximación de Weisskopf (de partícula individual) permite extraer las siguientes conclusiones importantes:

a) Existen estados excitados que sólo pueden desexcitarse a través de transiciones de alta multipolaridad. Tienen una vida media relativamente larga, por ejemplo $t_{1/2} > 10^{-6}$s. A estos estados se les llama isómeros. Se les reconoce con la notación de una m en el exponente. Por ejemplo el $^{137^m}_{56}$Ba que aparece tras la desintegración β del $^{137}_{55}$Cs y que emite un fotón de 662 keV. Tiene un semiperiodo de 2,55 min, y tiene una vida tan larga porque es una transición $11/2^- \rightarrow 3/2^+$, oseadetipo $M4$, idéntica por ejemplo a la transición del nivel de 160 keV del ^{131}Xe que se desintegra al estado fundamental con un semi-periodo de 11,8 días. Existen isómeros con vidas medias de más de 400 a˜nos, como el ejemplo de la figura 11.3.

Este fenómeno suele darse antes del llenado completo de capas de los núcleos con números mágicos $N = Z = 50,82, 126$, es decir mientras se completan las capas $1h_{11/2}$ y $1i_{13/2}$del modelo de capas.

b) Existe una discrepancia sistemática en las probabilidades para las transiciones $E2$ entre el experimento y los valores de Weisskopf. Contrariamente a las demás transiciones, en este caso los experimentos dan probabilidades más grandes ($t_{1/2}$ más

pequeñnos) que las predichas teóricamente. Ello se asocia a fenómenos colectivos, (por ejemplo estados rotacionales, donde varios protones pueden intervenir) debidos a la deformación nuclear.

c) La conversión de pares interna es posible, siempre que ΔE>1,022 MeV.

d) Un método extendido para la determinación experimental de la multipolaridad de una determinada transición es el de las correlaciones $I(\theta)$ entre fotones que se emiten en cascada $\gamma_1 - \gamma_2$, ya que la distribución angular entre estos fotones es sensible al espín-paridad del estado y al tipo de multipolaridad *EL*, *ML* de la transición. La forma general del espectro angular entre los dos fotones γ_1 y $\gamma_2$es:

$$I(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{L} a_{2k} \cos^{2k}(\theta)$$

yelmáximo *L* viene dado por la multipolaridad en juego.

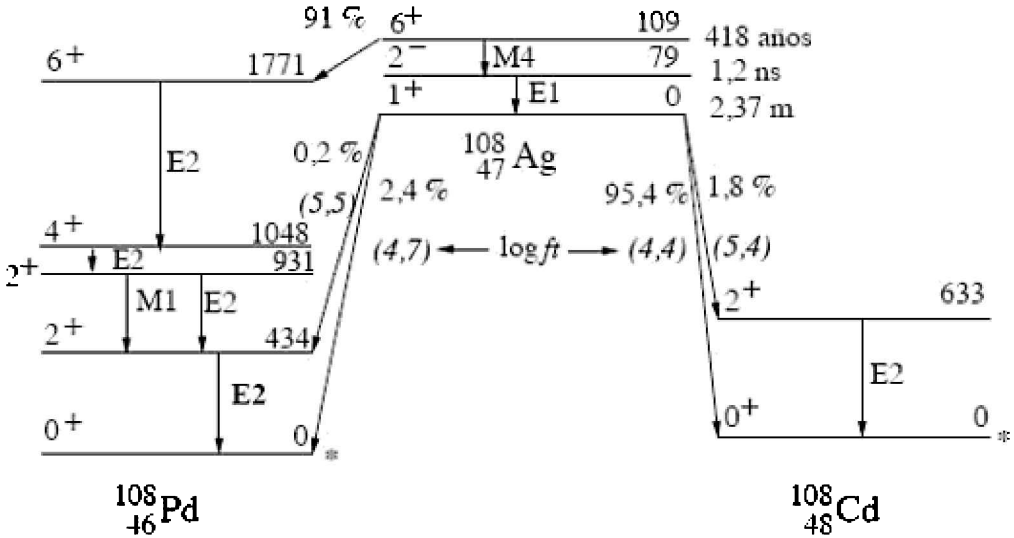


Figura 11.3: Un ejemplo de uno de los isómeros de vida media más larga: el estado 6^+ de 109 keV del núcleo ^{108}Ag. En este diagrama se ilustra también cómo aparecen en las tablas nucleares otros parámetros como el log$ft_{1/2}$ de

las desintegraciones beta. Se recuerda al lector que los núcleos estables, en este texto, se suelen marcar con un asterisco.

11.4 Reglas de selección. Conversión interna

Las reglas de selección se refieren al espín-paridad de los estados nucleares intervinientes en la desintegración:

$$X^* \rightarrow X + \gamma$$

La conservación del momento angular se expresa:

$$\boxed{\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}} \qquad (11.12)$$

yla dela paridad:

$$\boxed{\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_f \mathcal{P}_L} \qquad (11.13)$$

siendo $\vec{L}$ la multipolaridad de la radiación.

El fotón es un mesón vectorial, es decir con espín-paridad 1^-, con lo que la multipolaridad L se obtendrá al tomar también en cuenta el momento angular orbital del movimiento del fotón respecto del núcleo.

La multipolaridad L de la transición podrá fijarse una vez conocidos los espines de los estados nucleares, y viceversa.

La relación que deben cumplir los momentos angulares es:

$$|J_f - J_i| \leq \mathrm{L} \leq J_f + J_i$$

por lo tanto, según la multipolaridad se deberán cumplir las reglas:

$$\begin{cases} E1, M1 : \Delta J = 0, \pm 1 \ (0 \nrightarrow 0) \\ E2, M2 : \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 \ (0 \nrightarrow 0, \ 0 \nrightarrow 1, \ 1 \nrightarrow 0, \ 1/2 \nrightarrow 1/2) \end{cases}$$

y así sucesivamente. Las transiciones entre paréntesis están prohibidas, aunque cumplen el valor de ΔJ, debido a que el fotón tiene espín 1. Como acaba de verse en la relación (11.13), P_L representa la paridad del fotón multipolar. Su valor dependerá del tipo de transición. Evidentemente cuando uno de los dos núcleos tiene espín 0, el otro es el que determina la multipolaridad. Se cumple,

a) $P_L = (-1)^L$, para transiciones *EL* (recuérdese que el operador $\vec{d} = e\vec{r}$ es impar y es la magnitud representativa de transiciones dipolares eléctricas, o sea para $L = 1$. Las demás transiciones cambian alternativamente según el orden de multipolaridad).

b) $P_L = (-1)^{L+1}$, para transiciones *ML* ($\vec{\mu} \sim [\vec{r} \times \vec{p}]$ es par para $L = 1$ y cambia de signo alternativamente).

Ejemplo: Sea la transición $3/2^+ \rightarrow 5/2^+$. Las multipolaridades posibles son: $L = 1, 2, 3, 4$, y como no hay cambio de paridad, sólo pueden tener lugar *M*1, *E*2, *M*3, *E*4. Si el estado inicial fuese $3/2^-$, entonces habría cambio de paridad y por lo tanto las transiciones permitidas serían *E*1, *M*2, *E*3, *M*4. Utilizando los estimadores de Weisskopf puede comprobarse en este último caso que las probabilidades siguen las proporciones siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda(E1) & \div & \lambda(M2) & \div & \lambda(E3) & \div & \lambda(M4) \\ 1 & \div & 2,3 \cdot 10^{-7} & \div & 2,1 \cdot 10^{-10} & \div & 2,1 \cdot 10^{-17} \end{array}$$

lo que ilustra que basta con tomar en consideración la multipolaridad más baja.

Según estas reglas no puede existir desintegración γ en las transiciones $0 \nrightarrow 0$, aunque sí puede haber conversión interna o conversión de pares interna.

Generalmente pueden darse varias multipolaridades *EL* y *ML*, siempre

que se cumplan las reglas de selección vistas más arriba. Sucede también que sólo la primera posible es suficiente pues las otras son despreciables. En efecto, es fácil comprobar que $\lambda(ML + 1)/\lambda(EL) \sim 10^{-7}$, luego, con el primer multipolo eléctrico permitido hay suficiente. Sin embargo también se cumple que $\lambda(EL + 1)/\lambda(ML) \sim 10^{-2}$, lo que implica que a veces las transiciones eléctricas no son despreciables.

Hay casos extremos en los que es necesario tener en cuenta varias multipolaridades. Por ejemplo entre partículas elementales:

$$\Delta^{+}(1232) \rightarrow \mathrm{p} + \gamma$$

en donde Q = 294 MeV. Es una transición $3/2^{+} \rightarrow 1/2^{+}$ en la que es necesario tener en cuenta $M1$ y $E2$.

Una desintegración frecuente es la $2^{+} \rightarrow 0^{+}$ en los núcleos par–par, por ejemplo la transición de 90 keV al estado fundamental del ^{90}Hf, que debe ser una emisión $E2$ pura, de acuerdo con la conservación del momento angular. Sin embargo es muy probable encontrar transiciones en las que es necesario tener en cuenta $E2 + M1$, como por ejemplo $7/2^{-} \rightarrow 5/2^{-}$ en el ^{47}Ti. Ello es debido a que las transiciones $E2$ son frecuentemente tan elevadas como las $M1$. Ejemplos de este tipo de transiciones pueden verse en la figura 11.4, donde se muestran las transiciones entre niveles del $^{190}_{80}\mathrm{Hg}$ que se alcanzan por desintegración del $^{190}_{81}\mathrm{Tl}$. Esta última figura es interesante por varios motivos; en primer lugar se puede apreciar que los 9 niveles se pueden asociar muy bien a dos bandas rotacionales, una que parte del estado fundamental y otra que tiene como base el nivel 0^{+} de 1278,7 keV. Se trata de una propiedad frecuente en núcleos par–par, como es el caso del $^{190}_{80}\mathrm{Hg}$. Dentro de una banda, las desintegraciones son de tipo $E2$, y en la figura aparecen como desintegraciones gamma dadas por líneas contínuas; sin embargo, hay otras transiciones entre estados de las dos bandas, que, bien pueden ser $E2$ puras o también pueden ser $M1 + E2$, según los números cuánticos de los estados; por ejemplo para transiciones $2^{+} \rightarrow 2^{+}$ y $4^{+} \rightarrow 4^{+}$, representadas por líneas a trazos. Otra particularidad es que aparecen

transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$, que son *E*0, y como se ha visto, sólo pueden tener lugar por conversión interna.

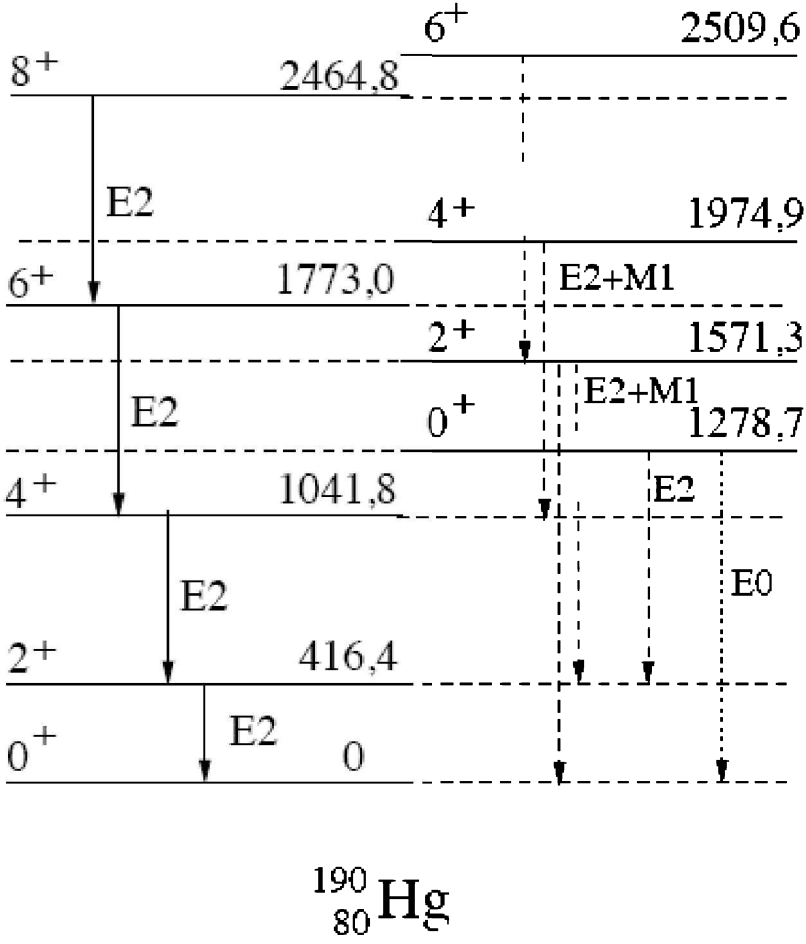


Figura 11.4: Esquema de niveles del ^{190}Hg donde se muestran los tipos de transiciones multipolares permitidas, entre los estados excitados. Datos de M. O. Kortelahti *et al., Phys. Rev.*, **C43** (1991) 484

11.4.1 Conversión interna

La conversión interna es una alternativa a la emisión γ nuclear; en este caso se emite un e^- atómico, proceso que no hay que confundir con el efecto fotoeléctrico, ya que este último es una reacción γ+ átomo. La

conversión interna es una interacción mono o multipolar electromagnética, y es muy probable en núcleos pesados (con Z elevado).

El proceso de conversión interna se caracteriza por la emisión de un electrón monoenergético:

$$X^* \rightarrow X + e^-$$

siendo $T_e = \Delta E - B_e$ la energía del electrón (B_e es su energía de ligadura atómica).

Por ejemplo, el $^{203}_{80}\mathrm{Hg}(t_{1/2} = 46,6\ \mathrm{d.})$, $J^P = 5/2^+$, se desintegra al nivel de 279,19 keV del $^{203}_{81}\mathrm{Tl}$, cuyo estado fundamental tiene $J^P = 1/2^+$ (véase figura 11.5); se emitirán electrones de una energía que puede verse en la tabla 11.4.

Si se dispone de una buena resolución energética, se podrán medir los niveles energéticos de los orbitales atómicos, gracias a la medida de la energía del electrón emitido, T_e. Después de la emisión del e^-, quedará un hueco en la estructura atómica. Este hueco será llenado inmediatamente por otro electrón y habrá emisión de un rayo X característico del átomo.

La probabilidad de desintegración γ total de un núcleo por unidad de tiempo será:

$$\lambda_t = \lambda_\gamma + \lambda_e = \lambda_\gamma(1 + \alpha)$$

en donde α representa el coeficiente de conversión interna, $\alpha = \lambda_e/\lambda_\gamma$ que puede descomponerse como suma de los coeficientes parciales correspondientes a cada capa atómica $\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \ldots$

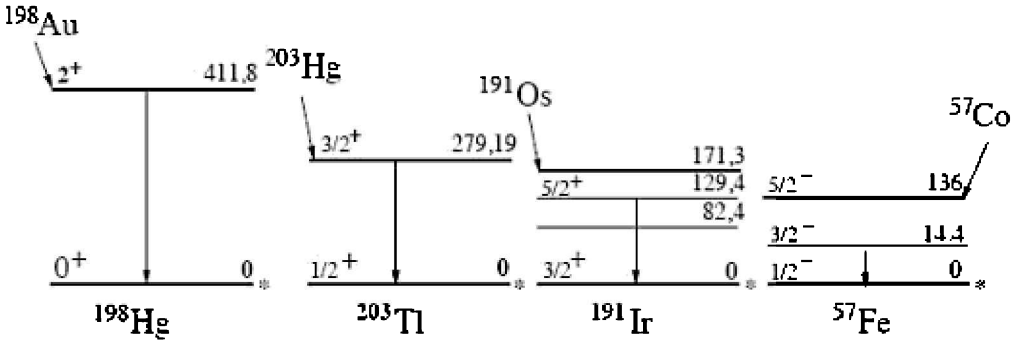


Figura 11.5: Diagrama de desintegración γ de núcleos frecuentemente usados en el efecto Mössbauer: ^{2198}Hg, $^{203}_{81}Tl$, ^{191}Ir y ^{57}Fe, que se pueblan por desintegración beta de núcleos radiactivos $^{198}_{79}Au(2,7\ d)$, ^{203}Hg(46,6 d), ^{191}Os(15,4 d) y ^{57}Co(271,8 d) respectivamente.

Tabla 11.4: Energías de ligadura de electrones de las capas *K* y *L* y energías de emisión de electrones de conversión interna del estado de 279 keV del átomo de talio.

capa	B_e (keV)	T_e (keV)
(*K*)	85,5	193,6
(L_I), $2s_{1/2}$	15,3	263,8
(L_{II}), $2p_{1/2}$	14,7	264,4
(L_{III}), $2p_{3/2}$	12,6	266,5
(M_I)	3,7	275,4

El cálculo de los coeficientes de conversión interna no es sencillo. Una aproximación no relativista es posible tomando en cuenta la función de ondas del electrón (en el estado inicial, el electrón ligado al átomo y en el final, una onda plana de momento p_e), y debido a que los estados nucleares $\Psi_{i,N}$ y $\Psi_{f,N}$ son muy parecidos y no modifican la probabilidad de transición, se obtiene:

$$\alpha(EL) = \frac{Z^3}{n^3}\alpha^4\left(\frac{L}{L+1}\right)\left(\frac{2m_e c^2}{E}\right)^{L+(5/2)}$$

$$\alpha(ML) = \frac{Z^3}{n^3}\alpha^4\left(\frac{2m_e c^2}{E}\right)^{L+(3/2)}$$

en donde[1] se pueden observar las dependencias con Z, E_γ (opuestas a la que se vio en las expresiones de λ_γ), L y n. Este último es el número cuántico principal atómico que da la capa; n = 1, 2, 3, … corresponde a las capas atómicas K, L, M, … En particular, puede verse que para núcleos con Z elevado, los coeficientes de conversión interna son importantes. El factor $\frac{Z^3}{n^3}$ viene del cálculo de $|\Psi_{i,\,e}(0)|^2$, que también aparece en la probabilidad de captura electrónica, siendo Ψ la función de ondas de un átomo hidrogenoide y donde se ha supuesto que el núcleo es puntual. Ahora $|i\rangle = \Psi_{i,\,N} \cdot \varphi_{i,\,e}$

Existen numerosas tablas de los coeficientes de conversión interna. He aquí dos ejemplos numéricos para las transiciones $E2$ de los gammas de 1171 y 1333 keV del ^{60}Ni, que pueden verse en la figura 11.6:

$$\alpha_K(1171) = 1,73 \cdot 10^{-4} \qquad \alpha_K(1333) = 1,28 \cdot 10^{-4}$$

Pero las probabilidades de conversión interna aumentan considerablemente con L, así en el caso del ^{99}Tc se tiene, para el estado de 141 keV, $\alpha_K(M1) = 0,10$ y para el de 143 keV, $\alpha_K(M4) = 30$, en el que la conversión interna es más probable que la desintegración γ.

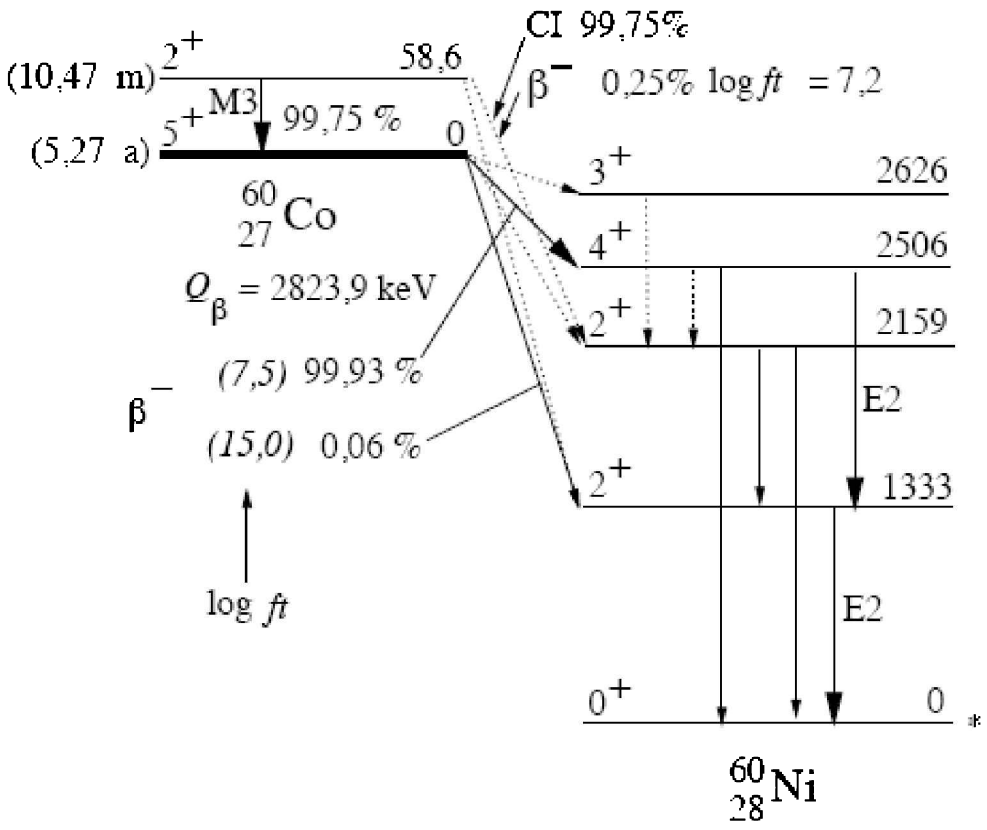


Figura 11.6: Esquema de desintegración beta del $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ y niveles del $^{60}_{28}\mathrm{Ni}$. Obsérvese el estado isómero $^{60m}_{27}\mathrm{Co}$ de 58,6 keV con un semiperiodo de 10,47 m.

Las predicciones para transiciones *EL* y *ML* son tan diferentes que los valores de α permiten distinguir qué tipo de transición tiene lugar.

Un caso particular lo presentan las transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$, para las que $\alpha = \infty$ ya que no puede haber emisión γ ($\lambda_\gamma = 0$), que se da por ejemplo en la desintegración (figura 11.7) del nivel 691 keV del ^{72}Ge($t_{1/2}$ = 0, 44 μs). Se trata de una transición *E*0, monopolar, por lo tanto sólo posible por conversión interna, debido, como se ha visto más arriba, a la conservación del momento angular total. La probabilidad de desintegración obtenida para las transiciones monopolares se demuestra que son proporcionales a $\langle r^2 \rangle$, valor del cuadrado del radio nuclear. Por

ello dan información interesante sobre la estructura nuclear.

Se ha detectado la emisión de un par e^+e^- en la desintegración del estado $^{16}O^*$ de 6,05 MeV, es decir por producción de pares interna, así como también se ha detectado la emisión de dos fotones:

$$^{16}_{8}O^*(6,05\ \text{MeV}) \longrightarrow \gamma + \gamma + {}^{16}O$$

al estado fundamental. Este es otro ejemplo de transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$.

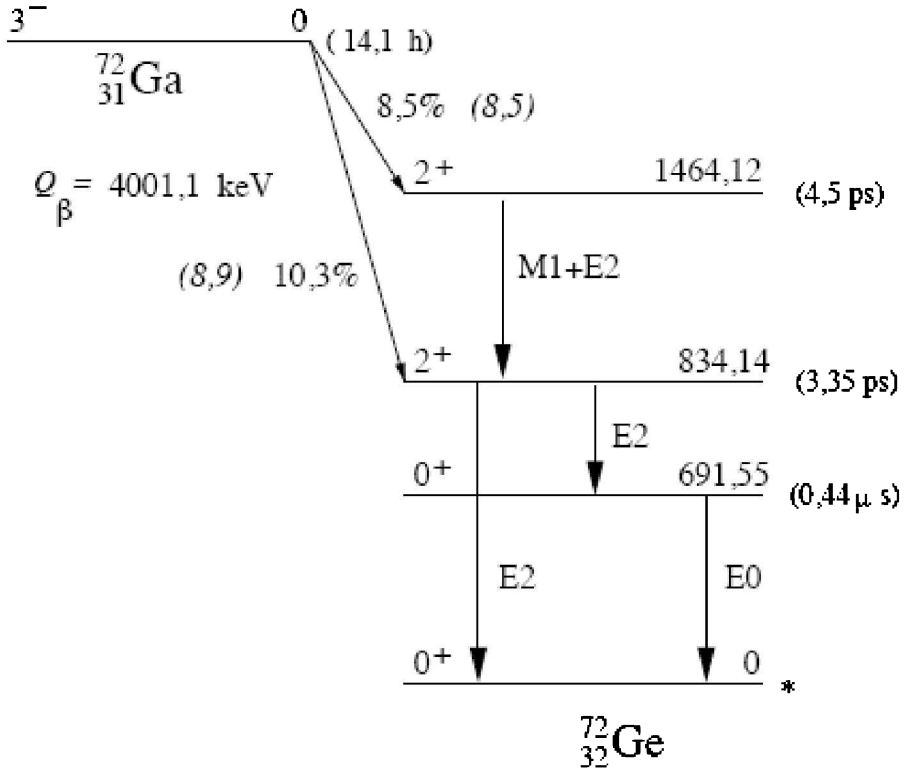


Figura 11.7: Diagrama de desintegración γ del ^{72}Ge. La transición monopolar *E*0, sólo puede tener lugar por conversión interna.

Sin embargo entre núcleos no se ha encontrado ningún ejemplo de transición $0 \rightarrow 0$ con cambio de paridad.

11.5 Espectroscopía gamma

La espectroscopía gamma ha permitido mejorar el conocimiento de la estructura de niveles nucleares y de los números cuánticos de dichos niveles. Esto se consigue gracias al resultado combinado de las siguientes medidas:

1 Energías e intensidades de los picos gamma, o sea de los picos que se obtienen en las medidas de E_γ con buenos detectores de fotones.

2 Coincidencias entre picos gamma.

3 Cocientes α_i/α_j entre coeficientes de conversión interna, que informan sobre la naturaleza multipolar (*EL*, *ML*).

4 Medida de vidas medias.

11.6 Efecto Mössbauer

El efecto Mössbauer (Premio Nobel de Física 1961) utiliza la absorción resonante de fotones (o autoabsorción) de energía E_γ, con lo que permitemedir variaciones de energía del orden de la anchura intrínseca del nivel nuclear, Γ, consiguiendo por lo tanto resoluciones:

$$R = \Gamma/E_\gamma \sim 10^{-12} - 10^{-15}$$

11.6.1 Emisión y absorción de γ

Se llama absorción al proceso inverso de emisión, quedando el núcleo en un estado excitado. La energía del γ en la absorción $E_\gamma = \Delta E + T_R$ es distinta al caso de la emisión que ya se ha visto anteriormente, que vale $E_\gamma = \Delta E - T_R$. Como antes, hay que tener en cuenta el retroceso del núcleo $T_R = \frac{p^2}{2M} \approx \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$. Numéricamente, en el caso del nivel

de 411 keV del $^{198}_{80}\mathrm{Hg}$, T_R = 0, 45 eV, y en el caso del nivel de 129 keV del $^{191}_{77}\mathrm{Ir}$, es sólo T_R = 0, 05 eV.

11.6.2 Anchura intrínseca de nivel

La vida media del nivel nuclear determina su anchura intrínseca mediante la relación $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$. Como $\hbar$ = 6, 58 · 10^{-22} MeV · s, se tiene para el nivel 129 keV del *Ir*:

$$\Gamma(^{191}\mathrm{Ir}) = \frac{\hbar}{2 \cdot 10^{-10}} = 3,00 \cdot 10^{-6}\ eV$$

De esta forma, si se realiza un experimento de absorción, se encuentra una curva de Breit-Wigner, que es una curva típica de una resonancia, centrada en el valor $\Delta E + T_R$ de la energía del fotón:

$$\boxed{\sigma(E_\gamma) = \sigma_0 \frac{(\Gamma/2)^2}{(E_\gamma - [\Delta E + T_R])^2 + (\Gamma/2)^2}} \qquad (11.14)$$

siendo σ_0, la sección eficaz de absorción resonante, cuyo valor es:

$$\sigma_0 = 2\pi \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma}\right)^2 \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)$$

en donde α es el coeficiente de conversión interna total y J el espín del estado nuclear correspondiente; J_f el del excitado y J_i el del estado inicial antes de la absorción.

11.6.3 Ensanchamiento Doppler

Hasta ahora se ha supuesto que los procesos de emisión o absorción de

un fotón han tenido lugar con el núcleo inicial en reposo. Supóngase ahora que el núcleo inicial está en movimiento con una velocidad v_x según el eje de la emisión o absorción del γ, que a su vez se toma como eje x. Sea $\beta = v_x/c$ la velocidad del núcleo. Entonces el efecto Doppler se aplica y la energía real del fotón es ahora:[2]

$$E'_\gamma = E_\gamma(1 \pm \beta)$$

en donde el signo + es para la emisión y el signo − para la absorción. Se cumple pues que, conocida la velocidad del núcleo, se puede evaluar el cambio de energía del fotón a partir de:

$$\boxed{\beta = \frac{\delta E}{E}} \qquad (11.15)$$

Debido a este efecto, la agitación térmica modificará la energía del fotón emitido/absorbido por el núcleo. En efecto, la distribución de velocidades de los núcleos a una temperatura T, sigue la forma de Maxwell:

$$e^{-T_x/kT} = e^{-\frac{1}{2}Mv_x^2/kT} = e^{-\frac{Mc^2}{2kT}(\frac{\delta E}{E_\gamma})^2}$$

o sea, una distribución de energías gaussiana (véase la forma de la función distribución de Gauss en la expresión (7.8) que se estudia en el tema dedicado a los métodos estadísticos) con desviación típica:

$$\sigma_{\mathrm{D}} = E_\gamma \sqrt{\frac{kT}{Mc^2}}$$

o lo que es lo mismo, con anchura total a media altura (*FWHM*):

$$\Gamma_{\mathrm{D}} = (2\sqrt{2\ln 2})\sigma_{\mathrm{D}} \approx 2,35\sigma_{\mathrm{D}}$$

que para temperatura ambiente, T = 300 K, kT = 0,025 eV, da un valor mucho mayor que la anchura intrínseca de los niveles nucleares, $\Gamma_D(^{191}\mathrm{Ir})$ = 0, 07 eV, del orden de T_R, que como se ha visto vale T_R = 0, 05 eV. Así, puede verse en la figura 11.8 el perfil esperado de estas contribuciones. Por ello, la absorción resonante nuclear es un fenómeno poco probable a temperatura ambiente. El problema consiste en tratar de salvar la diferencia $2T_R$ entre la energía del fotón emitido y absorbido. Se podría lograr:

1 Aumentando la temperatura, con lo que aumenta Γ_D (se llama entonces resonancia fluorescente).

2 Mediante técnicas de centrifugación: el núcleo emisor se desplaza mecánicamente hacia la fuente. En efecto, como $\Delta E_\gamma = 2T_R$, la velocidad de la fuente debe ser $\beta = \delta E/E = 2T_R/E_\gamma$. En el caso del $^{198}_{80}\mathrm{Hg}$, E_γ = 411 keV, $v = 2, 2 \cdot 10^{-6} c$ = 660 m/s (¡Mach 2!), lo que se consigue colocando la fuente en un rotor que gire a $10^4 - 10^5$ rpm.

3 Por efecto Mössbauer (realizado en 1958; se le concedió el Premio Nobel de Física 1961).

Mössbauer observó el fenómeno de la autoabsorción con las siguientes condiciones:

a) sin retroceso (llamado *recoil*) del núcleo hijo (T_R = 0), al utilizar una fuente cristalina y

b) sin ensanchamiento Doppler térmico (Γ_D = 0).

lo que consiguió al enfriar a baja temperatura (T=88 K) tanto la fuente del emisor como la del absorbente. Utilizó el ^{191}Ir, en realidad una fuente de ^{191}Os, que colocóen un rotor que giraba a unos cuantos cm/s, con el que pudo observar la anchura intrínseca del nivel de 129 keV ($\sim 3 \cdot 10^{-6}$ eV); es decir, una medida con una resolución energética de $\Gamma/E_\gamma \sim 4 \cdot 10^{-11}$ (véase la figura 11.9). En efecto, para conseguir medir anchuras de $2\Gamma = 6 \cdot 10^{-6}$ eV es necesario un desplazamiento Doppler de velocidad $v = 5 \cdot 10^{-11} c$ = 15 mm/s.

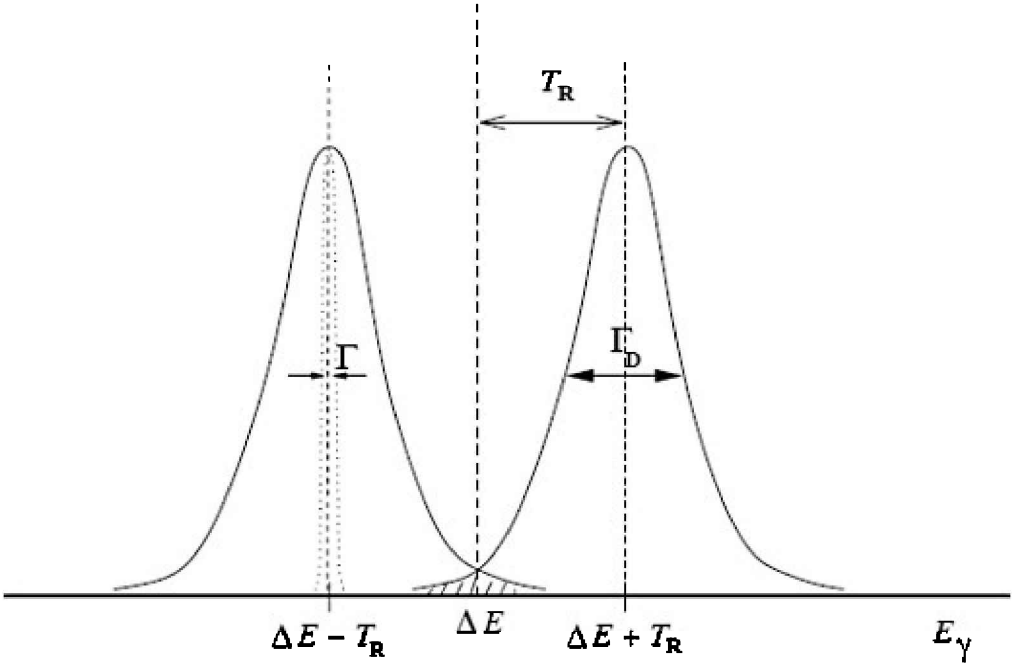


Figura 11.8: Perfil energético del fenómeno de la autoabsorción. Se pueden observar los efectos del ensanchamiento Doppler debido a la temperatura (Γ_D) y del retroceso nuclear (T_R) en la emisión y absorción. La anchura intrínseca (o natural), Γ, del estado nuclear es despreciable en la escala dibujada. Para fijar valores, si se toma el nivel de 412 keV del Hg, con τ = 32 ps, se tienen los siguientes valores: $\Gamma = 2 \cdot 10^{-5}$ eV; T_R = 0, 46 eV y Γ_D = 0, 36 eV.

Utilizando una fuente de ^{57}Fe se puede llegar a resoluciones de 10^{-12} ya que la anchura intrínseca del nivel de 14,4 keV es $\Gamma \sim 10^{-8}$ eV.

Mössbauer explicóel fenómeno a través de las propiedades del movimiento vibracional de los núcleos ligados a las estructuras cristalinas, y encontró que un cierto número de núcleos se encuentran en el estado fundamental vibracional de la red; es decir, que no tienen retroceso. El coeficiente de Mössbauer, *f*, que da la fracción de núcleos sin retroceso (T_R = 0) en un cristal, depende de la temperatura de Debye[3] del sólido (materiales típicos cumplen que $\hbar w_{max} \sim$ 0, 01 eV, o sea, $\theta_D \sim 10^3$ K), y en la aproximación para bajas temperaturas:

$$f \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{T_R}{k\theta_D} \qquad (11.16)$$

Así por ejemplo:

- para el nivel de 129 keV del ^{191}Ir ($\theta_D \sim 300$ K) el coeficiente de Mössbauer vale $f = 0, 1$;
- para el nivel de 14,4 keV del ^{57}Fe ($\theta_D \sim 400$ K) el coeficiente de Mössbauer vale $f = 0, 92$.

Todo pasa como si la estructura cristalina absorbiese el momento de retroceso. Lo curioso es que Mössbauer quería precisamente demostrar lo contrario: que al enfriar el emisor, desaparecería la autoabsorción debida a T_R. En su experimento encontró un 1% de autoabsorción (producto de coeficientes $f \cdot f$ del emisor y absorbente del *Ir*).

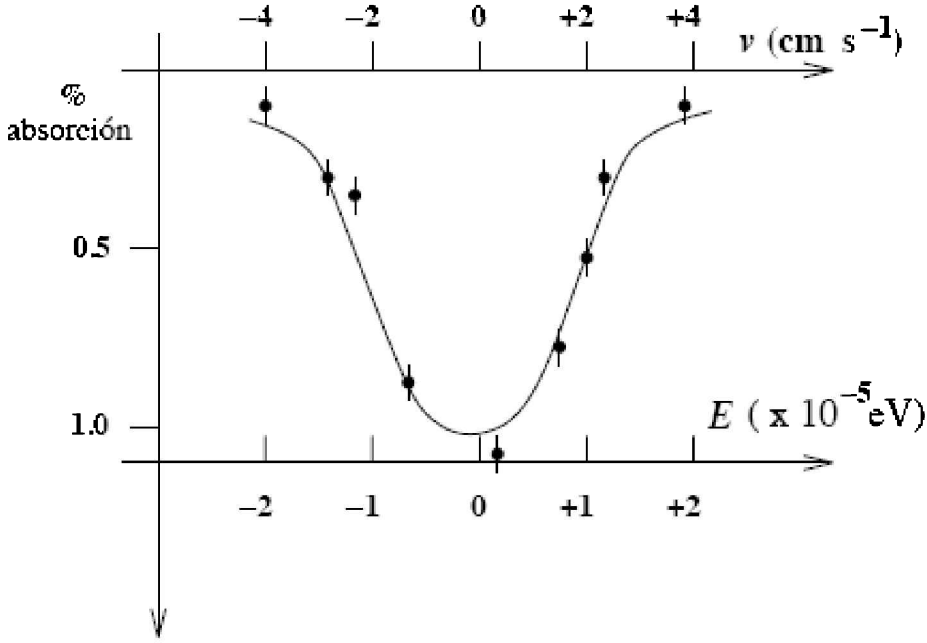


Figura 11.9: Experimento de autoabsorción de Mössbauer realizado con los fotones de 129 keV de una fuente de ^{191}Ir a baja temperatura.

11.6.4 Aplicaciones del efecto Mössbauer

Medida del desplazamiento hacia el rojo (*red shift*, gravitacional)

Uno de los fundamentos de la teoría general de la relatividad (TGR) es el principio de equivalencia, según el cual, los efectos de un campo gravitacional local uniforme no se pueden distinguir de los efectos de un sistema de referencia uniformemente acelerado. Por ello, si se observa la emisión y absorción de un fotón en un campo gravitatorio (g)en el que entre emisor y absorbente hay H metros, el tiempo que tarda en llegar el fotón del emisor al absorbente es $t = H/c$. En ese tiempo es como si el absorbente hubiese adquirido una velocidad $v = gH/c$, por el principio de equivalencia. Por lo tanto, los fotones sufren un desplazamiento Doppler, de magnitud:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{gH}{c^2} = \frac{\Delta E}{E}$$

lo que representa un efecto sobre el desplazamiento de la energía ΔE del orden de 10^{-16} por metro en el campo gravitatorio terrestre.

Otra manera de entender el efecto del principio de equivalencia es que un fotón, de energía E_γ, en un campo gravitatorio debe comportarse como una partícula con masa gravitacional $m = E_\gamma/c^2$. Así, si un fotón se desplaza hacia abajo en el campo terrestre, su energía aumentará $\Delta E = mgH = \frac{E_\gamma gH}{c^2}$, con lo que su longitud de onda se desplazará hacia el azul, y si su dirección es hacia arriba tendrá un desplazamiento de magnitud $-\Delta E$; o sea, que su longitud de onda se desplazará hacia el rojo, ya que pierde energía. Efectivamente, como $E = h\frac{c}{\lambda}$, aumentar la energía E equivale a disminuir la longitud de onda del fotón. Si se trata de un fotón en el espectro visible, es pues lógico decir que hay corrimiento hacia el azul. De la misma manera se habla de corrimiento hacia el rojo cuando la longitud de onda aumenta.

En 1959, Pound y Rebka realizaron el experimento en la torre de 22,6 m de la Universidad de Harvard, utilizando una fuente cuya actividad era de 1 Ci, de ^{57}Co($t_{1/2}$ = 271,8 días) para usar el nivel de 14,4 keV del ^{57}Fe ($\theta_D \sim 400$ K), cuyo coeficiente de Mössbauer es $f = 0, 92$.

La medida se realizó moviendo la fuente con velocidadesde $\sim 0, 75$ $\mu m/s$, lo que se logra por medios hidráulicos. Después de cuatro meses de medidas con grandes precauciones encontraron:

$$\frac{\Delta E}{E} = (4, 902 \pm 0, 041) \cdot 10^{-15}$$

que comparado con el valor teórico $4, 905 \cdot 10^{-15}$, se considera uno de los tests más precisos de la TGR. Como se ve, se trata de medidas de energía con una resolución del orden $\sim 10^{-15}$.

Otras aplicaciones del efecto Mössbauer son:

- medida de espectros hiperfinos (importante para la física atómica)
- desdoblamientos Zeeman en campos magnéticos.

11.7 Problemas

11.1 Desintegración γ y reglas de selección

En el esquema de desintegración de la figura 11.10 se representan las transiciones observadas en la desintegración γ de los niveles más bajos del ^{13}C. Se pide:

a) Deducir a qué tipos de transición corresponden dichos procesos radiativos. Explicar porqué la radiación electromagnética en una transición del tipo EL se emite, de forma predominante, con la multipolaridad L permitida más baja.

b) Realizar una estimación del cociente para las probabilidades de transición eléctricas $\lambda_E(\gamma_1) : \lambda_E(\gamma_2) : \lambda_E(\gamma_3) : \lambda_E(\gamma_4)$.

c) Evaluar la vida media y semiperíodo del estado excitado de 3089 keV.

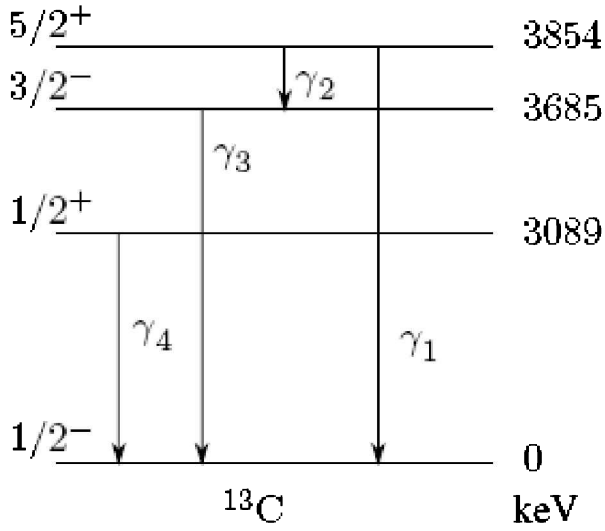


Figura 11.10: Transiciones electromagnéticas de los estados de energía más bajos del ^{13}C.

11.2 Desintegración γ y electrones de conversión interna

El estado isómero 2^+ del ^{60}Co de 58,6 keV se desintegra al estado fundamental 5^+ de acuerdo con el esquema de la figura 11.6. La conversión interna compite con la emisión γ y los coeficientes de conversión interna observados son: $\alpha_K = 41$, $\alpha_L = 7$ y $\alpha_M = 1$. Se pide:

a) Calcular la semivida del estado 2^+ suponiendo que se trata de una transición multipolar $M3$ y compararla con la semivida observada experimentalmente de 10,47 min.

b) Si se sabe que la transición contiene además una pequeña componente de radiación $E4$, ¿bastarían las contribuciones $M3$ + $E4$ para explicar el valor experimental de la semivida?

c) El estado 2^+ del ^{60}Co decae también por emisión β^- al ^{60}Ni. Estudiar cómo afecta al valor de la semivida la inclusión de la

emisión β^- a partir del valor de la energía máxima de los electrones en la desintegración β^- y el valor log $ft_{1/2}$ = 7,2.

d) Repetir el estudio del apartado anterior si se sabe que el 0,25 % de las desintegraciones del $^{60}Co(2^+)$ corresponden a la emisión β^- y el 99,75 % a la emisión γ y conversión interna.

e) Establecer el tipo de las desintegraciones γ en cascada del ^{60}Ni.

11.3 Energética para las desintegraciones β y γ

a) Establecer la relación que debe existir entre las masas de los átomos neutros padre e hijo para que el núcleo padre pueda producir un núcleo hijo isóbaro por emisión β^-, β^+ y captura electrónica sobre la capa *K*. Si se sabe que la energía de ligadura de un electrón *K* en los átomos más pesados no supera los 150 keV, demostrar que cuando la emisión β^+ es energéticamente posible la captura electrónica lo es igualmente, pero el inverso no es siempre cierto.

b) Las desintegraciones β^- del $^{141}_{58}Ce$ se reparten en dos espectros de energías máximas de 0,435 y 0,58 MeV. Por otra parte, alrededor del 30 % de las desintegraciones β^- se emiten en coincidencia con fotones γ de energía 0,145 MeV, no existiendo otras emisiones γ. Conociendo la masa del átomo neutro $^{141}_{59}Pr$, calcular la masa del átomo de $^{141}_{58}Ce$ y representar el diagrama energético de la desintegración. Calcular la energía cinética del núceo de retroceso asociado.

Datos: $M(^{141}_{59}Pr)$ = 140,907596 u.

11.4 Electrones de conversión interna

En la figura 11.11 se observa el esquema de niveles del ^{57}Fe. Las energías de dichos niveles son E_A = 14 keV y E_B = 137 keV.

a) Sabiendo que las energías de ligadura de los electrones de las capas *K* y *L* son B_K = 7,1 keV y B_L = 0,8 keV, respectivamente,

calcular las energías de los electrones de conversión interna.

b) Los coeficientes totales de conversión son $\alpha_1 = 0{,}12$, $\alpha_2 = 0{,}021$ y $\alpha_3 = 8{,}4$. Además los electrones de conversión observados en el detector obedecen la relación $n_1/n_2 = 0{,}85$. Calcular el porcentaje de transiciones que tienen lugar a través de los caminos 1 y 2.

c) Obténgase la relación n_3/n_2 para los electrones de conversión de las transiciones consecutivas.

d) El período de semidesintegración correspondiente al nivel A es $t_{1/2} = 0{,}98 \times 10^{-7}$ s. ¿Cuáles son los períodos parciales de semidesintegración de este nivel?

11.5 Desintegración γ y energía de retroceso nuclear

a) Obtener una expresión para la energía de retroceso de un núcleo de número másico A después de una desintegración γ y estudiar el efecto en la energía del fotón enitido E_γ. Calcular la fracción $(E_\gamma - \Delta E)/\Delta E$ con ΔE la energía del estado excitado respecto al fundamental.

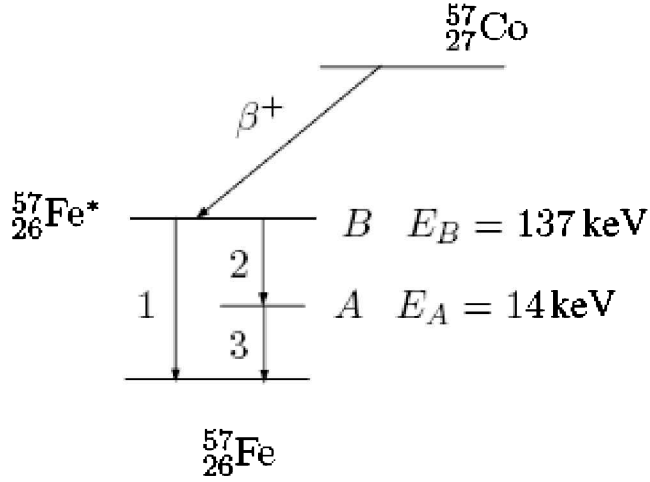


Figura 11.11: Esquema de niveles nucleares del ^{57}Fe tras la desintegración β^+ del ^{57}Co.

b) Calcular la energía de retroceso de núcleos con números másicos $A = 10$ y $A = 100$ para fotones emitidos de 0,1, 1 y 10 MeV.

c) Si el error experimental en la medida de los fotones es de 0,2 keV estimar cuando puede despreciarse la energía de retroceso nuclear.

11.6 Efecto Mössbauer

El núcleo ^{152}Eu se desintegra a un estado excitado del ^{152}Sm de energía $E(^{152}\text{Sm}^*) = 963$ keV por captura electrónica de acuerdo con el proceso:

$$^{152}\text{Eu} + e^- \rightarrow {}^{152}\text{Sm}^* + \nu_e$$

A continuación, el estado excitado del ^{152}Sm se desintegra al estado fundamental 0^+ por emisión γ, con $t_{1/2} = 3{,}5 \times 10^{-14}$ s. Se pide:

a) Calcular la anchura intrínseca del estado excitado del ^{152}Sm de 963 keV. Estudiar la posibilidad de autoabsorción resonante si el ensanchamiento térmico de la distribución de energía de este estado viene dado por una distribución Gaussiana de anchura:

$$\Delta = 3\sqrt{\ln 2}E_\gamma\sqrt{\frac{kT}{Mc^2}}$$

con k la constante de Boltzmann, T la temperatura y M la masa del núcleo.

b) Calcular la velocidad del Sm para poder tener autoabsorción.

c) Calcular la velocidad de retroceso del Sm^* en el proceso de captura y concluir si puede haber o no autoabsorción.

---

[1] No se debe confundir $\alpha(EL)$, parámetro de conversión interna, con α, constante de estructura fina, que también aparece en la misma expresión.

[2] Según el efecto Doppler relativista, la relación entre la frecuencia (ν) de un fotón emitido desde una fuente que viaja a una velocidad v y la detectada (ν') en un blanco fijo es: $\nu' = (\frac{1+\beta}{1-\beta})^{1/2}\nu \approx (1+\beta)\nu$, siendo $\beta = v/c$.

[3] La temperatura de Debye está relacionada con la frecuencia vibracional máxima $\hbar w_{max} = k\theta_D$.

Parte IV

Reacciones nucleares

12. Reacciones nucleares

12.1 Introducción

Las reacciones nucleares proporcionan un método de estudio de las propiedades de los núcleos. Por una parte permiten el conocimiento de la dinámica que interviene en las transmutaciones nucleares y por otra proporcionan un método de estudio de la estructura nuclear.

Las reacciones nucleares forman un extenso campo de la física nuclear. Sobre ellas se dispone de innumerables resultados y publicaciones. A pesar de ello no existe una teoría unificada de las reacciones nucleares que sea de uso práctico. Ello es consecuencia de la dificultad teórica que existe al abordar un problema de colisión entre sistemas de muchos cuerpos, más aún cuando las fuerzas entre dichos cuerpos no son conocidas con precisión.

Una reacción nuclear entre un proyectil a y un blanco X suele representarse:

$$a + X \rightarrow b + Y \qquad \text{o} \qquad X(a,b)Y \qquad (12.1)$$

Para llevarlas a cabo es necesario disponer de fuentes de partículas adecuadas. De entre ellas destaca el uso de los aceleradores de partículas gracias a los cuales ha progresado mucho la física nuclear.

Entre las reacciones históricas que han marcado el progreso de las reacciones nucleares se encuentran:

- la primera transmutación nuclear (Rutherford, 1919), ejemplo de una reacción inelástica de dos cuerpos: $\alpha + {}^{14}\mathrm{N} \rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + \mathrm{p}$,

- la obtenida con el primer acelerador electrostático (Cockroft y Walton, 1930): $p + 7\mathrm{Li} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \alpha$, premiados con el Nobel de Física en 1951 porque verificó experimentalmente que la masa y energía son equivalentes, $E = mc^2$,

- el descubrimiento del neutrón (Chadwick, 1932): $\alpha + {}^{9}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \mathrm{n}$

- el descubrimiento de la radiactividad artificial (I. Y F. Joliot Curie, 1934): $\alpha + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + \mathrm{n}$, utilizando una fuente radiactiva de *Po*, seguido de la desintegración β^+ del ${}^{30}_{15}\mathrm{P}(t_{1/2} = 2{,}5\ \mathrm{min}) \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$ Este último proceso (α, n), enriquece en protones a los núcleos; por ello se producen núcleos inestables bajo desintegración β^+.

- la captura neutrónica, procesos que E. Fermi impulsó sistemáticamente para sintetizar los transuránidos. Ejemplo: $n + {}^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{239}\mathrm{U} + \gamma$, proceso llamado captura radiativa, seguido de la desintegración β del ${}^{239}\mathrm{U}$ que es un núcleo inestable:

$$^{239}\mathrm{U}(t_{1/2} = 23\ \mathrm{min}) \rightarrow {}^{239}\mathrm{Np} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

y a su vez:

$$^{239}\mathrm{Np}(t_{1/2} = 2{,}4\ \mathrm{d}) \rightarrow {}^{239}\mathrm{Pu} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

Así fue como, entre otras cosas, se de scubrió por casualidad la fisión inducida por neutrones.

12.2 Leyes de conservación

De entre las más interesantes se pueden considerar las leyes de conservación de:

- E, $\vec{P}$, la energía y la cantidad de movimiento (el momento),
- Q, la carga eléctrica,
- B, el número bariónico (el número de nucleones),
- J^P, el momento angular total y la paridad,
- T, el isospín, etc.

12.2.1 Conservación de la energía–momento

Sea de nuevo la reacción $a + X \rightarrow b + Y$ cuyo esquema se representa en la figura 12.1. La conservación de la energía en la reacción se escribe:

$$E_a + E_X = E_b + E_Y$$

Como la energía total es $E = T + mc^2$, igual a la energía cinética más la masa, se tiene:

$$m_a c^2 + T_a + m_X c^2 + T_X = m_b c^2 + T_b + m_Y c^2 + T_Y$$

Como siempre, el valor Q de la reacción da el balance energético y se calcula $Q = (m_{\text{inicial}} - m_{\text{final}})c^2$ o sea:

$$Q = (m_a + m_X - m_b - m_Y)c^2 = T_Y + T_b - T_a - T_X$$

expresión válida en cualquier sistema de referencia. Los cálculos pueden perfectamente ser no relativistas ya que las velocidades son frecuentemente muy bajas en las reacciones nucleares. Por ello también es frecuente tomar para la masa de un núcleo, el valor entero A en unidades de masa atómica u. Si ello no fuese bastante preciso entonces es

señal de que deben realizarse cálculos relativistas. Así por ejemplo, para la reacción de Chadwick Q = 6, 12 × 10^{-3} $u \cdot c^2$ = +5, 7 MeV, e igualmente, para la de Rutherford y la de Cockroft Walton dadas más arriba, se encuentra: Q = −1, 19 MeV y Q = +17, 35 MeV respectivamente.

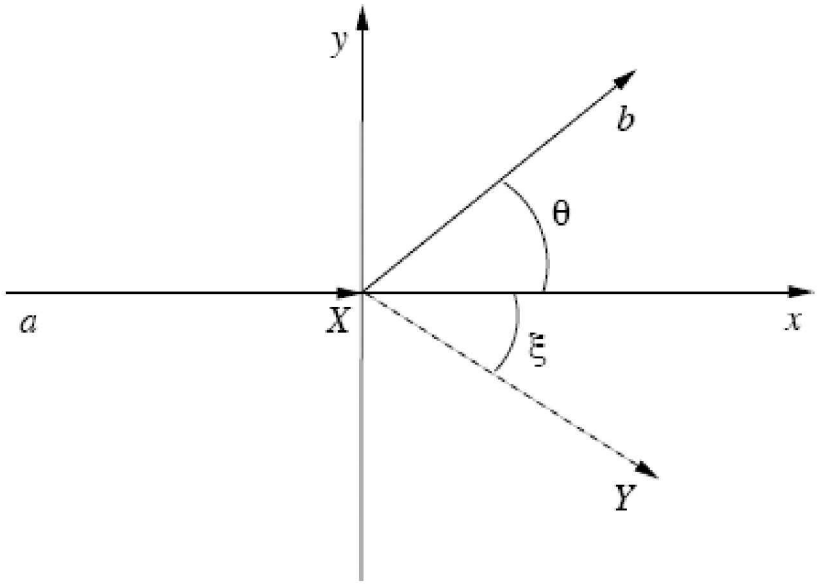


Figura 12.1: Reacción nuclear $a + X \rightarrow b + Y$ en el sistema laboratorio.

En lo que respecta a la conservación del momento, siguiendo también la notación de la figura 12.1, se puede escribir:

$$\left.\begin{aligned} p_a &= p_b \cos\theta + p_Y \cos\xi \\ 0 &= p_b \sin\theta - p_Y \sin\xi \end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

con lo que conocidos Q y T_a quedan 4 incógnitas θ, ξ, p_b, p_Y. Experimentalmente se suele conocer T_a y medir T_b y θ con lo que la conservación del momento puede utilizarse para determinar Q:

$$m_Y Q + T_a(m_Y - m_a) = T_b(m_Y + m_b) - 2\cos(\theta)\sqrt{T_a T_b m_a m_b} \qquad (12.3)$$

de forma que si se conoce m_a y m_b se puede determinar m_Y.

Suprimiendo ξ y p_Y, a partir de las ecuaciones de conservación de la energía y del momento se encuentra la siguiente relación entre T_b y θ:

$$\sqrt{T_b} = \frac{\cos(\theta)\sqrt{m_a m_b T_a}}{m_Y + m_b} \pm \pm \frac{[m_a m_b T_a \cos^2(\theta) + (m_Y + m_b)(m_Y Q + (m_Y - m_a)T_a)]^{1/2}}{m_Y + m_b}$$

El valor Q sirve para clasificar el tipo de reacción:

Q > 0, exoenergética
= 0, elástica
< 0, endoenergética

12.2.2 Sistemas laboratorio y centro de masas

En el estudio de las reacciones nucleares, se recurre frecuentemente a utilizar dos sistemas de referencia: uno es el sistema laboratorio (lab) y el otro es el sistema de centro de masas (abreviadamente *cdm*). Normalmente el sistema laboratorio es el que describe las reacciones tal como suceden. El interés del sistema cdm es que requiere menos variables para describir los choques y facilita ciertos cálculos teóricos. Ambos son sistemas inerciales, y es inmediato relacionar las magnitudes dadas en un sistema respecto al otro.

El centro de masas de un sistema de i partículas de masa m_i, por definición, tiene por coordenadas:

$$\vec{r}_{\text{cdm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (12.4)$$

Si, como es habitual, la masa total del sistema es $M = \sum m_i$, la expresión

$$\vec{r}_{\mathbf{cdm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

para las coordenadas del cdm se simplifica: .

Un sistema de dos partículas (o núcleos) que participan en una reacción, se encuentran en el sistema laboratorio, representado en la figura 12.1, en el que se cumple $T_X = 0$ puesto que el blanco está en reposo (véase también figura 12.2).

En el sistema laboratorio, la velocidad del centro de masas es sencillamente la derivada de las coordenadas:

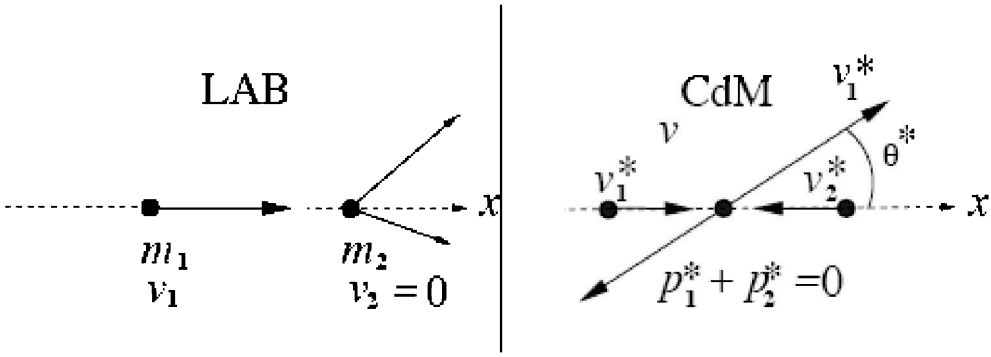
$$\vec{v}_{\mathbf{cdm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \qquad (12.5)$$

En el sistema cdm, las variables cinemáticas se escribirán con una $\star$ y, por definición, la suma de momentos es nula: $p_a^\star + p_X^\star = 0$. Tratándose de colisiones no relativistas, la velocidad de cualquier partícula (o núcleo), se obtiene aplicando la transformación clásica de Galileo: $\vec{v}^\star = \vec{v} - \vec{v}_{\mathbf{cdm}}$. Así se entiende la expresión $p_1^\star = \mu v_1$ que se puede ver en la figura 12.2.

Ejemplo. Calcular el cociente T'/T de energías en el sistema laboratorio de un neutrón antes y después del choque elástico n+núcleo, en función del ángulo en el centro de masas.

En el sistema laboratorio el neutrón incidente tiene velocidad v_1 en la dirección del eje x. En el sistema cdm la velocidad del neutrón antes del choque es $v_1^* = v_1 - v_{\mathbf{cdm}}$ y después del choque $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\mathbf{cdm}}$ y la trayectoria forma un ángulo θ^* respecto a la incidente. La velocidad del neutrón después del choque en el siatema laboratorio es simplemente $\vec{v}_1' = \vec{v}_1^* + \vec{v}_{cdm}$. Como la energía cinética es proporcional a v^2 el cociente

$T'/T = \vec{v}_1'^2/v_1^2 = (m_2^2 + m_1^2 + 2m_2 m_1 \cos\theta^*)/(m_1 + m_2)^2$, y, suponiendo que $m_1 = 1$ y $m_2 = A$ queda $T'/T = (A^2 + 1 + 2A \cos\theta^*)/(A + 1)^2$ que es la fórmula básica de la moderación de neutrones que se necesita en los reactores de fisión.



$$(m_1 + m_2)\, v_{cdm} = m_1\, v_1 \qquad p_1^* = \mu\, v_1 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Figura 12.2: Transformación de variables cinemáticas del sistema laboratorio al sistema centro de masas. v_{cdm} es la velocidad del centro de masas en el sistema laboratorio; μ es la masa reducida. Se representa la colisión antes y después del choque.

En una reacción endoenergética, la condición necesaria para que pueda tener lugar es:

$$T^* \geq |Q|$$

donde T^* es la energía cinética total en el sistema cdm: $T^* = T_a^* + T_X^*$, y como $p_a^* = -p_X^*$, o lo que es lo mismo $v_X^* = -\frac{m_a}{m_X} v_a^*$, se tiene que:

$$T^* = T_a^* \left(1 + \frac{m_a}{m_X}\right)$$

En el sistema laboratorio la energía cinética total es $T = T_a = \frac{1}{2} m_a v_a^2$, cumpliéndose que $v_a = v_a^\star - v_X^\star = v_a^\star \left(1 + \frac{m_a}{m_X}\right)$, como puede comprobarse en la figura 12.2; luego $T = T^\star \left(1 + \frac{m_a}{m_X}\right)$ con lo que la condición $T \geq |Q|$ se escribe también:

$$\boxed{T \geq |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_X}\right)} \qquad (12.6)$$

Es decir, toda reacción endoenergética tiene un umbral energético para que pueda iniciarse. Dicho umbral, que se especifica en el sistema laboratorio, se calcula (con el signo =) gracias a esta última ecuación.

En caso de tener que usar transformaciones relativistas (las transformaciones de Lorentz entre sistemas de coordenadas), puede consultarse la sección (16.2.3) en el tema dedicado a las simetrías, donde se estudian dichas transformaciones.

12.2.3 Otras leyes de conservación

Otras magnitudes que se conservan en las reacciones nucleares son: carga eléctrica, número bariónico, espín–paridad, isospín, etc.

La conservación del isospín impone condiciones sobre los posibles valores de las secciones eficaces entre distintos estados de carga de los participantes en la reacción.

12.3 Clasificación de reacciones nucleares

La clasificación de las reacciones nucleares puede hacerse según

varios criterios. Los más frecuentemente utilizados son los siguientes:

a) Según la energía:

- baja; ≤ 10 MeV/nucleón. Se estudia la estructura y los niveles nucleares.
- intermedia; $100 \leq E \leq 1000$ MeV. Es el dominio de la física de producción de mesones.
- alta; $E \geq 1$ GeV. Física de partículas, estudio de quarks, etc.

b) Según la topología. Siguiendo la notación dada en (12.1):

- difusión elástica ($a = b$), uno de cuyos ejemplos más conocidos es el del experimento de Rutherford, y
- difusiones inelásticas; que se describen a continuación guardando su denominación en inglés:
  1 las de *knock–out*, en la que aparecen más de dos partículas en el estado final ($a + X \rightarrow Y + b + c$),
  2 y las de *transfer*, clasificándos eéstas a su vez en reacciones de *stripping*, tales como (d, p), (d, n) o reaccionesde *pick–up*: (p, d), (n, d).

c) Según el mecanismo:

- reacciones directas, normalmente muy rápidas (10^{-22} s) y entre ellas se encuentran las reacciones inelásticas; o sea las de *knock–out* y las conocidas variantes de las de *transfer*: *stripping* y *pick–up*,
- de formación de núcleo compuesto: $a + X \rightarrow X^{\star} \rightarrow Y + b$. Son reacciones lentas (10^{-14} s), y se interpretan como debidas a procesos de reestructuración de nucleones dentro del núcleo. Entre estas reacciones, las más conocidas son las de formación de resonancias (que se interpretan como excitaciones de modos

colectivos).

Estas dos interpretaciones son paralelas a las de la estructura nuclear descrita por:

- modelos de partícula individual (reacciones directas) o
- modelos de comportamiento colectivo (reacciones de núcleo compuesto).

También existen las reacciones entre iones pesados o sea entre núcleos con elevado número másico. Actualmente existe en marcha, en el CERN un ambicioso programa de estudio de reacciones a altas energías de iones relativistas. Ello ha sido posible al conseguir acelerar iones de *O*, *Ca* e incluso de *Pb*, a energías superiores a 200 GeV/nucleón. Este programa pretende encontrar el estado de la materia conocido como de plasma de quarks y gluones (constituyentes elementales de los nucleones). Un estado que se alcanzaría a densidades de energía muy elevadas.

La importancia y el interés del estudio de reacciones nucleares puede resumirse en las siguientes líneas de trabajo, que tantos progresos han aportado a la física nuclear:

1. Masas y niveles energéticos nucleares a través de la espectroscopía nuclear, por ejemplo en reacciones $a + X \rightarrow b + Y^*$, con posterior desintegración $Y^* \rightarrow Y + \gamma$.

2. Tamaño y estructura nucleares.

3. Nucleosíntesis en astrofísica y cosmología.

4. Generación de potencia (fisión, fusión) y producción de isótopos artificiales.

Antes de entrar en el estudio de las reacciones nucleares, conviene conocer la magnitud más importante que caracteriza las interacciones: la sección eficaz.

Normalmente, en las reacciones nucleares se suele hablar de sección eficaz total de reacción, como suma de todos los procesos que pueden ocurrir en el choque de $a + X$. Lo mismo sucede entre colisiones de partículas. Además se suele identificar fácilmente la reacción elástica $a + X \rightarrow a + X$, con lo que la sección eficaz total (o sección eficaz de colisión σ_{coll})se suele escribir como suma:

$$\sigma_T = \sigma_E + \sigma_I$$

de la sección eficaz elástica e inelástica. Esta última se suele denominar sección eficaz de absorción, σ_{abs}. Uno de los canales inelásticos es $a + X \rightarrow b + Y$, ya que $a \neq b$.

12.4 Mecanismos de reacción

Las nociones de difusión y absorción son herencias del lenguaje ondulatorio. Con estas denominaciones se pretende definir qué tipo de proceso tiene lugar en una reacción nuclear.

La palabra difusión es casi siempre sinónimo de reacción elástica o *quasi–elástica,* en la que las dos partículas que entran en el choque, son las que salen, con sus mismas masas que en el estado inicial. El choque quasielástico define a los procesos en los que el proyectil no cambia de naturaleza, pero el núcleo del estado final (o si se quiere, el blanco) queda en un estado excitado. Ya no tiene la misma masa y por lo tanto no es una difusión elástica.

La absorción, al igual que en los fenómenos de interacción de la luz, denomina a las reacciones inelásticas en las que las partículas cambian totalmente. Hay un cambio de masas y de naturaleza de las partículas que intervienen en el choque.

En la difusión nuclear, siguiendo una propuesta de Weisskopf, se suelen abordar las reacciones nucleares en tres etapas:

- antes de chocar, tiene lugar la difusión culombiana, consecuencia

del largo alcance de la fuerza de Coulomb;

- en el choque, se suelen distinguir reacciones directas y reacciones de núcleo compuesto;
- por último, se suele abordar el estudio del modelo óptico nuclear.

A continuación se estudian las características de estos procesos nucleares, cuyo esquema se ha representado gráficamente en la figura 12.3.

12.4.1 Difusión de Rutherford (culombiana)

Se trata de la difusión de partículas cargadas por un potencial tipo Coulomb:

$$V_C(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La barrera energética que debe franquear la partícula es $B = V_C(R)$, siendo R el radio nuclear. Por ejemplo B = 3 MeV para el C y 17 MeV para el Pb.

En una colisión p + N, la barrera podrá ser penetrada, por efecto túnel, aunque la energía cinética del protón sea $T_p < B$. Este fenómeno es inexplicable por la física clásica.

La sección eficaz diferencial de Rutherford (véase la figura 1.1) es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]^2 \left(\frac{zZe^2}{4T_a}\right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} = \frac{d_0^2}{16} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$$

Recuérdese que para una energía cinética T, la distancia de máximo acercamiento es $d_0 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 T}$.

Con esta expresión se puso en evidencia la existencia del núcleo atómico.

Los procesos de interacción culombiana son importantes porque son los responsables de la excitación de iones de núcleos pesados a diferentes estados rotacionales.

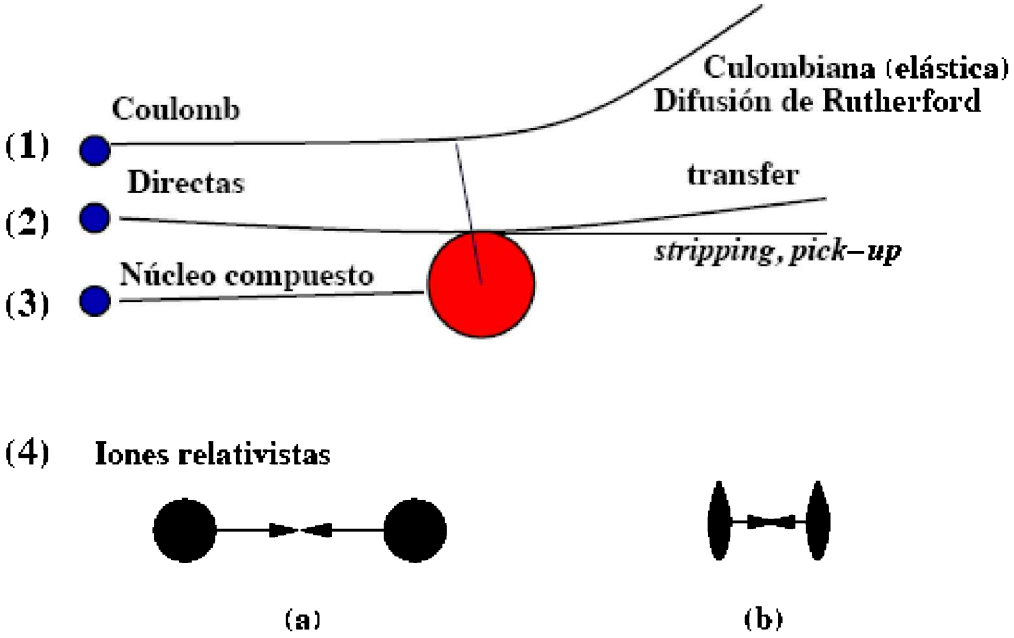


Figura 12.3: Esquema representativo de las 4 fases de estudio de reacciones nucleares que se discute en el texto. Los núcleos en las colisiones de iones relativistas (a), sufren contracción espacial como en (b).

12.4.2 Difusión por un potencial nuclear

Al aumentar la energía de la partícula incidente,ésta puede aproximarse más al blanco hasta que llega un momento en que entran en juego las fuerzas nucleares. La distancia mínima de acercamiento d_0 a partir de la cual falla la ley de Rutherford, da la estimación del radio nuclear (véase la figura 1.5). Se obtienen radios $R \sim 1,45\ A^{1/3}$ fm, valores ligeramente mayores que los que se obtienen en la difusión $e^{-}N$, para el alcance de la fuerza nuclear.

12.4.3 Reacciones de núcleo compuesto

Concepto introducido por Bohr en 1936. El proceso, que se representa por $a + X \rightarrow b + Y$ y que queda determinado si se conocen a y b, se explica por la formación de un nuevo núcleo (X^* distinto de X) que sufre una reestructuración. Los estados de núcleo compuesto forman un contínuo de estados nucleares entre los que destacan las resonancias. Después de la acumulación de muchos datos sobre reacciones de captura neutrónica, por ejemplo:

$$n + {}^{107}Ag \rightarrow {}^{108}Ag + \gamma$$

se observa la formación de resonancias; es decir, se forma un estado (un núcleo compuesto) que luego se desintegra ${}^{108}Ag \rightarrow {}^{108}Cd + e^- + \overline{\nu}_e$, olvidandocómo se había formado. En estos casos, la sección eficaz del proceso $a + X \rightarrow b + Y$ es un producto de la sección eficaz total de reacción $a + X$ (σ_a), por el cociente de desintegración (*branching ratio*) Γ_b/Γ correspondiente al canal b:

$$\sigma_{ab} = \sigma_a \frac{\Gamma_b}{\Gamma}$$

en donde b representa un determinado canal de desintegración, cuya anchura es Γ_b, y es uno de los posibles canales i que pueden tener lugar. La anchura total será $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$. Así pues, se forma una resonancia, cuya ley de probabilidad en función de la energía cumple:

$$\sigma_a = \pi \lambda\!\!\!^{-2} g \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E_r - E)^2 + \Gamma^2/4} \qquad (12.7)$$

la conocida forma de Breit–Wigner, como también sucede con las

reacciones entre partículas. En la anterior expresión $g = \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_X+1)}$, es el factor estadístico que da la multiplicidad de espín y E_r es la energía en el máximo de la sección eficaz, valor que suele utilizarse para identificar la resonancia (que equivale a su masa); $\lambda\!\!\!^{-}$ = $\hbar/p$ es la longitud de onda, reducida, del proyectil, que se escribe $\lambda\!\!\!^{-}$ = 1/k.

12.4.4 Reacciones directas

Empiezan a observarse a partir de unos 5 MeV de energía del proyectil. Son generalmente interacciones que se pueden interpretar como nucleón–nucleón.

Un ejemplo de este tipo de reacciones son las reacciones de *transfer*:

$$^{16}\mathrm{O} + \mathrm{d} \rightarrow {}^{17}\mathrm{O} + \mathrm{p}$$

que son muy sensibles a la estructura en capas de los nucleones. Al igual que las reacciones de *pick–up* tales como (p, d), (n, d), (d, t), las de *stripping* son también de tipo periférico.

Sea $\vec{q}$ el momento transferido entre proyectil y la partícula en el estado final (véase la figura 12.1):

$$q^2 = k_a^2 + k_b^2 - 2k_a k_b \cos\theta$$

El valor del momento angular orbital transferido en la reacción está relacionado con q, por definición $\mid \vec{r} \times \vec{q} \mid \hbar = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$, o sea, que si la reacción es efectivamente periférica y el proyectil tiene radio r_a se cumplirá:

$$(r_a + R)q = \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

lo que permite entender qué órbitas del modelo de capas han podido

actuar en la reacción.

12.4.5 Reacciones entre iones pesados

El estudio de colisiones entre iones pesados ha sido frecuentemente utilizado con fines muy distintos, según la energía de los iones:

- A baja energía. Existen varias instalaciones en el mundo que permiten el estudio de colisiones de iones, con pequeños aceleradores: CAEN, GSI (Darmstadt), PSI (Zurich), ISOLDE (CERN), etc. Incluso existen aceleradores de iones de reciente instalación en España (Sevilla y Madrid).
  - Se han podido comprobar conceptos predichos por el modelo óptico, que se describe más adelante y que aborda los procesos de colisión bajo el punto de vista ondulatorio.
  - Han podido verificarse propiedades relacionadas con la estructura nuclear (excitaciones culombianas, colisiones periféricas, de transfer de nucleones, etc.)

- A alta energía (colisiones entre iones relativistas), el objetivo continua siendo el de verificar la existencia y propiedades del nuevo estado de la materia conocido como plasma de quarks y gluones. Actualmente hay experimentos en marcha en el colisionador RHIC de Brookhaven y en el colisionador LHC del CERN, cuyas primeras interacciones entre iones pesados se llevaron a cabo a finales de 2010.

12.5 Modelo óptico

El modelo óptico fue introducido (Feshbach, Porter y Weisskopf, 1954) por la similitud entre la difusión nuclear y las propiedades

ondulatorias de la luz. Supone que la interacción de una partícula con un núcleo se puede tratar como la difusión de la partícula incidente por un potencial $U(r)$, que representa el núcleo (como si se tratase de una interacción de un cuerpo con un potencial). La solución pasa por plantear y resolver la ecuación de Schrödinger.

Para las colisiones nucleares con proyectiles de baja energía, el potencial que explica las secciones eficaces se escribe, según el modelo óptico, de la forma $V + iW$ con $V \sim 50$ MeV y $W \sim 5$ MeV. Esta forma recuerda la difracción de la luz por un disco. La parte compleja del potencial explica la absorción. En efecto, supóngase un potencial:

$$\begin{aligned} U &= V_0 + iW_0 && r < R \\ &= 0 && r > R \end{aligned}$$

con V_0 de la forma Saxon–Woods más el término de acoplamiento espín–órbita y W_0 una función de V_0 y mucho menor que V_0. Entonces, el número de ondas se escribe $k = k_r + ik_i$ o sea, si $W_0 << V_0$:

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0 + iW_0)} \approx \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)} + i\frac{W_0}{2\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E+V_0}}$$

con lo que la función de ondas toma la forma:

$$\psi \sim e^{ik_r r}\frac{e^{-k_i r}}{r}$$

así, el término real k_r da lugar a la difusión y el imaginario es el que da una probabilidad radial $\mathcal{P} \sim e^{-2k_i r}$, responsable de la absorción.

El modelo óptico se usa conéxito para explicar reacciones hasta energías incidentes de varios centenares de MeV y explica el comportamiento medio de las secciones eficaces de difusión, absorción y diferenciales. Algunos valores de estas secciones eficaces pueden verse en la tabla J.1, del apéndice correspondiente. Los mejores resultados del modelo óptico son para energías ≥ 10 MeV y para núcleos de número

másico medio. En el caso de los núcleos masivos, las predicciones son aceptables.

12.6 Problemas

12.1 Calor de reacción y energía umbral para una reacción nuclear
Considerar las siguientes reacciones nucleares:

$$^{9}Be(^{3}He, p)^{11}B \quad 9Be(^{3}He, d)^{10}B \quad ^{9}Be(^{3}He, t)^{9}B$$

Se pide:

a) Calcular los correspondientes calores de reacción y los valores umbrales energéticos de los núcleos de ^{3}He incidentes.

b) Suponiendo que la primera de las citadas reacciones se produce bombardeando un blanco de berilio (100 % ^{9}Be, elemento monoisotópico) con un haz de partículas de ^{3}He de 1,4 MeV, ¿qué niveles excitados del núcleo residual cabe esperar?

Datos: $M(^{9}Be)$ = 9,012182 u, $M(^{11}B)$ = 11,009305 u, $M(^{10}B)$ = 10,012937 u, $M(^{9}B)$ = 9,013329 u, $M(^{3}He)$ = 3,016029 u, $M(^{3}H)$ = 3,016049 u, $M(^{2}H)$ = 2,014102 u y $M(^{1}H)$ = 1,007825 u.

12.2 Producción de mesones en una reacción nuclear
Suponer una reacción nuclear en la que un núcleo blanco en reposo de masa m_2 es bombardeado por partículas de masa m_1 y energía cinética T_1 para producir mesones en el estado final. Se pide:

a) Demostrar que la velocidad del referencial del centro de masas en el sistema del laboratorio viene dada, en el caso relativista, por la expresión:

$$\frac{m_1 v_1}{(1 - v_1^2/c^2)^{1/2}} = v_{CM}\left[m_2 + \frac{m_1}{(1 - v_1^2/c^2)}\right]$$

donde v_1 es la velocidad de m_1 en el laboratorio.

b) Demostrar también que la energía cinética total inicial en el referencial del centro de masas viene dada por:

$$T^*_{\text{tot}} = (m_1 + m_2)c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{2m_2 T_1}{(m_1 + m_2)c^2}} - 1 \right]$$

c) Emplear el resultado de los apartados anteriores para demostrar que la energía umbral para la producción de mesones viene dada por:

$$T_1^{\text{umbral}} = \frac{[(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2]c^2}{2m_2}$$

d) Calcular la energía umbral de producción de mesones, así como las energías cinéticas de los productos de la reacción a la energía umbral, para los siguientes procesos:

$$\text{p}\,(\gamma,\pi^+)\text{n} \qquad {}^{12}\text{C}(\text{d},\pi^+){}^{14}\text{C}$$

e) Calcular la energía umbral de producción del proceso p + p → p + n + π^+ para los casos en que el protón blanco está en reposo y en movimiento dentro de un núcleo con una energía cinética de 20 MeV.

Datos: $m_{\pi^+} = 273\ m_e$, $m_{\text{p}} = 938{,}3$ MeV/c^2, $m_{\text{n}} = 939{,}6$ MeV/c^2, $M(^{12}\text{C}) = 12{,}0$ u, $M(^{14}\text{C}) = 14{,}003242$ u y $M(^{2}\text{H}) = 2{,}014102$ u.

12.3 Ecuación *Q* de una reacción nuclear

a) Obtener una expresión para el valor *Q* de una reacción nuclear en términos de las energías cinéticas del proyectil y de la partícula emitida en el caso no relativista.

b) Obtener la corrección relativista para el valor de *Q* obtenido en el apartado anterior y estimar su valor para un proceso típico

(d, p) donde la energía cinética de los deuterones incidentes es de 10 MeV y la masa atómica del producto de la reacción es 10 u.

12.4 Reacción endotérmica y energía umbral

La reacción ^{7}Li(p, n)^{7}Be (Q = −1,646 MeV) es usada frecuentemente para producir neutrones empleados en la calibración de espectrómetros de neutrones.

Se pide:

a) Obtener la energía y ángulo de emisión de los neutrones y del núcleo de retroceso ^{7}Be cuando la reacción se produce a la energía umbral. Emplear para ello el resultado para la ecuación Q del problema anterior.

b) Estudiar qué ocurre para energías del proyectil cercanas pero por encima del umbral de la reacción. Encontrar el rango de energías del haz de protones para el que se emiten neutrones con dos energías distintas. Obtener el ángulo máximo de emisión de este tipo de neutrones en función de la energía cinética del proyectil y demostrar que puede escribirse como:

$$\cos^2\theta \geq \left[1 + \frac{m_A m_B}{m_a m_b}\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)\right]$$

con κ el cocientre entre la energía cinética del proyectil y el umbral para la reacción $A(a, b)B$.

c) Con qué ángulo, respecto a la dirección de un haz de protones de 3 MeV se emiten neutrones de 1 MeV?

d) ¿Cuál es la energía máxima que se puede obtener para estos neutrones?

e) La sección eficaz diferencial de la reacción anterior para protones de 3 MeV y a 0° es de 50 mb/sr. Si un blanco de ^{7}Li tiene un espesor de 50 keV para protones de 3 MeV, ¿cuál es el número de neutrones/s/sr emitidos en la dirección hacia delante

si se dispone de un haz incidente de 1 μA.

Datos: la pérdida de energía para p de 3 MeV en Li es de 100 keVcm^2/mg.

12.5 Reacción nuclear y desintegración radiactiva

Al bombardear ^{197}Au con deuterones de 2,5 MeV (sistema laboratorio) se produce la reacción ^{197}Au(d, p)^{198}Au. Este núcleo decae por emisión β a ^{198}Hg siendo la energía máxima del espectro del electrón, 0,963 MeV. La emisión β^- es seguida por una emisión γ de energía 0,412 MeV. Se pide:

a) Calcular la masa atómica del ^{198}Au, tomando como datos las del ^{197}Au y ^{198}Hg.

b) Determinar el calor de reacción *Q* del proceso.

c) Obtener la energía de separación del último neutrón del núcleo ^{198}Au.

d) Calcular la energía de enlace media por nucleón para el ^{198}Au y compararla con el resultado obtenido en el apartado anterior.

Datos: m_n = 1,008665 u, $M(^1\text{H})$ = 1,007825 u, $M(^2\text{H})$ = 2,014102 u, $M(^{197}\text{Au})$ = 196,966541 u y $M(^{198}\text{Hg})$ = 197,966743 u.

12.6 Emisión de fotones en reacciones nucleares

En una cierta reacción nuclear $A(a, b)B$ se obtiene, como producto residual, un nucleido *B* que puede considerarse constituido por un core inerte de masa 24 y un neutrón periférico. La correspondiente energía de enlace es de 30 MeV. Se sabe, por otra parte, que los niveles excitados de tal núcleo son estados *S*. De acuerdo con estos datos, calcular las energías de los fotones cuya emisión es posible tras la citada reacción nuclear.

12.7 Estudio de niveles energéticos con reacciones nucleares

Al estudiar la reacción ^{11}B(α, n)^{14}N originada al bombardear un blanco de ^{11}B con partículas α de 4 MeV, se encuentra que el correspondiente calor de reacción vale 0,157 MeV. La reacción

se muestra acompañada de radiación gamma cuya energía es E_γ = 2,31 MeV. Por otro lado, al estudiar la difusión de protones de energía T_p = 7 MeV sobre ^{14}N se observa la subsiguiente emisión de radiación de 5,10, 4,91, 3,95, 2,79, 2,31 y 1,64 MeV. Las radiaciones de 2,79 y 2,31 MeV, por una parte, y las de 2,31 y 1,64 MeV, por otra, se emiten en coincidencia. Se pide:

a) A partir de los anteriores datos experimentales, establecer el esquema de niveles del nucleido ^{14}N para bajas energías de excitación y compararlos con los de la figura 12.4.

b) ¿Cuáles de estos niveles se pondrán de manifiesto en un estudio de la difusión inelástica de partículas α de 20 MeV sobre dicho núcleo? Calcular la energía de las partículas α en las dispersiones elásticas e inelásticas.

Datos: $\Delta(^{11}B)$ = 8667 keV, $\Delta(^{14}N)$ = 2863 keV, $\Delta(^{4}He)$ = 2424 keV y $\Delta(^1_0n) = 8071$ keV.

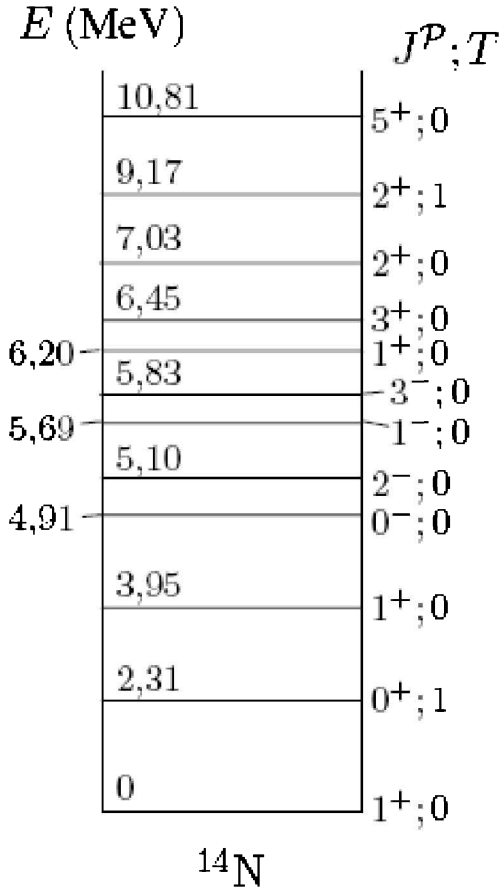


Figura 12.4: Diagrama de niveles de energía para el ^{14}N.

12.8 Reacción exotérmica

Considérese la reacción:

$$^{10}\text{B} + {}^{2}\text{H} \rightarrow {}^{11}\text{C} + \text{n}$$

donde la energía cinética del deuterón es de 3,64 MeV. Sabemos que los niveles excitados del ^{11}C se hallan situados a 1,90, 4,23, 4,77, 6,46, 6,87, 7,39, 8,12, 8,44, 8,69, 8,97 y 9,13 MeV por encima del estado fundamental. Se pide:

a) ¿Qué niveles se pueden alcanzar pormedio de esta reacción? ¿Cuál es la energía umbral de las partículas de ^{2}H incidentes?

b) Calcular la energía cinética de los neutrones emitidos a 60° cuando la reacción se produce al nivel excitado de 4,77 MeV.

c) Calcular el rango de energías de los neutrones emitidos del apartado anterior.

Datos: $\Delta(^{10}\mathrm{B}) = 12050$ keV, $\Delta(^{2}\mathrm{H}) = 13135$ keV, $\Delta(^{11}\mathrm{C}) = 10650$ keV y $\Delta(^{1}_{0}\mathrm{n}) = 8071\ \mathrm{keV}$.

12.9 Reacciones nucleares y conservación de paridad

La conservación de paridad en la interacción nuclear puede establecerse experimentalmente mediante la observación de transiciones α de paridad prohibida. Se pide:

a) Considerar la reacción nuclear $^{19}\mathrm{F(p,}\ \alpha)^{16}\mathrm{O}$ a la energía de la resonancia (pico en la sección eficaz del proceso) para $E_p = 0{,}34$ MeV. Aplicando consideraciones de conservación de energía, cantidad de movimiento y paridad, determinar los estados del ^{16}O que son accesibles via desintegración α del estado intermedio 1^+ del $^{20}\mathrm{Ne}^*$ (13,19 MeV). Comparar los resultados con los datos que se dan en la tabla 12.1.

Tabla 12.1: Esquema de niveles de energía (en MeV) y valores de espín–paridad J^P para el ^{16}O.

$E(^{16}\mathrm{O})$	0	6,05	6,13	6,92	7,12	8,88	9,59	9,85	10,36
$J^P(^{16}\mathrm{O})$	0^+	0^+	3^-	2^+	1^-	2^-	1^-	2^+	4^+

b) Una variante de este experimento consiste en estudiar la desintegración α del ^{16}O que sigue a la desintegración β^- del estado fundamental del ^{16}N. ¿A qué energía del espectro α en el sistema laboratorio debería aparecer un pico que nos diera evidencias de violación de paridad?

c) ¿Qué conclusiones obtendríamos tras la observación de un pico pronunciado a 1,82 MeV en el espectro α con cero cuentas en su vecindad entre 0,9 y 2,3 MeV.

Datos: $J^P(^{16}\mathrm{N}) = 2^-$, $J^P(^{12}\mathrm{C}) = 0^+$, $M(^{12}\mathrm{C}) = 12$ u, $M(^{19}\mathrm{F}) = 18{,}998403$ u, $M(^{16}\mathrm{O}) = 15{,}994915$ u, $M(^{4}\mathrm{He}) = 4{,}002603$ u y $M(^{1}\mathrm{H}) = 1{,}007825$ u.

12.10 Reacción nuclear y núcleo compuesto

Considerar la reacción nuclear $^{10}\mathrm{B}(\alpha, \mathrm{p})^{13}\mathrm{C}$ resultado de la interacción de iones de helio de 4,77 MeV en un blanco de boro enriquecido con el isótopo $^{10}\mathrm{B}$. En el estado final se observan cuatro grupos de protones a $\theta = 90°$ con energías de 6,84, 3,98, 3,43 y 3,23 MeV. Se pide:

a) Calcular el calor de reacción del proceso y estimar los niveles energéticos del $^{13}\mathrm{C}$.

b) Si se supone que el proceso tiene lugar mediante la formación de un núcleo compuesto, calcular su energía de excitación así como su energía cinética.

c) Calcular las energías de excitación del núcleo compuesto si se sabe que la distribución de la intensidad de los fotones más energéticos que acompañan la reacción presenta resonancias para energías incidentes de las partículas α de 2,27, 1,83 y 1,50 MeV.

d) Dibujar el diagrama de niveles de energía para la formación del núcleo compuesto de acuerdo con los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Datos: $\Delta(^{10}\mathrm{B}) = 12050{,}76$ keV, $\Delta(^{4}\mathrm{He}) = 2424{,}91$ keV, $\Delta(^{14}\mathrm{N}) = 2863{,}42$ keV, $\Delta(^{13}\mathrm{C}) = 3125{,}01$ keV y $\Delta(^{1}\mathrm{H}) = 7288{,}97$ keV.

13. Fisión nuclear

Se denomina fisión nuclear a un proceso nuclear en el que el núcleo *A* (normalmente muy masivo) se fragmenta en dos núcleos más pequeños (con número másico cercano a *A*/2). Es un proceso exoenergético, es decir, desprende una cantidad extraordinariamente elevada de energía, lo que da lugar a aplicaciones importantes. En el lado positivo, por ejemplo, la fisión es el proceso básico en la concepción de los reactores nucleares utilizados en la producción de energía eléctrica. En el mundo existen actualmente unos 500 reactores nucleares en funcionamiento y producen alrededor del 15 % de la electricidad consumida. En el lado negativo, la fisión ha sido la base del desarrollo del armamento nuclear, que sigue representando un peligro potencial para el bienestar de la sociedad.

En la práctica, la fisión que se considerará, es un fenómeno que atañe a los núcleos más pesados (uranio y plutonio principalmente) y se estudiará con detalle la fisión inducida por neutrones. En efecto, el neutrón es un proyectil ideal porque al ser neutro no hay barrera culombiana que le impida penetrar en un núcleo y provocar una reacción nuclear.

13.1 Fisión nuclear

13.1.1 Antecedentes

E. Fermi (Premio Nobel de Física en 1938), realizó experimentos de captura neutrónica en los que un núcleo al absorber el neutrón, se transforma en un isótopo con un neutrón más, generalmente dando lugar a un núcleo inestable que decae por la desintegración β^- posterior, apareciendo así el núcleo siguiente en la tabla de Mendeleiev. Efectivamente, al decaer por desintegración β da lugar al núcleo Z +1. Este fue el mecanismo de síntesis de los elementos transuránidos, aquéllos que se encuentran más allá del uranio en la tabla de Mendeleiev. El mismo proceso es el que explica la formación de núcleos con $A > 56$ en las etapas finales de las estrellas.

Otto Hahn (que fue el único de los descubridores que recibió el premio Nobel, de Química, en 1944), Lisa Meitner y Fritz Strassmann[1] en el año 1939, investigando en la síntesis de los transuránidos advirtieron la existencia de la fisión inducida por neutrones, una reacción altamente exoenergética. Fue el propio Fermi, en paralelo con F. Joliot y L. Kowarski, quien descubrió la posibilidad de reacción en cadena en la fisión, convirtiéndola en una reacción con aplicaciones prácticas como fuente de energía, ya que originó la posibilidad de realizar reactores de fisión.

La fisión es un proceso en el que un núcleo se rompe en dos cuyos números másicos son cercanos a la mitad del número másico A del núcleo padre. Dada la riqueza en neutrones del núcleo inicial, en el proceso de fisión se suelen emitir también varios neutrones:

$$X \rightarrow Y + Z + \mathrm{n} + \mathrm{n} + \ldots$$

Los núcleos resultantes Y y Z son altamente inestables ya que se encuentran lejos del valle de la estabilidad, razón por la que inician cadenas radiactivas.

13.1.2 Energética

La fisión es el resultado de la competición entre fuerzas nucleares y

culombianas. Sea un núcleo *X* (ejemplo: $^{238}_{92}\mathrm{U}$) que se escinde en dos *Y*, *Z*, que con el objeto de simplificar el razonamiento se supondrá que tienen aproximadamente el mismo número másico ~ *A*/2 (ejemplo, $^{119}_{46}\mathrm{Pd}$). De la curva de estabilidad se deduce para las energías de ligadura por nucleón, respectivamente, $(E_L/A)_U$ ~ 7,6 MeV/nucleón y $(E_L/A)_{Pd}$ ~ 8,5 MeV/nucleón; se trata, pues, de un proceso exoenergético. En efecto, el valor $Q = (m_{ini} - m_{fin})c^2 = E_L(\text{fin}) - E_L(\text{ini}) = 238(8,5 - 7,6)$ MeV, por lo tanto se ceden 238× 0,9 ~ 214 MeV por fisión; o sea, se liberan más de 6 órdenes de magnitud de energía que en el caso de las reacciones químicas (procesos atómicos).

Siguiendo un modelo tipo Gamow de la desintegración α, los dos fragmentos de fisión que tienen un radio *R* ~ 6,1 fm, ven una barrera culombiana V_C de 250 MeV, demasiado grande para franquearla de manera espontánea. La fisión espontánea de los uránidos es, en efecto, improbable. Así por ejemplo, la vida media por fisión para el $^{238}_{92}\mathrm{U}$ es $\tau_f(^{238}_{92}\mathrm{U}) = 10^{16}$ años, aunque la probabilidad de fisión aumenta con el número másico *A*, de forma que es observable para el $_{100}Fm$: $\tau_f(^{256}_{100}\mathrm{Fm}) = 10^{-4}$ años = 3,8 h. El $^{256}_{100}\mathrm{Fm}$ tiene 8 % de probabilidad de desintegración α y 92% de fisión espontánea. De hecho, como se verá más adelante, la fisión espontánea es el proceso dominante para núcleos con $A \geq 300$.

13.1.3 Modelo de gota líquida para la fisión

Cuando se estudió la desintegración α siguiendo el modelo propuesto por Gamow y otros, se supuso un problema de una partícula (el núcleo α) en el potencial nuclear creado por el núcleo padre. Para escapar de dicho pozo de potencial, la partícula α debe de vencer la barrera culombiana debida a la carga eléctrica del núcleo hijo.

Ahora, en el caso de la fisión, también se trata de un problema de vencimiento de la barrera culombiana, pero esta vez la barrera es debida

a los dos núcleos resultantes de la fisión. Este modelo para explicar la fisión fue inicialmente propuesto por Bohr y Wheeler en 1939. Es más sencillo ahora pensar en un potencial debido a la deformación nuclear, como se puede ver en la figura 13.1. La deformación nuclear es causada por las enormes fuerzas centrífugas del núcleo padre debidas a su estado rotacional elevado.

Si se deforma un núcleo esférico, se observa un máximo de energía potencial en función de la deformación. La fisión no puede tener lugar porque existe una barrera, la llamada *barrera de fisión*: E_f en la figura 13.1. Hay que aportar una energía, que permita franquear la barrera; esta energía se llama energía de activación (del orden de 6 MeV para el U), entonces puede tener lugar el proceso de fisión nuclear (según el modelo de gota líquida). El valor E_r en la figura es el correspondiente a la energía que se liberaría en la fisión (214 MeV en el caso del $^{238}_{92}U$). Se demostrarámás adelante que la barrera de fisión desaparece para los núcleos que cumplen $Z^2/A \geq 49$, y entonces la energía potencial seguiría la línea de trazos; la fisión sería entonces un proceso espontáneo.

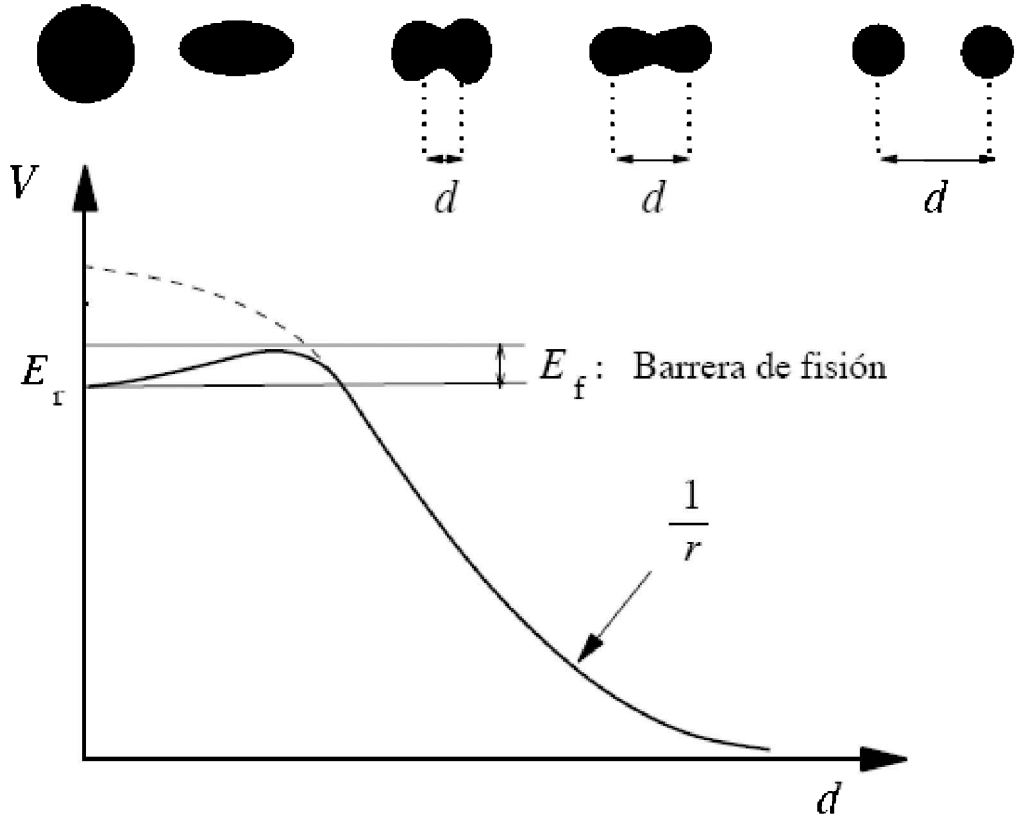


Figura 13.1: Variación de la energía potencial con la deformación nuclear, mostrando la barrera de fisión E_f. Arriba, el significado de d.

Para estudiar el origen de la energía de fisión, se utilizará un modelo en el que el núcleo es una gota líquida de forma elipsoidal, con semieje mayor $a = R(1 + \varepsilon)$ y semieje menor $b = \frac{R}{\sqrt{1+\epsilon}}$ y cuyo volumen es $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$, el mismo que si fuese esférico ($\varepsilon = 0$), puesto que el núcleo es incompresible. Al deformarse, la superficie aumenta:[2]

$$S = 4\pi R^2(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + ...) \qquad (13.1)$$

con lo que el aumento de la energía de superficie es:

$E'_S = \alpha_S A^{2/3}(1+\frac{2}{5}\epsilon^2+...)$ y la energía culombiana disminuye:

$$E'_C = E_C(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + ...) \qquad (13.2)$$

de esta manera, la diferencia entre la energía de ligadura, hasta orden ε^2, entre el núcleo deformado y el esférico es:

$$\begin{aligned}\Delta E = E_{\mathrm{L}}(\epsilon) - E_{\mathrm{L}}(0) = \quad & -\alpha_S A^{2/3}(1+\tfrac{2}{5}\epsilon^2) - \alpha_C Z^2 A^{-1/3}(1-\tfrac{1}{5}\epsilon^2) + \\ & +\alpha_S A^{2/3} + \alpha_C Z^2 A^{-1/3} + ... \\ & \approx \epsilon^2\left(-\tfrac{2}{5}\alpha_S A^{2/3} + \tfrac{1}{5}\alpha_C Z^2 A^{-1/3}\right)\end{aligned}$$

La fisión espontánea tendrá lugar si la configuración nuclear deformada es energéticamente más favorable que la esférica; para ello debe cumplirse que $\Delta E > 0$, osea, $\frac{1}{5}\alpha_C Z^2 > \frac{2}{5}\alpha_S A$, es decir $Z^2/A > 2\alpha_S/\alpha_C$, que numéricamente:

$$\boxed{Z^2/A > 49} \qquad (13.3)$$

lo que implica que $A \geq 300$. Casualmente para $A = 300$ hay un máximo de estabilidad debido a que la capa neutrónica con $N = 184$ se completa. Así pues, la estabilidad bajo fisión depende de Z^2/A;los núcleos ligeros ($A < 200$) son muy estables bajo fisión.

La deformación nuclear, caracterizada por ε es la causante de la fisión; produce un aumento de la energía de tensión superficial y una disminución de la repulsión culombiana. Una esfera presenta un cociente S/V mínimo, con lo que, en este caso, la repulsión culombiana es mínima. En el supuesto que la deformación valga $|\varepsilon| = 0,29$, puede calcularse que la barrera de fisión para los uránidos vale $E_f \approx 0,45(49 - Z^2/A)$ MeV.

La fisión es pues un fenómeno de penetración de barrera al igual que la desintegración α, pero esta vez la barrera es la creada por la energía

debida a la deformación. La llamada barrera de fisión de altura E_f que aparece (véase figura 13.1) puede ser franqueada natural o artificialmente. Se distingue así la fisión espontánea de la fisión inducida por bombardeo de neutrones. La energía de activación va disminuyendo a medida que Z^2/A aumenta (según el modelo de la gota líquida) y para $Z^2/A > 49$ la energía de activación es despreciable, con lo que la barrera de fisión desaparece.

Considerando la fisión espontánea, puede comprobarse en la figura 13.2 que efectivamente la variación del logaritmo del semiperíodo, sigue, cualitativamente, la forma esperada por el efecto túnel en presencia de una barrera culombiana E_f, como se encontróen la desintegración alfa. Para núcleos con $A \geq 300$, al desaparecer la barrera de fisión, la desintegración es instantánea; no pueden existir núcleos estables. Para el uranio y algunos transuránidos, la fisión espontánea es prácticamente despreciable. Por ejemplo el $^{238}_{92}\mathrm{U}$ tiene desintegración α y puede tener fisión espontánea con las siguientes probabilidades:

$$\left.\begin{array}{ll} ^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha & \lambda_\alpha = 5 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1} \\ ^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{90}_{35}\mathrm{Br} + {}^{145}_{57}\mathrm{La} + 3n & \lambda_f = 3 \times 10^{-24}\ \mathrm{s}^{-1} \end{array}\right\}$$

por lo que la fisión espontánea representa una fracción 6×10^{-7} de los casos, lo que la hace despreciable y casi indetectable.

13.1.4 Características de la reacción de fisión inducida

Un mecanismo que permite la fisión instantánea de algunos uránidos es el fenómeno de la captura neutrónica. Se consigue por bombardeo del núcleo fisible con neutrones térmicos. Se llama así a los neutrones con una energía cinética T_n cercana a 0,025 eV, es decir, la equivalente a la energía kT de la temperatura ambiente (300 K). Una reacción típica, es:

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{93}_{37}\mathrm{Rb} + {}^{141}_{55}\mathrm{Cs} + 2\mathrm{n} \qquad (13.4)$$

Los núcleos resultantes de la fisión (Y y Z) no son siempre losmismos. Existen otras posibilidades, por ejemplo: $_{40}$Zr + $_{52}$Te o también $_{36}$Kr + $_{56}$Ba, etc.

La fisión inducida por neutrones tiene lugar porque tras la captura neutrónica, el sistema adquiere una energía de excitación que supera la barrera de fisión (E_f), con lo que la fisión es instantánea. La explicación es la siguiente; tomando por ejemplo el $^{236}_{92}\mathrm{U}$, que se forma después de la captura neutrónica del $^{235}_{92}\mathrm{U}$, tiene, por lo menos, una energía de excitación (E_{exc} = 6, 5 MeV) superior a la energía de activación necesaria para vencer la barrera de fisión (E_f = 6, 2 MeV). En efecto, la energía adquirida por el ^{236}U después de la captura neutrónica será $E_{exc} = T_n + Q$ con $Q = (m[^{235}\mathrm{U}] + m_n - m[^{236}\mathrm{U}])c^2$ que coincide con la energía de separación neutrónica del ^{236}U, es decir $Q = S_n(^{236}\mathrm{U})$. Si el neutrón es térmico, la energía cinética T_n es despreciable; sin embargo, para la fisión con neutrones rápidos, T_n es importante y contribuye a E_{exc}. Si se hace el mismo cálculo para el ^{238}U se obtiene: $E_{exc}(^{239}\mathrm{U})$ = 4, 8 MeV mientras que E_f = 6, 6 MeV, por lo que no puede tener lugar la fisión por captura de neutrones térmicos. La diferencia de las energías de excitación entre núcleos pares e impares puede entenderse por el término δ de apareamiento de la fórmula de masas; la diferencia entre el ^{235}U y el ^{238}U es $\Delta E_{exc} = 2\delta$.

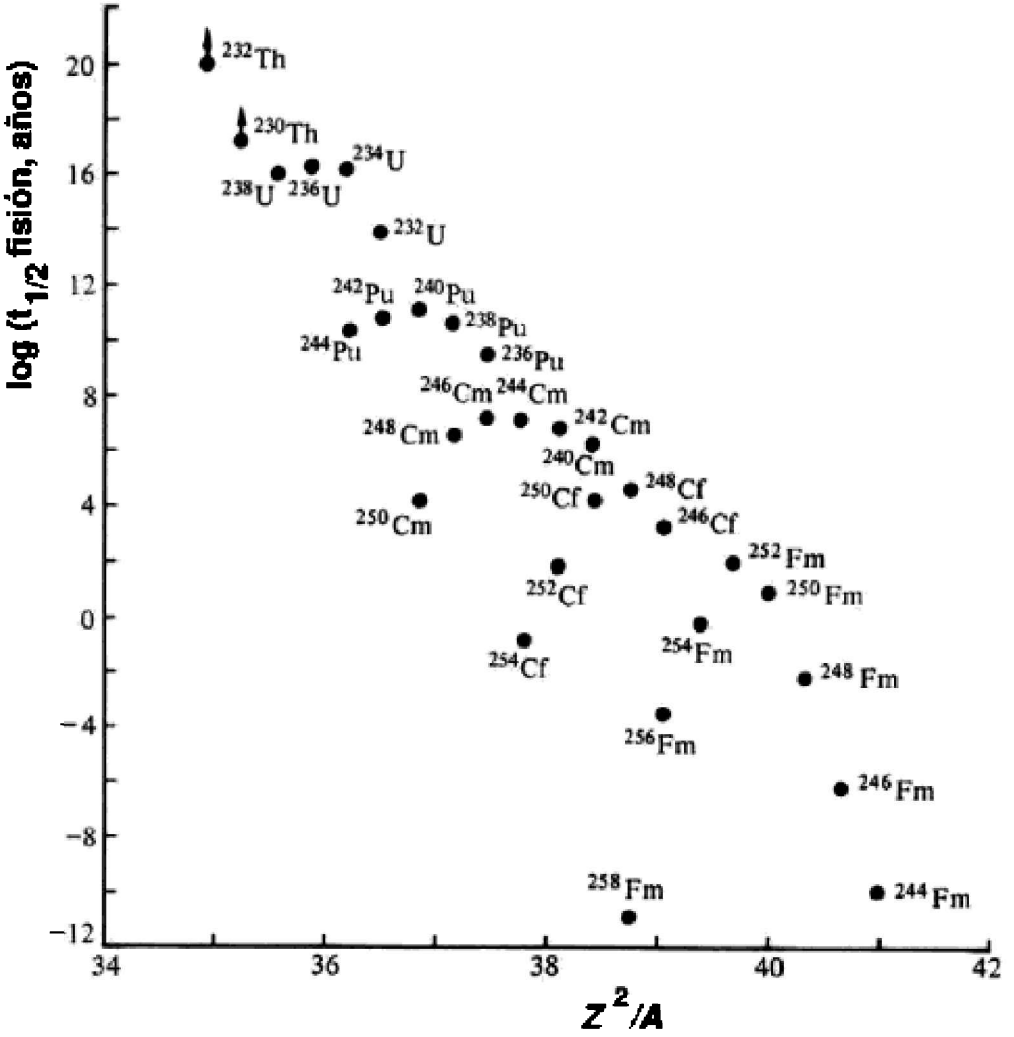


Figura 13.2: Variación del logaritmo del semiperiodo de fisión espontánea para varios núcleos, en función de Z^2/A. Datos tomados de R. Vandenbosch and J. R. Huizenga *Nuclear fission.* Academic Press (1973).

La energía de excitación es mayor para núcleos con *A* impar (y *Z* par) y casi igual a la de activación. Ello es consecuencia del mayor valor de la energía de separación S_n en los núcleos par–par.

La energía de excitación se llama así porque el estado n + $^{235}_{92}$U es un estado de masa superior a la del estado fundamental del $^{236}_{92}$U y al

formarse éste (después de ligar al neutrón) la energía de ligadura que sobra se transforma y se manifiesta como una energía de excitación.

Se cumplen las siguientes regularidades en las reacciones de fisión inducida por captura neutrónica:

1. Las secciones eficaces de fisión siguen la típica ley para neutrones térmicos $\sigma \sim 1/v$, siendo v la velocidad del neutrón, con picos correspondientes a resonancias entre 1 y 100 eV. Para el $^{235}_{92}\mathrm{U}$ se tiene σ = 582 b en el caso de neutrones térmicos ($T_n \approx 0,025$ eV). Sin embargo para el $^{238}_{92}\mathrm{U}$ no existe fisión amenosque $T_n \geq$ MeV, (véase la figura 13.3).

2. El número de neutrones producidos en la reacción de fisión, ν_n, no es siempre el mismo sino que depende del número másico (A)del elemento fisible. Este número sigue una distribución cuya forma es una función de Gauss, universal, con una desviación típica $\sigma = 1,08$. Se tiene como valor medio $\nu_n = 2,51$ para el $^{233}_{92}\mathrm{U}$, $\nu_n = 2,47$ para el $^{235}_{92}\mathrm{U}$ y $\nu_n = 2,91$ para el $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$. Estos tres últimos núcleos son los únicos combustibles que son prácticos para originar una reacción en cadena. Se trata de neutrones rápidos ($T_n \sim$ MeV), emitidos como en un proceso de evaporación (estadístico). Su espectro energético sigue una forma empírica:

$$N(T)dT = A\sqrt{T}\, e^{-T/T_0} dT$$

Con $A = 1,872$ y $T_0 = 1,29$ MeV para el $^{235}_{92}\mathrm{U}$. El valor medio de la energía de los neutrones es ?T ?~ 2 MeV. Se llaman neutrones instantáneos (en inglés, *prompt*) porque se produceninstanáneamente con la fisión, es decir en el mismo instante (unos 10^{-14} s) en el que se producen los fragmentos Y y Z.

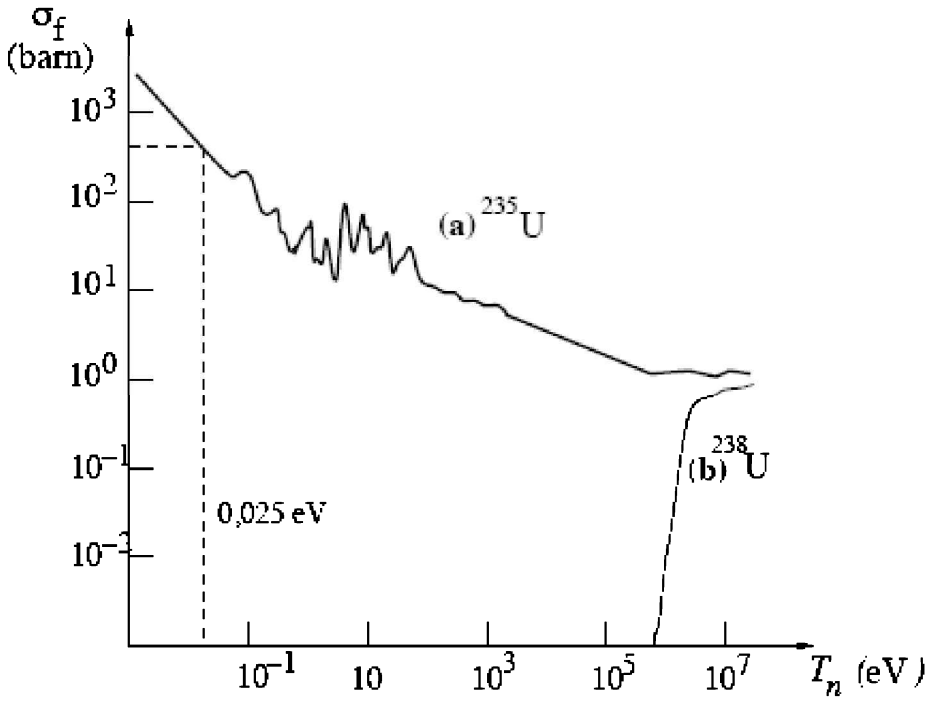


Figura 13.3: Variación de la sección eficaz de fisión inducida por neutrones en función de la energía del neutrón, para los dos isótopos del uranio: (a) el $^{235}_{92}$U y (b) el $^{238}_{92}$U.

3. Los núcleos, productos de la fisión, originan cadenas radiactivas artificiales que son debidas al elevado número medio de neutrones que tienen los núcleos resultantes de la fisión. Uno de los graves problemas prácticos de estas cadenas es que acaban con elementos que tienen varios miles o millones de años de semiperiodo:

	6s		7 min		10 h		10^6 a				
$^{93}_{37}$Rb	⟶	Sr	⟶	Y	⟶	Zr	⟶	Nb			
	1,7 s		19s		6,6 h		9,1 h		3×10^6 a		
$^{135}_{51}$Sb	⟶	Te	⟶	I	⟶	Xe	⟶	Cs	⟶	Ba	
	25 s		18 min		4 h		33 d				
$^{141}_{55}$Cs	⟶	Ba	⟶	La	⟶	Ce	⟶	Pr			

Estos elementos de vida media larga crean un problema de almacenamiento, transporte, etc., que tiene impacto medioambiental y de

seguridad. Entre ellos también aparecen *venenos*, como el ^{135}Xe, denominándose así a núcleos que tienen una gran sección eficaz de captura neutrónica (σ_{n+Xe} = 2, 7 × 10^6b). Estos venenos hay que eliminarlos porque ponen en peligro la reacción en cadena, ya que provocan una gran disminución de los neutrones.

4. También se emiten neutrones retardados, debidos a la aparición de núcleos altamente excitados en las desintegraciones de las cadenas radiactivas (véase la figura 13.4).

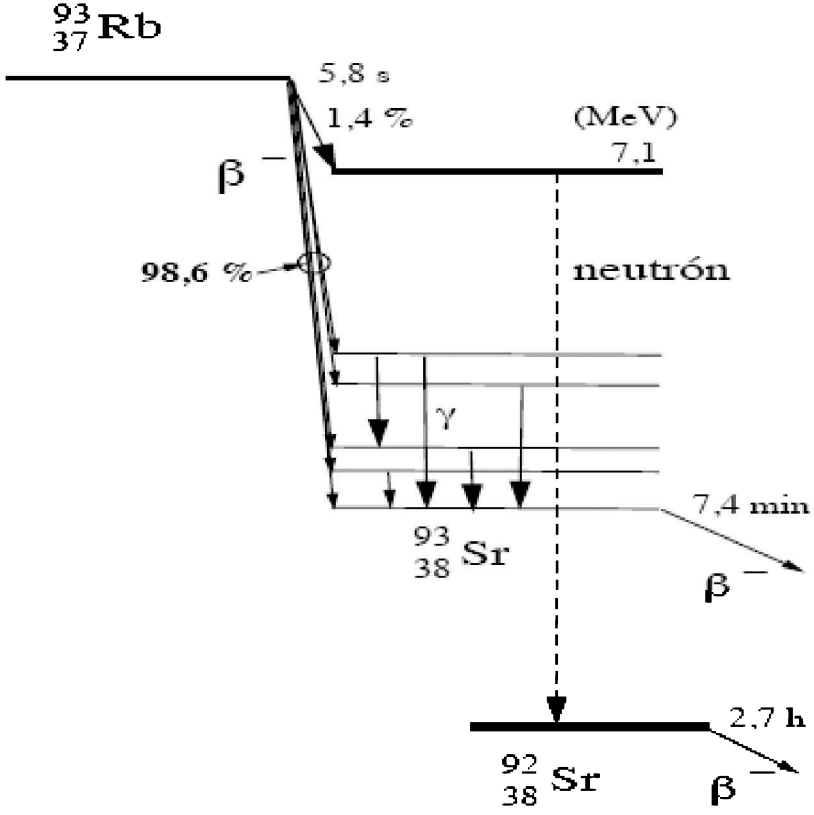


Figura 13.4: Esquema de desintegración del $^{93}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{93}_{38}\mathrm{Sr}$ uno de los núcleos que se producen en la fisión. Se observa así el origen de la radiación β y γ y la emisión de neutrones retardados.

Se llaman retardados porque normalmente se producen después de la desintegración β del núcleo padre, con lo que son temporalmente

posteriores a los neutrones *prompt*. Un ejemplo de emisor de neutrones retardados es la desintegración beta del $^{93}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{93}_{38}\mathrm{Sr}^{*}$ a un estado excitado de 7, 1 MeV; es decir, tiene un energía de excitación mayor que S_n, energía de separación neutrónica del Sr. El retardo es debido al tiempo de desintegración β del núcleo padre $^{93}_{37}\mathrm{Rb}(t_{1/2} = 5,8\ \mathrm{s})$. Estos neutrones representan alrededor del 1 % del total de neutrones.

5. La distribución másica de los fragmentos se acumula (para el $^{235}_{92}\mathrm{U}$) estadísticamente alrededor de $A_X = 95$ y $A_Y = 140$ (por eso se llama fisión asimétrica); este último fijo e independiente del núcleo fisionable, consecuencia de la estructura de capas nuclear; es decir, de la existencia de los números mágicos $N = 50$ y $N = 82$. Más de cien núcleos distintos son producidos como fragmentos en la fisión; entre ellos, dos elementos que no tienen núcleos estables: el prometio $(^{147}_{61}\mathrm{Pm})$ y el tecnecio $(^{99}_{43}\mathrm{Tc})$. En cuanto a la distribución de energías cinéticas de los fragmentos, se cumple que se distribuyen inversamente al valor de sus masas, y se verifica que $T_X \sim 98$ MeV y $T_Y \sim 66$ MeV. De esta forma, los fragmentos se llevan alrededor del 80 % de la energía de fisión. Con esta energía, apenas llegarían a recorrer unos 2 cm en el aire. En los reactores pierden toda su energía cinética en el material del combustible, calentándolo.

13.2 Reacción de fisión controlada

La enorme energía desprendida en la fisión, junto con la posibilidad de reacción en cadena, condujo en breve tiempo al diseño de reactores nucleares, cuyo objetivo es la producción, masiva y centralizada, de energía eléctrica. La fisión nuclear controlada es el proceso que tiene lugar en las centrales nucleares.

El primer reactor nuclear de fisión controlada, formado por una pila de bloques de uranio (combustible) mezclados con grafito (moderador), fue construido en la Universidad de Chicago por E. Fermi en 1942. Dos años

después, junto con Leo Szilard, depositó una patente de su invento (*Neutronic Reactor*, patente número US2708656, presentada el 19 de diciembre de 1944). Es posible diseñar reactores con una pila homogénea (fisión con neutrones rápidos, por ejemplo, con plutonio y sin moderador), o con una pila heterogénea (combustible y moderador).

Siguiendo a Fermi y Szilard en su concepto del reactor neutrónico, el objetivo es mantener la reacción de fisión en cadena, controlada. Para ello, se diseña una pila heterogénea en la que se debe tener un conocimiento preciso del flujo neutrónico y que contiene los siguientes componentes:

- combustible; el más utilizado es el uranio y sobre todo, enriquecido en $^{235}_{92}\mathrm{U}$. También puede usarse $^{233}_{92}\mathrm{U}$ y $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, que se producen, artificialmente, en los reactores.
- moderador de neutrones; generalmente agua, agua pesada o grafito.
- barras de control (para la absorción de neutrones), de cadmio, hafnio o boro.
- circuito primariode refrigeración del núcleo del reactor; líquido (agua) o gas (CO_2).
- circuito secundario de refrigeración, generalmente agua, que en forma de vapor, se utiliza para mover turbinas generadoras de electricidad.

Se verá que existen varios diseños prácticos, con variantes de cada uno de los componentes descritos. Para entender el funcionamiento de un reactor, se estudia a continuación un modelo de reactor de fisión con pila heterogénea cuyo núcleo es una mezcla de barras de combustible ($^{235}_{92}\mathrm{U}$, $^{238}_{92}\mathrm{U}$) insertadas en un material moderador de neutrones. En general, el material fisible que se puede considerar (los combustibles típicos de la fisión nuclear) son $^{233}_{92}\mathrm{U}$, $^{235}_{92}\mathrm{U}$ y $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$. De ellos, sólo el uranio-235 es natural, aunque en una proporción isotópica (0,72 %) muy

baja. El ^{233}U se obtiene por captura neutrónica del $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ y el $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, de la captura neutrónica del $^{238}_{92}\mathrm{U}$:

$$\mathrm{n} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[\gamma]{} {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[\beta]{23\ \mathrm{min.}} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow[\beta]{2{,}3\ \mathrm{d.}} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$$

donde el $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ ($t_{1/2}$ = 24, 1 × 10^3 años), es fisible por neutrones térmicos. Los procesos de captura neutrónica conducen, en cierta manera, a regenerar combustible. Por ello, al $^{238}_{92}\mathrm{U}$ se le denomina material fértil. Pero además son una fuente de producción de los peligrosos residuos transuránidos, también llamados actínidos.

Una reacción típica de fisión, es la que ya se ha presentado en (13.4):

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{93}_{37}\mathrm{Rb} + {}^{141}_{55}\mathrm{Cs} + 2\mathrm{n}$$

o sea, que un neutrón térmico (que es el neutrón incidente que provoca la fisión) da lugar a 2 neutrones rápidos o *prompt*. En la reacción típica de fisión vista aquí arriba se producen exactamente2 neutrones, pero estadísticamente se producen otros núcleos en el estado final, dando lugar en promedio a ν neutrones rápidos, que ya se ha visto que vale $\nu \sim$ 2, 47, para el $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Varía ligeramente según el blanco de fisión.

Las secciones eficaces de fisión por captura neutrónica han sido determinadas con precisión; en particular, su dependencia con la energía de los neutrones. También se conocen muy bien las secciones eficaces de otros procesos que pueden tener lugar en una pila heterogénea, como la captura (o absorción) neutrónica, tanto en el combustible como en el moderador y los otros materiales presentes en la pila: por ejemplo, las pastillas de uranio enriquecido se suelen colocar en cilindros de zircaloy (aleación de 98 % de zirconio y el resto de estaño, hierro, cobre, niquel). Los procesos de absorción neutrónica disminuyen el saldo de neutrones disponible para la fisión. En suma, hay que conocer los tres tipos de

procesos que pueden tener los neutrones en el material de un reactor:

1) las colisiones elásticas que moderan la energía de los neutrones,
2) la captura neutrónica que los absorbe y los reduce y, por último,
3) la fisión.

A continuación se estudia el proceso de moderación.

13.2.1 Moderación de los neutrones

El principal problema es moderar (reducir la energía media) los neutrones, es decir frenar los neutrones que se producen en la fisión y que tienen energías de varios MeV hasta que alcancen la energía térmica (~0,025 eV). Para ello es necesario introducir material moderador (grafito, agua, agua pesada, etc.). Estadísticamente, el proceso de moderación dependerá de las reacciones nucleares de los neutrones con la materia de la pila del reactor (uranio+moderador).

Sea por ejemplo un neutrón de energía cinética T_0 que colisiona elásticamente con un núcleo de masa A. Después del choque la energía del neutrón T_1, emitido en el ángulo θ^* en el centro de masas de la reacción (las energías se toman en el sistema laboratorio) cumple:[3]

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta^*}{(A+1)^2} \qquad (13.5)$$

de forma que cuando A es muy ligero (como el caso del hidrógeno, $A = 1$), se logra el máximo de pérdida de energía (lo que ocurre cuando cos $\theta^* = -1$). O sea $T_1^{min} = T_0(A-1)^2/(A+1)^2) = \alpha T_0$. La fracción de energía media de los neutrones después de cada choque se calcula: $x = < T_1/T_0 > = (A^2 + 1)/(A + 1)^2$, con lo que puede calcularse el número medio de choques, q, para moderar (pasar de una energía cinética de neutrón rápido, T_r, a térmico, T_t), habida cuenta de que

$$(T_n/T_0) = \prod_{i=1}^{n} (T_i/T_{i-1})$$

después de n choques , el valor medio del logaritmo vale $< \ln(T_0/T_n) > = n < \ln(T_0/T_1) >$, con lo que:

$$q = \frac{1}{\xi} \ln\left(\frac{T_r}{T_t}\right) \qquad (13.6)$$

siendo $\xi = < \ln(T_0/T_1) >$, el poder de frenado logarítmico del material, cuyo valor medio es:

$$\xi = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \ln(T_0/T_1) d\cos\theta^* = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\frac{A+1}{A-1}$$

En efecto, la distribución de probabilidad de que el neutrón sea emitido con una energía entre T_1 y $T_1 + dT_1$ es, de acuerdo con esta última expresión:

$$P(T_1)dT_1 = -p(\theta)d\theta$$

Se supone una distribución angular uniforme, $p(\theta)d\theta = d\Omega/(4\pi) = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta$, que permite deducir $dT_1/d\theta$ y de aquí,

$$P(T_1)dT_1 = \frac{(A+1)^2}{4AT_0} = \frac{dT_1}{(1-\alpha)T_0}$$

Se verifica que el neutrón tiene una energía uniforme entre αT_0 y T_0, como cabía esperar; por lo tanto, la energía media del neutrón después del choque es $< T_1 >= \frac{1}{2}(1+\alpha)T_0$ y la pérdida media de energía es $\frac{1}{2}(1+\alpha)T_0$. Si se toma grafito como moderador, basta con unas 110 colisiones elásticas para moderar los neutrones emitidos en la reacción de fisión (véase la tabla 13.1).

Tabla 13.1: Magnitudes que intervienen en la moderación de neutrones rápidos ($T_r \sim 2$ MeV) a térmicos ($T_t = 0{,}025$ eV).

moderador	x	ξ	q	σ_{col}(b)	σ_a(b)	f
$^{1}_{1}$H	0,5	1	18	44,8	0,664	0,76
$^{2}_{1}$H	0,56	0,725	25	10,4	10^{-3}	0,998
$^{12}_{6}$C	0,86	0,158	115	4,7	$4{,}5\times10^{-3}$	0,895

Así por ejemplo, en el grafito el recorrido libre medio de moderación se encuentra que vale $\ell_s \sim 19$ cm, y el tiempo transcurrido entre choques es muy breve $t_s \sim 10^{-4}$ s. Este seráel tiempo característico entre generaciones de neutrones. Determinará la evolución temporal de la reacción en cadena.

Si se calcula la probabilidad de absorción ($p = \sigma_a/(\sigma_{col} + \sigma_a)$), con los valores de las secciones eficaces de la tabla 13.1, se obtiene el factor de utilización térmica de neutrones $f = (1 - p)^q$, después de q colisiones. Se observa la gran atenuación en el hidrógeno (agua ligera), que hace imposible un funcionamiento crítico a menos que se enriquezca el uranio.

En el estudio de la atenuación de neutrones en un medio, además del concepto de sección eficaz (que describe un proceso microscópico), es costumbre hablar de sección eficaz *macroscópica* $\Sigma = n\sigma$, siendo n el número de blancos por unidad de volumen. Este concepto es efectivamente macroscópico, puesto que es la inversa del recorrido libre medio del neutrón en un material, $\Sigma = 1/\lambda$. Por lo tanto la atenuación de los neutrones al recorrer una distancia x en el medio viene dada por $I/I_0 = e^{-\Sigma x}$. El concepto de sección eficaz macroscópica se aplica a los tres fenómenos estudiados: absorción, difusión (o colisión) y fisión.

13.2.2 Factor de reproducción *k*

Sea una pila de un reactor, supuestamente, de tamaño infinito. Se introduce el factor de multiplicación de neutrones o factor de reproducción, k_∞, y se define como el cociente del número de neutrones térmicos producidos en una generación por las fisiones, al número original de neutrones térmicos en un sistema teórico de tamaño infinito (donde no puede haber pérdidas de neutrones). O sea $k_{\infty} = \frac{N_n}{N_{n-1}}$ siendo N_n el número de neutrones térmicos de la generación *n* de la reacción de fisión. Un neutrón térmico produce k_∞ neutrones térmicos, de forma que podráexistir reacción en cadena si $k_\infty \geq 1$. Una vez fijadoel diseño de una pila el valor de k_∞ será una constante del sistema. En lapráctica, el núcleo del reactor es finito y por consiguiente, habrá pérdidas de neutrones por la periferia del sistema. Aparece entonces un factor de reproducción *efectivo*, *k*, que quedará fijado al fijar el tamaño del sistema.

Según el valor del factor de reproducción efectivo, *k*, que depende, entre otros, de la geometría de la pila nuclear, se obtienen tres regímenes de reacción posibles:

$$\begin{cases} k = 1, \text{crítica} & \rightarrow \text{reacción en cadena, controlada} \\ k < 1, \text{subcrítica} & \rightarrow \text{se apaga la reacción} \\ k > 1, \text{supercrítica} & \rightarrow \text{explosión} \end{cases}$$

Utilizando como combustible el $^{238}_{92}\mathrm{U}$ puro, se tendría siempre $k < 1$ ya que la sección eficaz de fisión es muy pequeña con neutrones rápidos. Pero es posible diseñar un reactor crítico con U natural; la minúscula presencia de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ lo permite, pero a condición de elegir correctamente el moderador.

El factor de multiplicación infinito se obtiene a partir de la llamada fórmula de los cuatro factores:

$$\boxed{k_\infty = \eta \epsilon p f} \qquad (13.7)$$

El significado de los factores se comprende cuando se analizan los procesos que puede tener un neutrón en una pila nuclear.

- η – Factor eta – Representa el número de neutrones producidos por fisión, por cada neutrón térmico absorbido por el combustible. Si partimos de N neutrones, quedarán ηN neutrones aptos para causar la fisión, número inferior a νN ya que desaparecerán neutrones por absorción mientras se termalizan. Se estima por la fórmula $\eta = \nu \dfrac{N_5 \sigma_{f_5}}{N_5 \sigma_{f_5} + N_5 \sigma_{a_5} + N_8 \sigma_{a_8}}$, siendo σ_f y σ_a las secciones eficaces de fisión (bueno) y de absorción (malo), y N_5 y N_8 las fracciones de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ y $^{238}_{92}\mathrm{U}$, respectivamente. Por ejemplo, se sabe que para el uranio natural (99,28 % de ^{238}U y 0,72 % de ^{235}U), se tiene:

$$^{235}\mathrm{U} \begin{cases} \sigma_f = 582\ \mathrm{b} \\ \sigma_a = 108\ \mathrm{b} \end{cases} \qquad ^{238}\mathrm{U} \begin{cases} \sigma_f = 0\ \mathrm{b} \\ \sigma_a = 2,75\ \mathrm{b} \end{cases}$$

Como ν = 2,47, para el uranio natural sellega a η = 1, 33. Para ^{235}U enriquecido al 2,5 %, η = 1, 8. Estos valores se pueden deducir a partir de los parámetros de cada elemento que se dan en la tabla 13.2.

Tabla 13.2: Magnitudes que intervienen en la fisión de los blancos típicos para neutrones térmicos. El factor η es para el elemento puro.

Núcleo	σ_f (b)	σ_a (b)	ν_n	η
$^{233}_{92}U$	524	69	2,51	2,29
$^{235}_{92}U$	582	108	2,47	2,08
$^{238}_{92}U$	0	2,75	0	0
$^{239}_{94}Pu$	750	300	2,91	2,08

- ε − Factor de fisión rápida − Da la ganancia en neutrones debidos a la fisión del $^{238}_{92}U$ (ε = 1, 03). Esta fisión tiene lugar sólo para neutrones rápidos (véase la figura 13.3 y la tabla 13.3) con una sección eficaz del orden de 1 barn.

Tabla 13.3: Magnitudes que intervienen en la fisión de los blancos típicos para neutrones rápidos (energías del orden del MeV)

Núcleo	σ_f (b)	σ_a (b)	ν_n	η
$^{235}_{92}U$	1,27	0,10	2,46	2,28
$^{238}_{92}U$	0,52	2,36	2,88	0,52
$^{239}_{94}Pu$	2	0,10	2,88	2,74

- p − Probabilidad de escape a la resonancia − Da las pérdidas por captura de neutrones en el ^{238}U, debido principalmente a las resonancias en el intervalo 10−100 eV, en el que existen muchos picos con σ_a(n + ^{238}U) ≈ 1 Kbarn. Esto sucede mientras se van moderando los n (para pilas tipo uranio–grafito se tiene $p \approx 0, 9$). La probabilidad de captura de neutrones por ^{238}U antes de ser frenados, es muy grande. Con ^{238}U puro, no existe la reacción en cadena; con U natural y agua ligera tampoco; habría que enriquecer su contenido en ^{235}U hasta un 3 % al menos. Para optimizar la reducción de neutrones por captura se debe realizar

un diseño de la pila del reactor en el que el moderador y las barras de combustible estén separados por $\approx \ell_s$, recorrido libremedio de moderación (unos 19 cm en el grafito).

- f − Factor de utilización térmica − Es el factor que corrige las pérdidas debidas a la captura de n térmicos por el moderador ($f \sim 0,9$ para grafito, como puede verse en la tabla 13.1). Aunque la sección eficaz de captura sea muy pequeña para el grafito, $\sigma_a(\mathrm{n} + {}^{12}_{6}\mathrm{C}) \sim 4,5$ mbarn, hay que tener en cuenta que hay mucho moderador.

Con estos valores se llega a $k_\infty = 1,11$ para el U natural y grafito como moderador, pero el problema es tener en cuenta el tamaño finito del núcleo del reactor. Entonces aparecen dos nuevos factores de origen geométrico: las probabilidades de escape de neutrones rápidos y lentos, con lo que el valor del factor de reproducción real (también llamado factor de multiplicación efectivo, k) es:

$$k = \eta \epsilon p f (1 - l_f)(1 - l_s) \tag{13.8}$$

de forma que cuanto más grande es la pila del reactor, menos neutrones se pierden. En algunos textos a $P_f = 1 - l_f$ se le denomina probabilidad de permanencia de neutrones rápidos y a $P_s = 1 - l_s$ probabilidad de permanencia de neutrones lentos, quedando la expresión:

$$k = \eta \epsilon p f P_f P_s \tag{13.9}$$

Podrían diseñarse pilas sin moderador; para ello de berían utilizarse neutrones rápidos y ${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ o ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ puro como combustible. Ello es debido al elevado valor de η, que permite un tamaño crítico muy reducido (varios cm). De hecho sólo bastan unos 15 kg de ${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ para alcanzar el tamaño crítico.

13.2.3 Tamaño crítico y constante de tiempo

Dada una configuración geométrica de una pila de un reactor, existe un tamaño crítico que se define como el tamaño para el cual el balance de neutrones da lugar a una reacción en cadena en régimen crítico (k = 1). Este sería el tamaño ideal de una pila de un reactor para producir energía a un ritmo constante y sostenido. Con un tamaño mayor, se evitarían pérdidas de neutrones por escape y daría lugar probablemente a un régimen supercrítico, mientras que para un tamaño menor que el crítico, la reacción acabaría extinguiéndose.

Un neutrón quedará confinado en la pila del reactor nuclear siempre que la probabilidad de moderación sea grande. Para ello el tamaño de la pila es determinante puesto que definiráel recorrido libre medio de los neutrones. Se introduce la longitud media de *migración*, que es la que recorre un neutrón antes de ser absorbido y su valor es $L_m = \sqrt{\overline{\ell}_d^2 + \overline{\ell}_s^2}$, siendo ℓ_d la longitud de difusión antes de ser absorbido y ℓ_s la longitud de moderación o de frenado de rápido a térmico.

El tamaño crítico es:

$$R_c \propto \frac{L_m}{\sqrt{k_\infty - 1}} \qquad (13.10)$$

ya que la probabilidad de escape de un neutrón debe ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; por lo tanto, dimensionalmente se debe cumplir que $k_\infty - k = \frac{L_m^2}{R^2}$.

Para una central de uranio natural–grafito en donde ℓ_d, longitud de difusión antes de ser absorbido suele valer ℓ_d = 50, 8 cm y ℓ_s, longitud de frenado (rápido a térmico) vale ℓ_s = 18, 7 cm, se tiene que L_m = 54, 1 cm. También se ha visto que k_∞ = 1, 1. Si la pila del reactor tuviese forma

esférica su tamaño crítico sería $R_c = \frac{\pi L_m}{\sqrt{k_\infty - 1}}$, con lo que la pila de una central de uranio–grafito, debe tener un radio R_c = 5 m.

En cuanto a la evolución temporal del proceso, se introduce t_p la constante de tiempo de los neutrones *prompt*, obtenida al suponer que si en t_0 hay N neutrones, en $t_1 = t_0 + t_p$ habrá kN neutrones, en $t_2 = t_0 + 2t_p$ habrá $k^2 N$, etc., con lo que $dN = (kN - N)\frac{dt}{t_p}$ quedando:

$$N(t) = N_0 e^{(k-1)\frac{t}{t_p}} \qquad (13.11)$$

los neutrones crecen con una constante de tiempo dada por $t_0 = t_p/(k - 1)$.

Como t_p es del orden de 0,1 milisegundo en un reactor térmico, un pequeño incremento de k (supóngase k = 1, 01), en una décima de segundo el número de neutrones (o sea, la potencia del reactor) se multiplica por 20 000. Un reactor, en estas condiciones, sería incontrolable. Los reactores funcionan en modo subcrítico; pero gracias a la presencia del 1 % de neutrones retardados (emitidos por los núcleos de las cadenas secundarias de la fisión y por lo tanto son procesos con vidas medias τ entre segundos y minutos) y de las barras de control (que son barras de boro o cadmio, materiales que tienen una probabilidad muy grande de captura de neutrones) se consigue el funcionamiento crítico. En efecto; sea d la proporción de neutrones retardados (~ 1%). Llamando $q = k - 1$ se cumple, aproximadamente:

$$N(t) = N_0 \left[\frac{d}{d-q} e^{\frac{q}{(d-q)}\frac{t}{\tau}} - \frac{q}{d-q} e^{-(d-q)\frac{t}{t_p}} \right. \qquad (13.12)$$

en donde τ es la constatnte de tiempo de los neutrones retardados (alrededor de 12,5 s). Se puede verificar que para d = 0 se obtiene la anterior expresión (13.11). Con ésto, como se suele operar con $q < d$ el

reactor ya es controlable porque $N(t) \approx N_0 \exp[\frac{qt}{(d-q)\tau}]$, de forma que el aumento es pequeño ya que aunque el valor de q sea del orden de 10^{-3} s, con una constante de tiempo para los neutrones retardados τ = 12, 5 s, apenas se dobla el número de neutrones en algo más de un minuto. De esta forma la actuación de las barras de control pueden evitar una deriva divergente del reactor. Gracias a los neutrones retardados, los reactores críticos son manejables. Se introduce la *reactividad* del reactor $\rho = (k - 1)/k$ con lo que se requiere que la reactividad nunca exceda la fracción de neutrones retardados $\beta = d/k$, de forma que el control de los reactores requiere $\rho < \beta$.

La mayor parte de la energía producida en la fisión es debida a la energía cinética de los productos resultantes de la reacción de fisión. Esta energía calienta enormemente el núcleo del reactor, que hay que refrigerar. El método de refrigeración da lugar a las distintas tecnologías de las centrales nucleares (BWR, de *boiling water reactor*, PWR, de *pressure water reactor*, grafito+gas, etc.). Las altas temperaturas alcanzadas por el refrigerador primario (agua, gas, etc.) se transmiten al refrigerador secundario y, en forma de vapor, sirven para mover turbinas generadoras de electricidad.

13.2.4 Potencia producida en la fisión

Asípues, por cada fisión de un núcleo de $^{235}_{92}\mathrm{U}$, se dispone de unos 200 MeV para calentar el medio, ya que 12 MeV desaparecen con los neutrinos que no interaccionan. En efecto, se conoce la potencia energética producida por un reactor debida a la energía cinética de los productos primarios e instantáneos con la fisión:

- fragmentos de fisión: 165 MeV
- *n* instantáneos: 5 MeV

- γ instantáneos: 8 MeV

y también se conoce la energía depositada por las partículas emitidas por los núcleos de las cadenas radiactivas secundarias, diferidas en el tiempo, que dan lugar a las siguientes cantidades aproximadamente:

- β radiactivo: 19 MeV (12 MeV en neutrinos inofensivos)
- γ radiactivo: 7 MeV

Suponiendo, pues, que cada fisión proporciona unos 200 MeV de energía, la fisión de 1 gramo por día de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ equivale a una disipación de 0,946 MW día; en efecto:

$$\frac{6 \times 10^{23}}{235} \times 200 \times 1,6 \times 10^{-13} \times 10^{-6} \frac{1}{86400} = 0,946 \,\mathrm{MW\ día}$$

Como la energía producida en una central proviene del calentamiento del refrigerante, se suele hablar de potencia térmica (gigavatio térmico, GWt) y potencia eléctrica (gigavatio eléctrico, GWe). En promedio, como el rendimiento es aproximadamente un tercio, son necesarios 3 GWt para producir 1 GWe. Puede verificarse, pues, que una central de 1 GWe (3 GWt), fisiona unos 3 kg diarios de ^{235}U. Esto no implica que se consuman enteramente; simplemente su masa se transforma en productos de fisión. Sólo se *quema* 200 MeV sobre 219 GeV (masa del ^{235}U)es decir un 1 por mil; desaparece 1 kg por Tm de material fisionado.

La existencia de gran cantidad de residuos radiactivos y material activado, implica que al apagar un reactor, la potencia emitida no se anula inmediatamente sino que continúa (debido al semiperiodo de las desintegraciones) según la ley:

$$P(t) = 4,1 \times 10^{11} \left[t^{-0,2} - (t+T)^{-0,2} \right] \qquad \mathrm{MeV/s} \qquad (13.13)$$

por watio de nivel operativo (si el reactor opera a 1 GW, hay que

multiplicar por 10^9). En esta última fórmula de la potencia $P(t)$, t significa el tiempo transcurrido desde el apagado del reactor y T el tiempo durante el cual ha permanecido activo.

Ejemplo: Si un reactor ha estado trabajando durante 1 año a una potencia de 1.000 MW, al cabo de un mes después de haberse apagado, la potencia que producirá se obtiene aplicando la expresión (13.13) donde t = 30 días y T = 365 días:

$$P\ (\text{mes})\ /\text{W} = 4,1 \times 10^{11}\ (30^{-0,2} - 395^{-0,2}) =$$
$$= 8,36 \times 10^{10}\ \text{MeV/s por cada watio.}$$

P(mes) = 8, 36 × 10^{19} MeV/s, ya que trabajaba a 10^9W

P(mes) = 8, 36 × 10^{19} × 1, 602 × 10^{-13} J/s = 1, 34 × 10^6 W = 1, 34 MW

Produce 1,34 MW después de llevar un mes apagado. Esto es lo que se denomina potencia calorífica de la desintegración.

13.3 Reactores de fisión

La construcción de centrales nucleares se inicia a principios de los años 1970 y va en aumento hasta 1990, año en el que el número de centrales se estabiliza. En los últimos 20 años la producción de electricidad de origen nuclear en el mundo se ha mantenido más o menos constante. Las tecnologías más frecuentes de diseño de los reactores son los basados en agua a presión (PWR), agua hirviendo (BWR), refrigerados y moderados con agua (VVER), agua pesada a presión (PHWR) y enfriados por gas (GCR). Un esquema de un reactor tipo BWR se muestra en la figura 13.5. Los dos primeros, representan casi el 90 % de reactores existentes. Sólo ha existido un accidente con consecuencias graves para el personal, el accidente de la central de Chernobil en abril de 1986, causado por una violación incomprensible de las reglas de seguridad en una prueba realizada por el personal a cargo del funcionamiento del reactor. Excluyendo este accidente, puede afirmarse que la seguridad nuclear es un hecho comprobable.

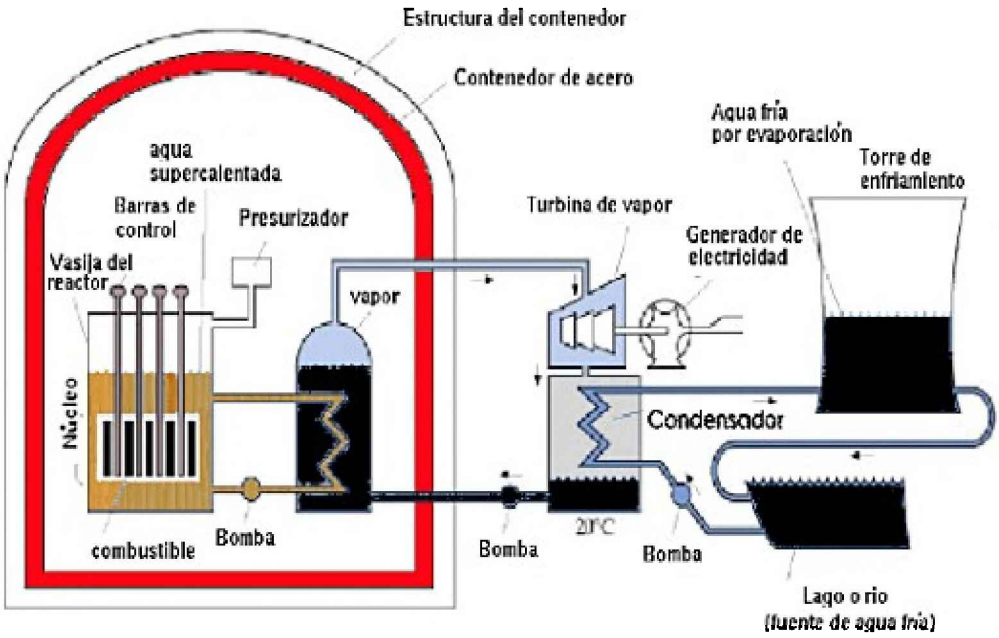


Figura 13.5: Esquema de un reactor de fisión de tipo BWR (*Boiling Water Reactor*). El núcleo contiene las barras de óxido de uranio y las barras de control de cadmio. La generación de electricidad se obtiene gracias a una turbina movida por el vapor de agua del circuito secundario.

A finales de 2007, había 439 reactores nucleares de fisión operativos, repartidos en 30 países de todo el mundo.[4] La potencia total instalada se elevaba a 372 GWe, y la producción mundial de electricidad de origen nuclear representaba el 14,2 % del total (unos 2600 TWh nucleares), siendo Estados Unidos (con 104 reactores), Francia (59), antigua URSS (45) y Japón (55) los países más activos. La producción mundial de uranio en el mundo roza las 50.000 toneladas anuales (Canadá y Australia son los principales productores) y se estima que existen reservas para algo más de 140 años, al ritmo de producción actual. En el subsuelo español se tienen reservas estimadas en unas 32.000 Tm de U_3O_8.

La figura 13.6 muestra cómo se repartía en 2007 en el mundo la producción de electricidad de origen nuclear.

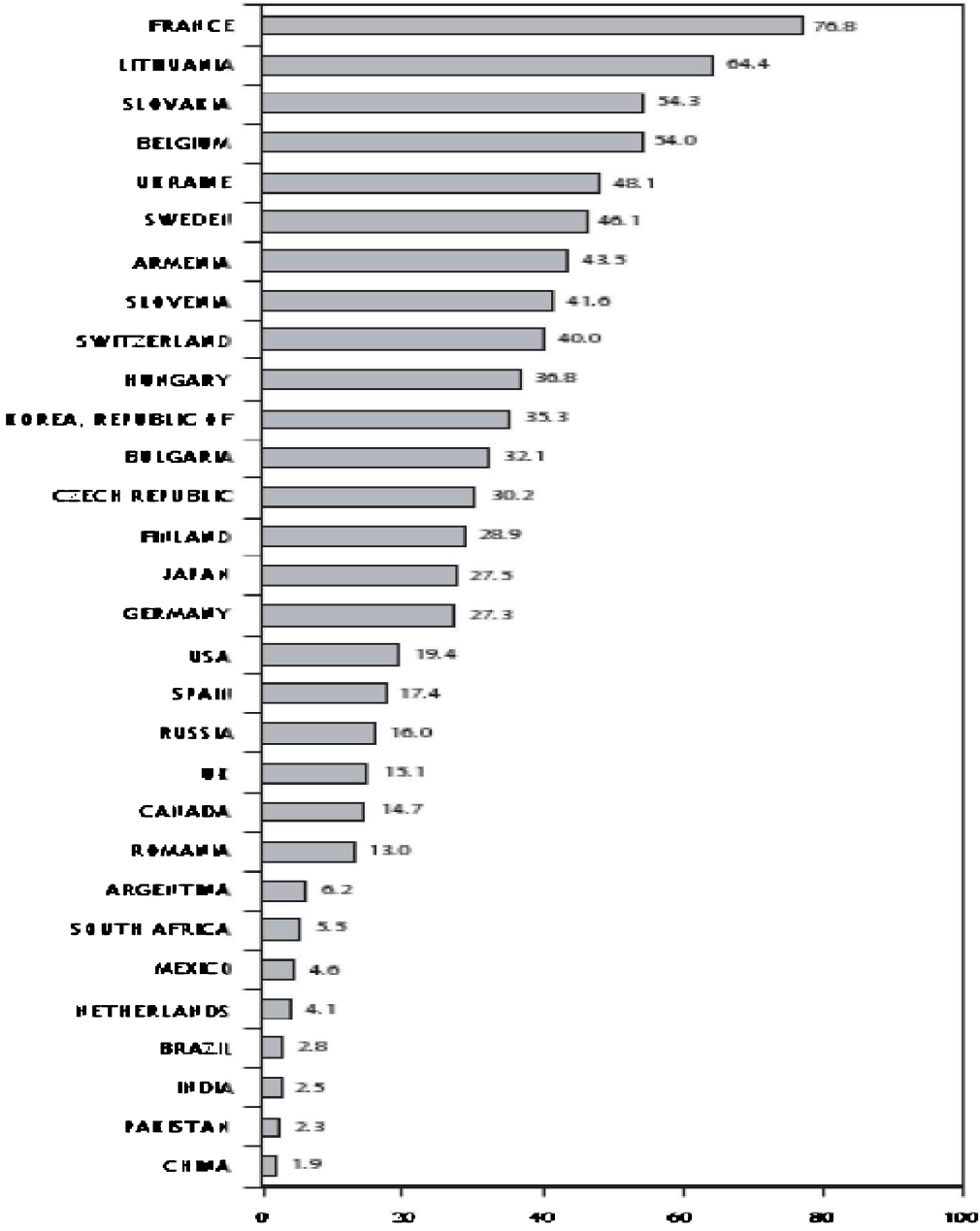


Figura 13.6: Distribución, por países, de la proporción de electricidad producida de origen nuclear, en el año 2007. Fuente: IAEA, Viena, Austria (http://www.iaea.org).

En España, en los años 1980, más del 25 % de la energía eléctrica

fabricada era de origen nuclear (reactores de fisión). La producción actual representa el 12 %, debido al progresivo aumento de otras fuentes renovables como los generadores eólicos. Hasta finales de 2012, existían 9 centrales nucleares en marcha, basadas en dos tipos de diseños de reactores:

PWR Almaraz I y II, Ascó I y II, Cabrera, Trillo y Vandellós II

BWR Cofrentes y Sta. María de Garoña

pero la central de Santa María de Garoña (Burgos), paró definitivamente en diciembre de 2012. Más del 65 % de los reactores en el mundo son de tipo PWR y el 25%de tipo BWR.

El tipo de combustible más frecuentementemente utilizado es el uranio enriquecido de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ entre el 3 y el 4 %.

El primer reto que hay que resolver a gran escala es el almacenamiento de residuos de alta y baja actividad. El siguiente reto será afrontar el desmantelamiento ordenado de unas 440 centrales en los próximos 50 años.

13.3.1 Residuos radiactivos de la fisión; los actínidos

El 90 % de los residuos radiactivos que se producen provienen de las centrales de fisión. De entre los residuos de baja y media actividad originados en los reactores de fisión (elementos de vida corta; $t_{1/2} < 30$ años) están:

$$^{90}_{38}\mathrm{Sr}(27,7\ \text{años}),\ ^{137}_{55}\mathrm{Cs}(30\ \text{años}),\ ^{60}_{27}\mathrm{Co}(5,3\ \text{años}),\ ^{55}_{26}\mathrm{Fe}(2,5\ \text{años})$$

sin embargo los más preocupantes son los residuos de vida media larga (miles de años). Además de los productos secundarios de la fisión con vida media larga, hay otros elementos que contribuyen a la radiactividad en el seno de un reactor de fisión: se trata de los actínidos. Estos núcleos

transuránidos se generan por captura neutrónica. Su nombre proviene del actinio (Z = 89), un metal pesado que precede al uranio en la tabla de Mendeleiev. El actínido que más se produce en las centrales de fisión es el plutonio (en particular el isótopo $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$). También se producen: el neptunio $^{237}_{93}\mathrm{Np}$, los isótopos del americio $^{241}_{95}\mathrm{Am}$ y $^{243}_{95}\mathrm{Am}$ y los isótopos del curio $^{244}_{96}\mathrm{Cm}$ y $^{245}_{96}\mathrm{Cm}$, que suelen denominarse actínidos *menores* y su producción es muy pequeña respecto a los productos de fisión y al plutonio. Ejemplo: Entre los productos resultantes de la descarga del combustible usado en una central PWR típica de 1 GW eléctrico se encuentra anualmente:

- 33 toneladas de uranio enriquecido a 0,9 %,
- 1,2 toneladas de productos de fisión,
- 387 kg de actínidos, entre los que 360 kg corresponden al plutonio y 27 kg a los actínidos menores, que se reparten en: 14 kg de neptunio, 12 kg de americio y 1 kg de curio.

La radioactividad del plutonio y de los actínidos menores es una pequeña fracción de la de los productos de fisión, pero tienen una semivida más larga. El problema sigue siendo el del almacenamiento de estos materiales. Por otra parte, los actínidos tienen gran probabilidad de desintegración alfa y, en caso de ingestión, son más tóxicos (aunque son poco solubles) que los elementos inestables por desintegración beta. Transcurridos unos 200 años, la actividad y toxicidad potencial de los actínidos es superior a la de los productos de fisión. La solución pre-vista es cristalizarlos en cerámicas y almacenarlos en capas geológicas profundas. También es posible transmutar los residuos radiactivos por bombardeo con aceleradores de protones, aunque esta tecnología no se ha puesto en práctica todavía. Afortunadamente también se obtienen isótopos radiactivos (en reactores y sobre todo en ciclotrones) que tienen aplicación beneficiosa en *medicina nuclear*:

núcleo	aplicación
$^{133}_{54}$Xe	malfunción pulmonar
$^{131}_{53}$I	hipertiroidismo
$^{228}_{88}$Ra (agujas), $^{192}_{77}$Ir (hilos), $^{192}_{79}$Au (semillas)	braquiterapia
$^{60}_{27}$Co	teleterapia
$^{85}_{36}$Kr	trazador y detector fugas

La dosis media de radiación que recibe el público debida a la industria nuclear (centrales, retratamiento del combustible, transporte) se ha evaluado en unos 2 μSv, despreciable frente a la dosis anual de origen natural que es de unos 2,50 mSv. Recuérdese que la dosis de radiación mortal es del orden de unos 3 a 5 Sv (300 a 500 rem).[5]

Por último, no puede silenciarse que, hasta la caída del muro de Berlín (en 1989), símbolo de la guerra fría, se calcula que las potencias mundiales acumulaban hasta unos 10 000 megatones de potencia destructiva basada en artefactos nucleares (basta con unos 15 kg de $^{239}_{94}$Pu para disponer de un sistema supercrítico); es decir, suficiente capacidad destructiva como para poner en peligro la existencia de la humanidad en la Tierra. Mucho material fisible se consigue de las centrales nucleares, aunque para su utilización como explosivos es necesario disponer de grandes industrias de reprocesamiento de los residuos radiactivos y otras, no menos grandes, de armamento nuclear.

13.4 Problemas

13.1 Decremento logarítmico de energía en colisiones elásticas

Al igual que el fotón, el neutrón carece de carga eléctrica y por tanto no está sujeto a las interacciones Coulombianas de electrones y núcleos de la materia. En su lugar, su mecanismo de interacción es a través de la interacción fuerte con los núcleos. Las colisiones elásticas son su principal mecanismo de pérdida de energía para neutrones rápidos.

Se pide:

a) Demostrar que para el caso de una colisión elástica de un neutrón con un núcleo y en el caso no relativista se cumple que:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta^* + 1}{(1+A)^2}$$

con E y E' las energías inicial y final del neutrón, respectivamente, A el número másico del núcleo y θ^* el ángulo de dispersión en centro de masas.

b) Demostrar que si la distribución de neutrones en el estado final es isótropa en centro de masas se cumple que:

$$\left\langle \frac{E'}{E} \right\rangle = \frac{A^2 + 1}{(A+1)^2}$$

Empleando este resultado calcular el número de colisiones n necesarias para reducir la energía promedio de un neutrón de 2 MeV a 1 eV en hidrógeno.

c) Una mejor estimación para calcular el promedio del número de colisiones n necesario para moderar los neutrones es mediante el empleo del promedio del decremento logarítmico de energía o letargo, definido como $\xi = \langle u \rangle = \langle \ln(E/E') \rangle$. Demostrar que en este caso:

$$n = \frac{u}{\xi} = \frac{1}{\xi} \ln\left(\frac{E}{E'}\right) \quad \text{con} \quad \xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$$

13.2 Moderación de neutrones

Un neutrón se produce con una energía de 2 MeV y se modera hasta 0,025 eV en un moderador de carbón (ρ = 1,8 g/cm^3). Se pide:

a) Calcular el número de colisiones necesario para moderarse.

b) La longitud de difusión térmica del carbón para neutrones

térmicos, siendo σ_a = 0,0032 b y σ_d = 4,8 b.

c) La longitud de moderación del carbón, siendo σ_d = 4,23 b para neutrones rápidos.

13.3 Límite de estabilidad para la fisión espontánea

a) Obtener el límite de estabilidad frente a fisión espontánea a partir de la fórmula semiempírica de la masa en el caso de una fisión simétrica del núcleo.

b) En un modelo clásico para la fisión nuclear se supone al núcleo deformado con forma esferoidal, donde el semieje mayor viene dado por $a = R(1 + \varepsilon)$ y los semiejes menores por $b = R(1 + \varepsilon)^{-1/2}$, con R el radio original del núcleo esférico y ε un parámetro de deformación tal que $ab^2 = R^3$. Si el área superficial del esferoide es:

$$S = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{a}{be}\arcsin(e)\right]$$

y su energía potencial electrostática:

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{3}{10}\frac{(Ze)^2}{ea}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$$

con $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ la excentricidad, demostrar que para el núcleo deformado, las energías superficiales y de Coulomb pueden escribirse, al orden $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ como:

$$E_{\mathrm{C}} = E_{\mathrm{C}}^0\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \frac{4}{21}\varepsilon^3\right) \qquad E_{\mathrm{S}} = E_{\mathrm{S}}^0\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 - \frac{52}{105}\varepsilon^3\right)$$

con E_{C}^0 y E_{S}^0 los valores para el núcleo esférico sin deformar.

c) Demostrar que al orden $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ el límite de estabilidad frente a la fisión espontánea viene dado por:

$$\frac{Z^2}{A} \geq 2\frac{\alpha_S}{\alpha_C}$$

d) Si se sabe que las energías de activación de los núcleos ^{235}U, ^{238}U, ^{239}Pu y ^{240}Pu son respectivamente 6,2, 6,6, 6,0 y 6,3 MeV, estudiar la posibilidad de fisión inducida por neutrones térmicos para cada uno de ellos. Haciendo uso de la fórmula semiempírica de la masa razonar los resultados.

13.4 Atenuación de neutrones por fisión

Un haz de neutrones de intensidad $I_n = 10^5 s^{-1}$ y energía T_n = 0,29 eV, incide sobre una lámina de ^{235}U de 10^{-1} kg m^{-2} de espesor. Calcular:

a) El factor de atenuación de los neutrones.

b) El número de fisiones por segundo.

c) El flujo de neutrones difundidos elásticamente que atraviesan una pared situada a 10m del blanco.

Datos: $\sigma_{\text{elástica}}$ (n + U) = 2 × 10^{-2} b, $\sigma_{\text{captura radiativa}}$ (n + U $\rightarrow \gamma + N$) = 70 b, $\sigma_{\text{fisión}}$ = 200 b.

13.5 Absorción de neutrones por barras de control

Una barra de control de acero borado tiene 150mm de espesor y contiene un 2% en peso de boro. Se pide:

a) Hallar las secciones eficaces macroscópicas de absorción de cada uno de los elementos de la barra.

b) La fracción de neutrones que se absorben al atravesar la barra.

Datos: σ_a(Fe) = 2,5 b, σ_a(B) = 755 b, ρ(Fe) = 7,9 g/cm^3 y ρ(B) = 2,5 g/cm^3.

13.6 Factor de reproducción y probabilidad de escape a la resonancia

a) Calcular el factor de reproducción η y la sección eficaz microscópica de absorción para neutrones térmicos en el uranio, σ_a(U), si se enriquece en un 6% con ^{235}U.

b) La probabilidad de escape a la resonancia, p, puede parametrizarse generalmente mediante la expresión:

$$p = \exp\left[-\frac{2{,}73}{\langle\xi\rangle}\left(\frac{N_{238}}{\Sigma_d}\right)^{0{,}514}\right]$$

con N_{238} el número de átomos de ^{238}U respecto al del moderador, Σ_d la sección eficaz total macroscópica de dispersión y $\langle\xi\rangle$ el promedio del decremento logarítmico de energía para una mezcla. Calcular el valor de p para una mezcla de uranio (enriquecidoen un 1,6% en ^{235}U) y grafito (1 átomo de uranio por 600 de carbón).

Datos: ver tabla 13.4.

Tabla 13.4: Secciones eficaces de absorción σ_a (fisión, σ_f, y captura radiativa, σ_c) y de dispersión, σ_d, para el ^{235}U, ^{238}U y carbono ^{12}C para neutrones térmicos. ν representa el promedio de neutrones producidos por fisión.

Núcleo	σ_f (b)	σ_c (b)	σ_a (b)	σ_d (b)	ν
^{235}U	579	101	680	10	2,42
^{238}U	0	2,72	2,72	8,3	
^{12}C	0	0,0035	0,0035	4,7	

13.7 Factor de multiplicación

a) Calcular el factor de multiplicación de neutrones en un reactor homogéneo formado por una solución diluida de sulfato de uranio (natural) UO_2SO_4 como combustible y agua pesada como moderador (1 molécula de sulfato de uranio por 750 de D_2O).

b) Explicar cómo se vería afectado el factor de multiplicación para un reactor heterogéneo.

Datos: σ_a(S) = 0,52 b, σ_d(S) = 1,1 b, σ_a(O) ~ 0 b, σ_d(O) = 3,8 b,

$\sigma_a(D_2O) = 0{,}001$ b, $\sigma_d(D_2O) = 10{,}6$ b y $\sigma_d(D) = 3{,}389$ b.

13.8 Productos de fisión y desintegración radiactiva

a) Obtener una expresión para la evolución temporal de las cantidades de dos productos de fisión radiactivos *A* y *B*, con rendimientos de fisión γ_A y γ_B respectivamente, si la especie *B* se forma, además, como producto de desintegración de *A* y ambas especies experimentan reacciones de captura neutrónica.

b) El ^{137}Xe se forma mediante la siguiente cadena radiactiva en un reactor nuclear de fisión:

$$^{235}\mathrm{U} \xrightarrow[\text{fisión}]{} {}^{137}\mathrm{I} \xrightarrow[22\ \mathrm{s}]{\beta^-} {}^{137}\mathrm{Xe} \xrightarrow[3{,}9\ \mathrm{ms}]{\beta^-} {}^{137}\mathrm{Cs}$$

Calcular la cantidad de ^{137}Xe que se acumula en el reactor por cada MW de potencia al cabo de un día de funcionamiento a potencia constante.

c) Determínese el tiempo que debe transcurrir para que el ^{137}Xe y el ^{137}I alcancen el 95 % de su valor de equilibrio.

Datos: el rendimiento de fisión del yodo es $\gamma(^{137}\mathrm{I}) = 5{,}9\%$ y su cociente de desintegración $BR(^{137}\mathrm{I} \rightarrow {}^{137}\mathrm{Xe}) = 94$ %.

13.9 Envenenamiento por xenon en un reactor nuclear

Considerar la producción por fisión de los isótopos ^{135}I y ^{135}Xe de acuerdo con el esquema de la figura 13.7, considerados como venenos neutrónicos en un reactor nuclear. Se pide:

a) Obtener las expresiones para la evolución temporal de las concentraciones de ambos isótopos en un reactor a potencia constante. Demostrar que la contribución por captura neutrónica a la desaparición del ^{135}I puede despreciarse pero no así la del ^{135}Xe.

b) Calcular el cociente de las concentraciones de ^{135}I y ^{135}Xe en equilibrio para un flujo de $\varphi = 5 \times 10^{13}$ neutrones $\mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$. Estudiar el comportamiento de los valores en equilibrio en

función del flujo de neutrones.

c) Estudiar la evolución de las concentraciones si una vez alcanzado el equilibrio el reactor es detenido durante un determinado tiempo de transición.

d) Calcular el tiempo para el que se alcanza el valor máximo de ^{135}Xe durante el tiempo de transición después de la parada del reactor así como el valor de su concentración.

e) Obtener la evolución temporal de la reactividad asociada a la presencia del ^{135}Xe y estimar su valor para la concentración máxima de xenon.

13.10 Actividades radiactivas en el accidente de Chernobyl

Entre los productos radiactivos que se emitieron en el accidente de uno de los cuatro reactores de 1 GWe de la central nuclear de Chernobyl en 1986 figuran el ^{131}I ($t_{1/2}$ = 8 días) y el ^{137}Cs ($t_{1/2}$ = 30 años). En un reactor de fisión se producen del orden de cinco átomos de ^{137}Cs por cada uno de ^{131}I. Se pide:

a) Suponiendo que el reactor ha estado funcionando contínuamente durante 10 días con anterioridad a la emisión de la radiación, ¿cuál de los dos isótopos contribuye más a la actividad de la nube radiactiva? ¿En qué factor?

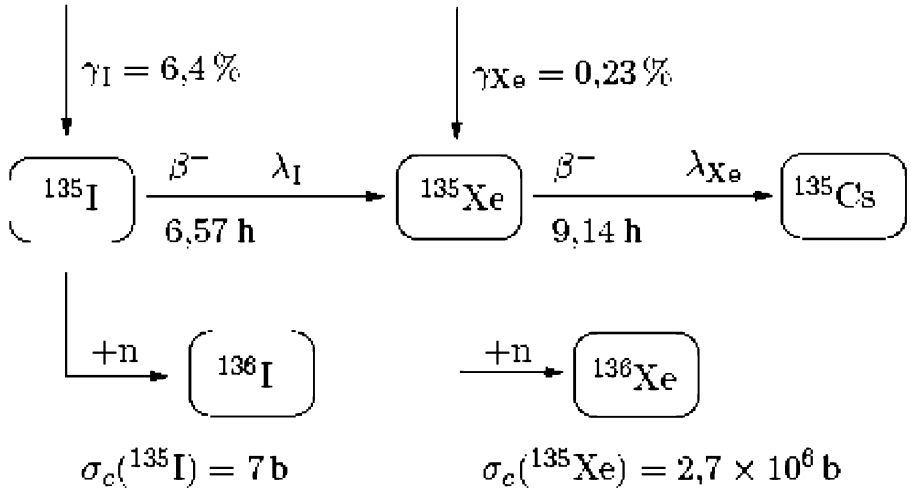


Figura 13.7: Esquema simplificado de producción por fisión del isótopo ^{135}Xe, considerado como un veneno neutrónico en la operación de un reactor nuclear.

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir, después del accidente, para que ambas actividades se igualen?

c) Cada proceso de fisión proporciona por término medio una energía de 200 MeV, y alrededor del 1% de los procesos producen ^{131}I. Suponiendo un reactor de las mismas características que el de Chernobyl (1000 MWe), calcular la actividad en Ci del ^{131}I después de 24 horas de funcionamiento ininterrumpido del reactor.

13.11 Actividades de los productos de fisión

Las actividades de los núcleos radiactivos producidos en la fisión nuclear pueden parametrizarse de forma aproximada, para el caso de las emisiones β y γ, según las siguientes expresiones válidas para tiempos entre t > 1 segundo y unos 100 años:

$$\mathcal{A}_\beta(t) = 3{,}8 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{t}\right)^{1,2} \frac{\text{partículas}}{\text{s} \times \text{fisión}}$$

$$\mathcal{A}_\gamma(t) = 1{,}9 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{t}\right)^{1,2} \frac{\text{fotones}}{\text{s} \times \text{fisión}}$$

con t el tiempo transcurrido desde el instante en que comienzan las fisiones, en días. Se pide:

a) Si las energías promedio de los electrones β y los fotones γ son 0,4 MeV y 0,7 MeV respectivamente, obtener la expresión para la potencia calorífica por fisión debida al efecto de la ionización de estas desintegraciones radiactivas.

b) Obtener, a partir del resultado del apartado anterior, una ecuación para la potencia térmica calorífica y la energía emitida

en forma de calor en función del tiempo para un reactor de fisión que ha estado funcionando durante un tiempo T con una potencia P.

c) Obtener también una expresión para la evolución temporal de las actividades β, γ y total en el caso del reactor anterior.

d) El reactor de fisión de Chernobyl funcionó con una potencia de 3 GW antes del accidente. Si la vida media de las pilas de combustible era de un año estimar la potencia calorífica producida y la energía liberada en forma de calor después de una semana, un mes y un año del accidente. Suponer que el 97 % del material radiactivo permaneció en el núcleo del reactor.

Datos: ver la sección 13.2.4.

13.12 Accidente de la central nuclear de Fukushima I

El complejo de la central nuclear de fisión de Fukushima I (Daiichi) en Japón estáformado por seis reactores con una potencia térmica total de 14,2 MWt (ver tabla 13.5). En el año 2011 se produjo un terremoto en el noreste de Japón de magnitud 9.0 (Richter) que dejó sin suministro de energía eléctrica a la central. En el momento del terremoto sólo estaban operativos los tres primeros reactores que fueron automáticamente detenidos mediante la introducción de barras de control interrumpiendo así las reacciones de fisión en cadena. Los generadores diesel de respaldo comenzaron a proveer energía a las bombas de los sistemas de refrigeración de los seis reactores. Sin embargo, aproximadamente una hora después del seismo un tsunami dejó inoperables los generadores de respaldo provocando una pérdida total de corriente alterna en la central.

Tabla 13.5: Características del complejo de los 6 reactores nucleares de fisión que constituyen la central de Fukushima I Daiichi (Japón).

Reactor	Tipo	Potencia eléctrica/térmica	Tipo de combustible	Cantidad de combustible[2](t)
1	BWR–3	460/1380 MW	UO_2	68.0
2	BWR–4	784/2381 MW	UO_2	93.2
3	BWR–4	784/2381 MW	UO_2/MOX[1]	93.2
4	BWR–4	784/2381 MW	UO_2	0
5	BWR–4	784/2381 MW	UO_2	71.1
6	BWR–5	1100/3293 MW	UO_2	107,8

[1] Acrónimo para mezcla de óxidos (*MOX*, *Mixed OXide*). Se trata de una mezcla de óxido de uranio natural, uranio reprocesado o empobrecido y dióxido de plutonio (3 %–10 %).

[2] En el momento del accidente.

Se pide:

a) Calcular la frecuencia de variación de temperatura (en °C/s) en el núcleo de los reactores.

b) Estimar el tiempo necesario para alcanzar una temperatura de 2000 °C y la consiguiente fusión del núcleo del reactor. Suponer que la temperatura del núcleo del reactor en condiciones normales es de 600 °C.

c) Calcular el flujo de agua necesario (por unidad de tiempo) para eliminar el calor en los reactores producido por las desintegraciones radiactivas si se quiere mantener una temperatura en el núcleo que no sobrepase los 80 °C respecto a la temperatura normal de operación.

Datos:

Calor específico del combustible (promedio): c = 0,3349 × 10^3 J/(kg°C).

Calor específico del agua: c = 4,179 J/(kg°C).

13.13 Condición crítica en reactores nucleares Se pretende construir un reactor nuclear térmico homogéneo que utiliza una mezcla de uranio ^{235}U puro como combustible y grafito como moderador, con una relación de un átomo de ^{235}U por cada 10^4 de C. Suponer

el caso de que no existe reflector. Se pide:

a) Comprobar que la longitud de difusión térmica de los neutrones en el núcleo del reactor viene dada por la relación $L^2 = (1 - f)L_t^2$, con f el factor de utilización y L_t la longitud de difusión térmica en el moderador. Obtener el valor de L para el reactor en cuestión.

b) Calcular la edad de Fermi, τ, para neutrones de 1 MeV y neutrones térmicos en grafito si se supone una energía media inicial de los neutrones de 2 MeV. Obtener también el área de migración M^2.

c) Calcular el factor de multiplicación del reactor.

d) Si se supone que las dimensiones del reactor son grandes, determinar la ecuación crítica y el valor del *buckling*. Estimar el error cometido con esta aproximación.

e) Comparar el volumen y la cantidad de ^{235}U necesaria para obtener la condición crítica para los siguientes diseños del reactor:

- Cilíndrico con una altura igual a dos veces su radio.
- Esférico de radio R.
- Cúbico de lado L.

---

[1]Resultados publicados en *Naturwissenschaften* **27** (1939) 11.

[2] En efecto, la superficie del elipsoide vale $S_{elip} = 2\pi ab\left(\sqrt{1-\epsilon^2} + \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}\right)$ siendo $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, el coeficiente de deformación.

[3] Véase el ejemplo desarrollado en la subsección 12.2.2.

[4]Datos de la Agencia Internacional de la Energía Atómica, Viena, Austria (http://www.iaea.org).

[5]Sv - Sievert, unidad de dosis equivalente. El rem también es una unidad de dosis

equivalente (1 Sv = 100 rem). Estas unidades se han visto en el capítulo 8, que trata sobre radiactividad y desintegración nuclear.

14. Fusión nuclear

14.1 Introducción

Se entiende por fusión nuclear, el proceso por el que dos núcleos, normalmente ligeros, se aproximan uno al otro lo suficiente como para que entre en juego la fuerza nuclear, se funden y forman un núcleo más pesado. Como puede observarse en la figura 1.10, el núcleo resultante tiene mayor energía de ligadura, por lo que la fusión es un fenómeno exoenergético.

La fusión nuclear que se estudia en este tema se ha organizado en torno a la explicación de tres procesos muy distintos:

1) la nucleosíntesis del *big–bang*, donde tuvo lugar la síntesis de los elementos que componen la mayor parte de la masa conocida del Universo (hidrógeno, helio, deuterio y litio). Estos resultados consolidan la cosmología como una disciplina que tiene por objetivo el estudio de la evolución del universo. La teoría más aceptada hoy en día es la conocida teoría del *big–bang*. Existen muchas observaciones que avalan esta teoría y entre ellas, la de la abundancia de los elementos,

2) la síntesis estelar que permite entender el origen, funcionamiento y fin de las estrellas y, en particular, estudiar los procesos de fusión que tienen lugar en el interior de las estrellas que es donde se fabrican todos los átomos y núcleos conocidos en la Tierra. La fusión nuclear es el proceso que tiene lugar de forma natural en las estrellas, gracias a las gigantescas fuerzas gravitatorias en juego ypor eso son fuentes de una

extraordinaria cantidad de energía: brillan (emiten fotones) y además emiten otras partículas (neutrinos) de gran interés para la astrofísica. La fusión solar es, desde siempre, la primera fuente de energía sobre la Tierra. Los fenómenos nucleares de fusión, permiten entender la evolución y, consecuentemente, el final de las estrellas, sobre todo las grandes (dos o tres veces más masivas que el Sol); suele ser fulgurante y espectacular: acaban explotando (supernovas) dando lugar a una multitud de fenómenos nucleares, y

3) las posibles aplicaciones prácticas de la fusión termonuclear que, como en el caso de la fisión, podrían ser utilizadas para producir energía eléctrica a gran escala para el bienestar de la sociedad. Al igual que en el caso de la fisión nuclear, estos son básicos en la concepción de los reactores nucleares que podrían ser utilizados para la producción de energía eléctrica. Si bien existen centenares de reactores de fisión por todo el mundo, las instalaciones de fusión se encuentran todavía en fase de experimentación, por ejemplo, el proyecto internacional ITER; esto es debido a la complejidad añadida por el hecho de que los núcleos que se fusionan tienen carga eléctrica.

La física de partículas está íntimamente ligada a los recientes progresos en astrofísica y en cosmología. En la actualidad esta relación ha originado una nueva disciplina denominada física de astropartículas. Por eso en este Capítulo también se abordan algunos de los fenómenos de los que se ocupa esta especialidad.

14.2 Fusión y Cosmología

El mejor laboratorio de fusión termonuclear se tiene en cualquier estrella. Pero antes de abordar el funcionamiento del Sol, primero se revisan brevemente los conceptos de nucleosíntesis primordial contenidos en la teoría del *big–bang*. Es una muestra de la conexión entre física de partículas, física nuclear y cosmología.

14.2.1 Cosmología del *big–bang*. Nucleośıntesis primordial

El universo tiene unos 13.500 millones de años (con un error de unos 1.200 millones de años). Su edad ha sido determinada con una cierta verosimilitud gracias a la teoría del *big–bang* y a tres resultados de experimentos cruciales; la expansión del universo; es decir el alejamiento de las galaxias entre sí(Edwin Hubble, 1929); la medida de la radiación de fondo de microondas (fotones de energías del orden del meV) del universo, tanto en el valor de su intensidad como en la magnitud de su anisotropía (10^{-5}), origen de las super estructuras (galaxias, clusters y superclusters) y, por último, las medidas de abundancia relativa de los elementos ligeros ($^1_1\mathrm{H}$, $^2_1\mathrm{H}$, $^4_2\mathrm{He}$, $^7_3\mathrm{Li}$). Se puede afirmar que estas observaciones son las reliquias del *big–bang*, y que estos resultados han convertido a la cosmología en una teoría moderna con sólidas bases experimentales.

Según la cosmología del *big–bang*, el universo es consecuencia de una singularidad espacio–temporal. Inicialmente, la temperatura T y la densidadde materia ρ eran infinitamente grandes y se encontraban en equilibrio las partículas elementales (quarks, leptones y bosones intermediarios; entre ellos los fotones, que son las partículas que componen la *radiación*) y sus antipartículas. La física de partículas explica los procesos que pueden tener lugar entre estos constituyentes en función de su energía. A partir del instante del *big–bang*, el universo inicia su evolución, es decir el espacio y el tiempo se expanden.

La figura 14.1 muestra las fases de la evolución del universo, representando la energía por partícula (equivalente a la temperatura) en función del tiempo.

La relación entre la temperatura (T, en grados K) y el tiempo (t, en segundos) en el período de dominancia de la radiación (densidad energética de los fotones superior a la densidad energética de la materia) se demuestra que viene dada por:

$$T \approx \frac{1,5 \times 10^{10}}{\sqrt{t}} \text{ [K]} \qquad (14.1)$$

y describe la evolución temporal del universo primordial. La expansión implica enfriamiento, es decir, la energía media de las partículas va disminuyendo y las posibles reacciones que pueden tener lugarvan desapareciendo. La progresiva disminución de la energía (la temperatura) en función del tiempo fija la historia del universo. Ejemplo: sólo para temperaturas superiores a la masa del protón, $kT > M_p c^2$ existe equilibrio con la radiación: $\gamma + \gamma \leftrightarrow p + \overline{p}$.

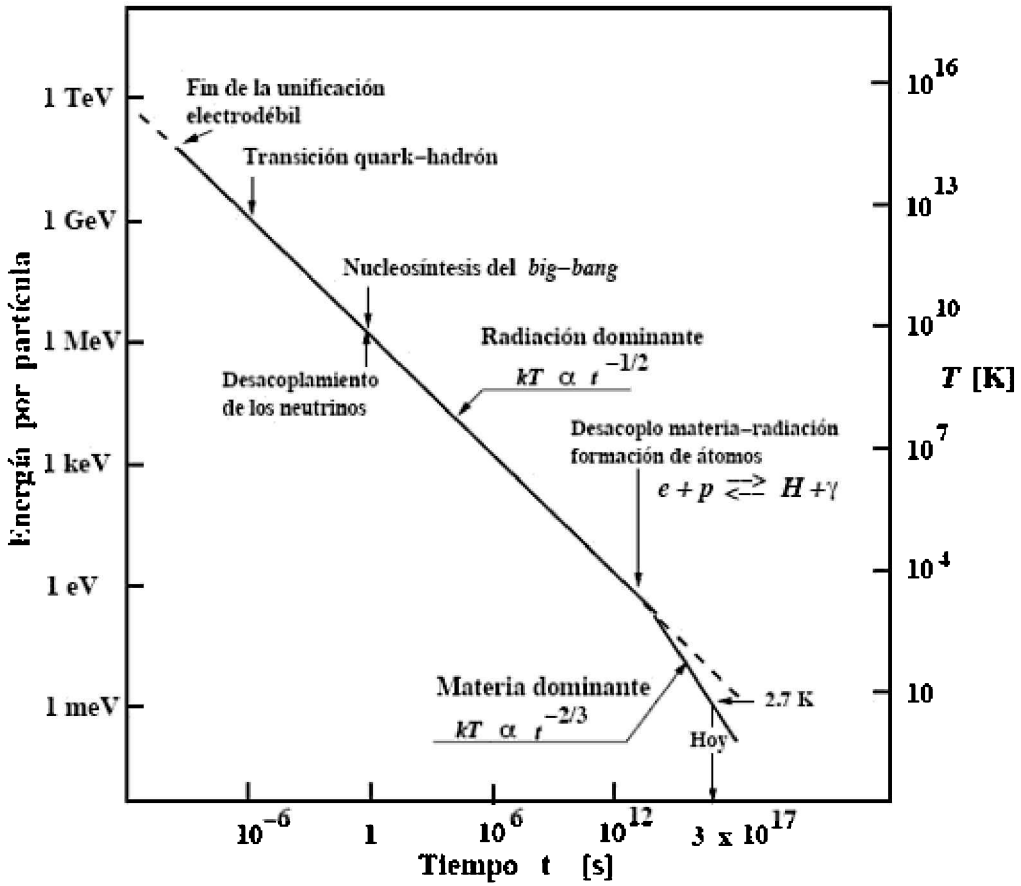


Figura 14.1: La evolución del universo según la teoría del *big–bang*.

Para describir la nucleosíntesis primordial, se han seleccionado cuatro etapas:

1/ La *nucleosíntesis primordial* empieza hacia los 3 segundos después del *big–bang,* en los que la temperatura $T \approx 9 \times 10^9 K$ y se tiene que el cociente de neutrones y protones $N_n/N_p = 0,23$. En efecto, a esta temperatura la distribución de Boltzmann, que da la distribución de la energía entre partículas, predice el cociente $N_n/N_p = \exp(-Q/kT)$, siendo $Q = m_n - m_p = 1,293$ MeV. A partir de aquí su evolución será tal que en el instante t habrá $N_n(0)e^{-t/\tau}$ neutrones y $N_p(0)+N_n(0)(1-e^{-t/\tau})$ protones, fabricando deuterio en equilibrio:

$$p + n \leftrightarrow d + \gamma$$

hasta que los fotones no tienen suficiente energía para disociar el deuterio (como $Q = 2,22$ MeV, ello sucede cuando la temperatura baja hasta $Q/40$ MeV o sea hacia los $t \approx 400$ s).

2/ A los 400 segundos el deuterio empieza a fusionarse creando otros núcleos, entre ellos el helio:

$$\begin{array}{ll} d + n \rightarrow {}^3_1H + \gamma & d + d \rightarrow {}^3_1H + p \\ d + p \rightarrow {}^3_2He + \gamma & d + d \rightarrow {}^3_2He + n \end{array}$$

y finalmente:

$$\begin{array}{l} {}^3_1H + p \rightarrow {}^4_2He + \gamma \\ {}^3_2He + n \rightarrow {}^4_2He + \gamma \end{array}$$

y sí se llega a explicar la abundancia primordial del ${}^4_2He$. Como no existen núcleos estables con $A = 5$ se llega a que las abundancias más representativas son: ${}^4_2He/{}^1_1H = 0,1;\ {}^2_1H/{}^1_1H = 1,6 \times 10^{-5}$ y ${}^7_3Li/{}^1_1H = 10^{-10}$.

Así pues, enel universo, el 90 % de átomos son de ${}^1_1H$ y el 9% de ${}^4_2He$.

3/ Hasta unos 300.000 años después del *big–bang,* la materia

(protones, electrones yátomos de hidrógeno) se encuentra en equilibrio con la radiación (fotones) a través de los procesos:

$$e^- + p \longleftrightarrow \gamma + {}^1_1H$$

pero al bajar de unos $10^4 K$ la radiación se desacopla de la materia (es cuando losátomos de ${}^1_1H$ se forman y los fotones ya no tienen suficiente energía para ionizarlos). La temperatura de los fotones va descendiendo a medida que se expande el universo. Por eso se dice que se han convertido en una de las reliquias del *big–bang*.

4/ La siguiente etapa es la de formación de las galaxias, a partir de la acción gravitatoria que se ejerce sobre los cúmulos de gas (${}^1_1H$ y ${}^4_2He$ principalmente).

La ley de Hubble

Una de las evidencias de la expansión del universo se debe a Hubble quien observó el desplazamiento al rojo de los espectros de las galaxias lejanas, y dedujo que esas galaxias se alejan con una velocidad proporcional a su distancia ala Tierra:

$$\boxed{v = H_0 d} \qquad (14.2)$$

Es la llamada Ley de Hubble. Es decir, todas las galaxias se alejan entre sí y el universo se expande (véase la figura 14.2). El valor de la constante de Hubble es H_0 = 65 ± 5 km s^{-1} Mpc^{-1}. Recuérdese que la unidad convencional de distancia en astronomía es el parsec[1] (pc).

La determinación de la velocidad de alejamiento de las galaxias se realiza gracias al efecto Doppler (el fenómeno del corrimiento al rojo de la luz). La longitud de onda λ de una de las rayas del espectro, emitida por una estrella de una galaxia lejana que se aleja con velocidad v (o sea, $\beta = v/c$), se modifica:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda(1+z)$$

siendo $z = \Delta\lambda/\lambda$ el parámetro de *red–shift*, que ha llegado a tomar valores hasta de $z = 5$.

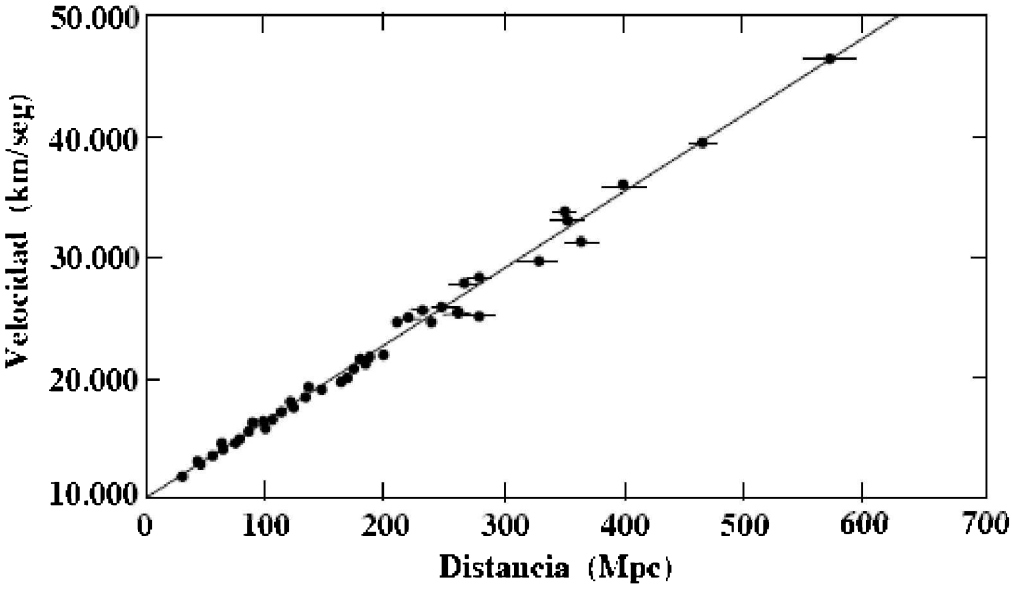


Figura 14.2: Velocidad de expansión de las galaxias en función de su distancia a la Tierra.

El fondo de radiación de microondas

Evidentemente, al seguir expansionándose el universo, la radiación va enfriándose siguiendo la ley vista en (14.1), de forma que el universo puede considerarse un cuerpo negro. El espectro del cuerpo negro para fotones con una energía $E = h\nu$, viene dado por la distribución de Bose–Einstein, que da el número de partículas por unidad de volumen con un momento comprendido entre p y $p + dp$:

$$n(E)dp = \frac{p^2 dp}{\pi^2\hbar^3\left(e^{E/kT} - 1\right)}\frac{g_\gamma}{2} \qquad (14.3)$$

donde g_γ da cuenta de los posibles estados de espín del fotón ($g_\gamma = 2$).

El fondo universal de radiación de microondas fue descubierto por A. Penzias y R. Wilson en 1964. Su medida fue $\lambda = 7, 35$ cm, correspondiente a una temperatura de cuerpo negro de 3,1±1,0 K. Hoy se sabe que la temperatura del fondo es:

$$\boxed{2{,}725 \pm 0{,}002 \text{ K}}$$

gracias a las medidas del satélite COBE.[2] Los resultados experimentales obtenidos con el satélite COBE se muestran en la figura 14.3 donde, además, puede comprobarse que la curva continua sigue de manera extraordinaria la prevista para una distribución de cuerpo negro a 2,7 K, según (14.3).

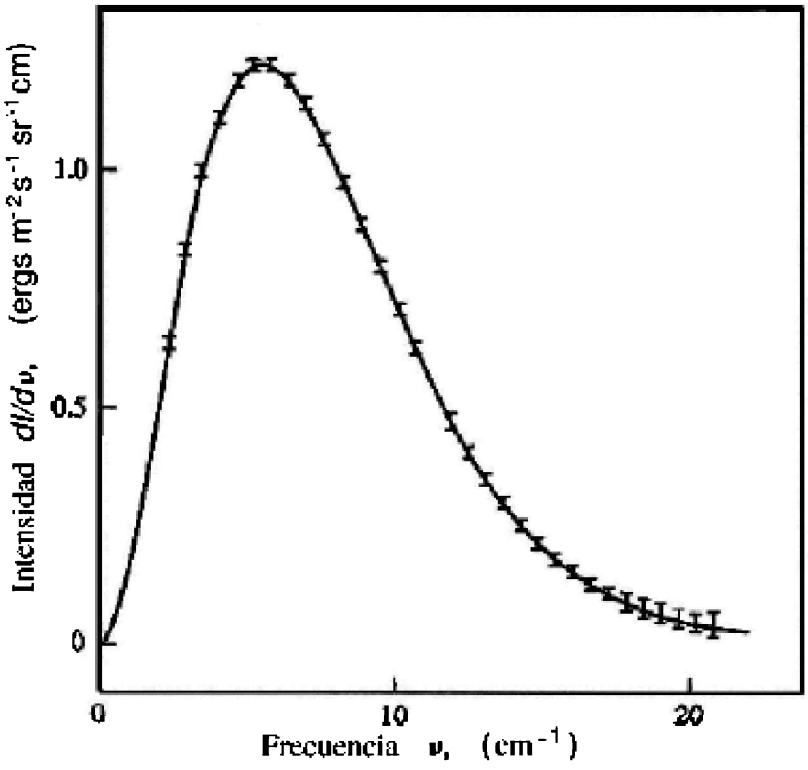


Figura 14.3: Las medidas obtenidas por el satélite *COBE* de la radiación de fondo del universo. La curva corresponde a la distribución de la radiación de un cuerpo negro a una temperatura $T = 2, 73$ K.

De la radiación del cuerpo negro se puede obtener la densidad de fotones en función de la temperatura T:

$$n_\gamma = 2,0 \times 10^7 \, T^3 \quad \gamma/m^3$$

o sea que hoy se tienen 400 γ/cm^3, cuyo equivalente energético $E/c^2 = 0,25$ eV debido a los fotones primordiales por cm ^{3}. La densidad de materia es sin embargo, mucho menor: $n_{\text{nucleones}} = 10^{-9} n_\gamma$, pero la densidad energética debida a los nucleones es casi tres órdenes de magnitud mayor; por eso en el universo actual se dice que domina la materia (véase la figura 14.1).

Uno de los grandes retos pendientes de la cosmología (y de la física de partículas) es que el universo parece que se compone de un 30 % de *materia* y un 70 % de *energía*. Sin embargo, la densidad de materia visible (estrellas, etc.) representa sólo el 0,3 % y se estima que la cantidad total de materia bariónica es ≈ 3%. Luego sólo se conoce la naturaleza del 10 % de la materia del universo. Hasta el 90 %, hay mucha materia que falta por descubrir, cuya naturaleza es desconocida: es la llamada *materia oscura*. La materia oscura se deriva, entre otros, de la observación de la velocidad de rotación de las estrellas en las galaxias ($v \sim$ constante e independiente de r, distancia al centro de la galaxia, en vez de $v \sim 1/r$, como por ejemplo en el sistema solar). Esto exige la presencia de una masa invisible, desconocida y distribuida uniformemente por el halo galáctico. El otro reto aún más profundo es que el 70 % del universo está compuesto de la llamada *energía oscura*, de la que no se sabe su naturaleza, aunque se supone que es la causante de la expansión acelerada del universo (una fuerza gravitatoria repulsiva?).

14.3 Fusión solar y neutrinos solares

El interés del estudio de la fusión en el Sol, se centra en explicar la nucleosíntesis estelar y comentar las evidencias sobre el déficit de los neutrinos solares, problema que ha sido resuelto pero que ha abierto un

nuevo frente de investigación ligado a la masa de los neutrinos.

14.3.1 Evolución del Sol

El sistema solar es más joven que el universo. Su origen es muy probablemente la consecuencia de la reagrupación gravitatoria de las cenizas de una explosión de una gran supernova. Las medidas de la edad de los meteoritos, la Luna y otros objetos celestes, han llevado a calcular la edad del sistema solar en unos 4.500 millones de años. El Sol es una estrella de tamaño pequeño–mediano; similar al 80 % de las 200.000 estrellas de la galaxia de la Via Láctea y, como todas ellas, es consecuencia de un cúmulo de gas resultado de una fluctuación cuyo crecimiento es consecuencia de la fuerza gravitatoria. Brilla porque emite fotones (cuantos de luz) resultado de las reacciones de fusión del hidrógeno que tienen lugar en su núcleo. El resultado de las reacciones de fusión es crear helio, núcleo muy ligado y estable, a partir del hidrógeno.

A pesar de que las fuerzas de la gravitación son enormes, tanto en el Sol como en otras estrellas, el sistema no colapsa precisamente debido a la enorme energía emitida en los procesos de fusión del Sol que calienta el gas y genera una presión del gas y de la radiación en contra del colapso. Esto no dura indefinidamente; todas las estrellas tienen un final que puede seguir distintos caminos dependiendo de su masa. Aparecen así fenómenos astrofísicos espectaculares como las supernovas, las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros entre otros.

14.3.2 Los procesos de fusión en el Sol

El Sol es un astro de tipo mediano que tiene los siguientes parámetros:

$$M_\odot = 1,99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$
$$R_\odot = 6,96 \times 10^{8}\ \mathrm{m}.\ (\sim 100 \times R_T)$$
$$\mathcal{L}_\odot = 3,86 \times 10^{26}\ \mathrm{W}.$$

R_T = 6371 km, es el radio medio de la Tierra. $\mathcal{L}_\odot$ es la luminosidad del Sol, que equivale a ~ 2 × 10^{-4}W/kg. Por ello el ritmo de energía solar incidente sobre la Tierra, por unidad de área, es S = 1, 4 kW/m^2, que es la llamada *constante solar*. Esta energía es debida a los fotones emitidos por el Sol, cuya energía media es de 0,5 eV, y corresponden a una temperatura superficial del Sol de 5800 K (recuérdese que 1 eV = 1,16×10^4 K, simplemente el inverso de la constante de Boltzman). La temperatura media del Sol, es mucho mayor, T ~ 1, 16 × 10^7 K (~ 1 keV); proviene de la energía gravitacional:

$$\sim G_N \frac{M_\odot^2}{R_\odot} = 3,8 \times 10^{41}\ \mathrm{J}.$$

A esta temperatura, todos los átomos de $^1_1\mathrm{H}$ y de $^4_2\mathrm{He}$ están ionizados (plasma). Esta energía gravitacional, aumenta la temperatura. Cuando ésta alcanza los 10^7 K (~ 1keV) puede iniciarse la fusión (el llamado ciclo PP) en el seno del plasma de ^{1}H:

PP I (60 %)	Q (MeV)
$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$	0,42
$^1_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma$	5,49
$^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2{}^1_1\mathrm{H}$	12,86

PP II (24 %)	Q (MeV)	PP III (1 %)	Q (MeV)
$^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma$	1,59		
$^7_4\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^7_3\mathrm{Li} + \nu_\mathrm{e}$	0,86	$^7_4\mathrm{Be} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^8_5\mathrm{B} + \gamma$	0,14
$^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$	17,35	$^8_5\mathrm{B} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be}^\star + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$	14,02
		$^8_4\mathrm{Be}^\star \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$	3,03

El balance en el caso del ciclo PP I se puede concretar diciendo que se fusionan 4 átomos de $^1_1\mathrm{H}$ dando $^4_2\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_\mathrm{e}$ con Q = 26, 72 MeV. En efecto, hay que compensar con 4 electrones; dos se asocian con el helio y los otros dos se aniquilan con los dos positrones; el balance es Q = 2 × 0, 42 + 2 × 5, 49 + 12, 86 + 4 × 0, 511 = 26, 72 MeV. Cada átomo de $^1_1\mathrm{H}$ *quemado* por el Sol contribuye con 6,68 MeV de energía. De hecho, sólo se producen unos 25 MeV útiles, porque los 4 neutrinos se escapan del Sol, sin ceder su energía a la estrella porque no interaccionan.

Las variantes PP II y PP III aparecen cuando se produce $^7_4\mathrm{Be}$ y su balance sigue siendo Q = 26, 72 MeV por cada núcleo de helio (Q = 0, 42 + 5, 49 + 1, 59 + 0, 86 + 17, 35 + 2 × 0, 511 MeV para PP II y Q = 0, 42 + 5, 49 + 1, 59 + 0, 14 + 14, 02 + 4 × 0, 511 MeV para PP III). La diferencia entre cada una de las variantes del ciclo PP se reconocen por la presencia de un neutrino con un espectro (o un valor) diferente de energía (véase la figura 14.5).

Físicamente, el *embudo* en la producción de energía en las estrellas es

la creación de deuterio, ya que es un proceso debido a la interacción débil. A energías del orden del keV la sección eficaz σ(pp) ~ 10^{-33}barn, que aumenta 10órdenes de magnitud si la energía es del orden de l MeV.

Como en cada fusión se producen 25 MeV, para explicar la luminosidad del Sol, son necesarias 10^{38} fusiones/segundo, con lo que se fusionan 4×10^{38} protones/segundo. Como en el Sol hay unos 10^{56} protones, ¡todavía podrá funcionar el Sol durante otros 10^{10} años!

En el centro del Sol $T = 1, 5 \times 10^7$ *K* (~ 1, 3 keV). A pesar de la alta densidad protónica, $\rho_p = 125$ g/cm^3 ($n_p = 7, 5 \times 10^{25}$ p/cm^3), la velocidad de reacción es baja: $\langle \sigma v \rangle \approx 5 \times 10^{-18}$ s^{-1} por protón $\times 10^{56}$ p = 10^{38}/s. Se ve que hay un cuello de botella porque sólo se forma 1 deuterón por cada 10^{18} protones. Mientras dura la fusión del hidrógeno, la temperatura del Sol, permanece constante porque luminosidad y potencia generada por fusión son iguales. La contracción gravitatoria se compensa por la presión del gas (a temperatura *T*) y la radiación.

La composición interna del Sol es, aproximadamente, un 71 % de $^{1}_{1}\mathrm{H}$, un 27 % de $^{4}_{2}\mathrm{He}$ ysólo el 2 % lo componen núcleos de C, N, O, Ne, Mg, Si, S, Fe, preferentemente con *Z* par porque siguen la secuencia de la fusión por helio.

Cuando la densidad de $^{4}_{2}\mathrm{He}$ es suficiente (lo que coincide con temperaturas del orden de $T \sim 10^8 K$), pue de sintetizarse $^{12}_{6}\mathrm{C}$ gracias al nivel excitado 0^+, conocido también como la *resonancia* de 7,65 MeV. Los estados nucleares del $^{12}_{6}\mathrm{C}$ permiten entender los procesos que tienen lugar en el Sol. En la figura 14.4 pueden observarse estos niveles. En efecto a temperaturas > 10^8 K pueden tener lugar los procesos:

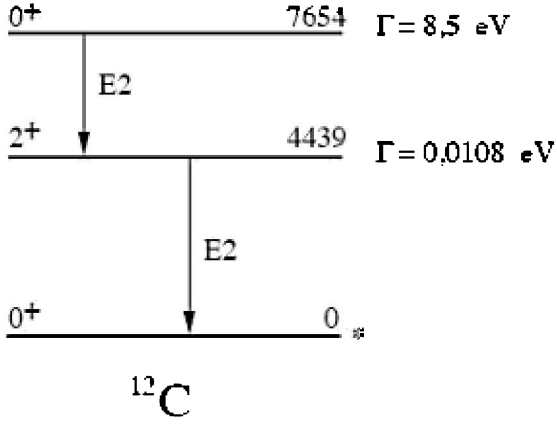
$$\alpha + \alpha \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow \alpha + \alpha$$

donde el *isotope*[8][4]*Be,* núcleo muy inestable con una anchura intrínseca $\Gamma = 6, 8$ eV correspondiente a una vida media $\tau = 0, 98 \times 10^{-16}$ s; a pesar de ello, vive lo suficiente para que también pueda tener lugar el proceso:

$$\alpha + {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}^{*} + \gamma$$

La primera reacción es endoenergética (Q = −0, 09 MeV) y la segunda, altamente exoenergética (Q = 7, 367 MeV, a sólo 287 keV de la resonancia). De esta manera puede crearse el estado excitado de 7654 keV del carbono que, al desintegrarse, alcanza de manera irreversible el estado fundamental. Ello es posible porque la vida media del estado de 7654 keV es de 5×10^{-17} s, inferior a la de desintegración del ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$. A partir de la existencia de suficientes núcleos de ^{12}C, comienza el ciclo CNO, en donde el ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ actúa como catalizador de la fusión del ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, al igual que en los ciclos PP. Aquí llega a perderse el 5% de la energía en emisión de ν_e. El ciclo CNO es más rápido ya que no existe el cuello de botella de la síntesis del deuterio. Sin embargo, la barrera culombiana es mayor y el ritmo de reacción se ve frenado a no ser que aumente la temperatura de la estrella.

CNO (15 %)	Q(MeV)	CNO	Q(MeV)
${}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma$	1,94	${}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma$	7,29
${}^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu_e$	1,20	${}^{15}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu_e$	1,73
${}^{13}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma$	7,55	${}^{15}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$	4,96



^{12}C

Figura 14.4: Esquema energético de los dos primeros niveles excitados del núcleo $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Las energías están en keV.

Pero la temperatura aumenta debido al colapso gravitacional y continúan los procesos de fusión hasta llegar al $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, a partir del cual ya no se crean más núcleos por fusión, puesto que estas reacciones son endoenergéticas. El proceso de fusión de núcleos, se para.

A temperaturas de 10^8K, materia y radiación están en equilibrio (los fotones se materializan en pares e^+e^- y la aniquilación e^+e^- produce pares de fotones). Se hace posible de esta manera que una serie de interacciones débiles sean posibles, por ejemplo:

1. $e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \overline{\nu}_e$ (Q = 1, 02 MeV)
2. $e^+ + e^- \rightarrow \nu_\mu + \overline{\nu}_\mu$
3. $\gamma + e^\pm \rightarrow \nu_\ell + \overline{\nu}_\ell + e^\pm$
4. $e^\pm + (Z, A) \rightarrow e^\pm + (Z, A) + \nu_\ell + \overline{\nu}_\ell$

Todos ellos son procesos por intercambio de bosones W o Z, o producción de Z virtual.

Cuando el núcleo de la estrella llega a estas temperaturas, el gas de electrones es degenerado. La energía de Fermi puede ser suficiente para que tenga lugar la captura electrónica:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e \quad \text{y} \quad e^+ + n \rightarrow p + \overline{\nu}_e$$

y la presencia de neutrones va a ser capital para la continuación de la evolución de la estrella.

A partirde $T \sim 10^9$K pueden sintetizarse núcleos con A par, por ejemplo:

$$^{12}_{6}\mathrm{C} + \alpha \rightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + \gamma$$

Se ve pues que los núcleos resultantes de reacciones con α (núcleos pares) son más abundantes que los impares. También se ve que núcleos

con $A < 56$ abundan mucho más que los que tienen $A > 56$. El proceso de síntesis de núcleos con $A > 56$ tiene lugar gracias a la presencia de neutrones en la estrella. El proceso es la captura neutrónica:

$$(Z, A) + \mathrm{n} \rightarrow (Z, A + 1) + \gamma$$

seguida de desintegración beta, que origina el núcleo $Z + 1$.

Las estrellas tienen varios finales distintos, según su masa. Las estrellas como el Sol o más ligeras, acaban como enanas blancas. Estas son astros muertos con una masa igual a la del Sol y un radio casi igual al de la Tierra. Se bloquea su evolución porque la presión del gas degenerado de electrones frena el colapso gravitacional y no aumenta la temperatura, por lo que se van enfriando. Las que superan el límite de Chandrasekar ($M \geq 1,44 \times M_{\odot}$) suelen acabar explotando; la presión gravitatoria supera la del gas de Fermi, degenerado, de electrones relativistas. Entonces, al consumirse el hidrógeno, se enfría la estrella, colapsa gravitacionalmente y explota (supernova); por ejemplo en 1054 dC en la constelación cangrejo o la más reciente SN1987B.

El colapso gravitacional puede dar lugar a la formación de una estrella de neutrones (dependiendo de la masa de la estrella). Bonito ejemplo de un enorme sistema que puede ser descrito como un gas de Fermi. Si la masa es suficientemente grande puede dar lugar a un agujero negro.

14.3.3 Los neutrinos solares

En los ciclos PP de fusión que tienen lugar en el Sol se emiten ν_e. Estos neutrinos informan sobre los fenómenos que tienen lugar en el interior del Sol. Por el contrario, los fotones llegan a la superficie del Sol después de millones de años de haber sido producidos, pudiendo entonces escapar, con lo que esta energía emitida en forma de fotones contribuye al calentamiento de la fotosfera, la zona exterior del Sol donde la energía desprendida en las reacciones nucleares es finalmente convertida en luz.

El conocido Modelo Estándar Solar (SSM), de Bahcall *et al.*, predice el número de neutrinos solares que son emitidos por el Sol. Estas predicciones pueden observarse en la figura 14.5, en donde para medir el flujo de neutrinos se utiliza como unidad el acrónimo SNU (*Solar Neutrino Unit*), que mide el producto $\varphi_\nu \cdot \sigma_\nu[s^{-1}]$ cuya unidad vale 10^{-36} s^{-1}. En dicha figura se ha representado el flujo de neutrinos procedentes de cada uno de los procesos dominantes en el Sol.

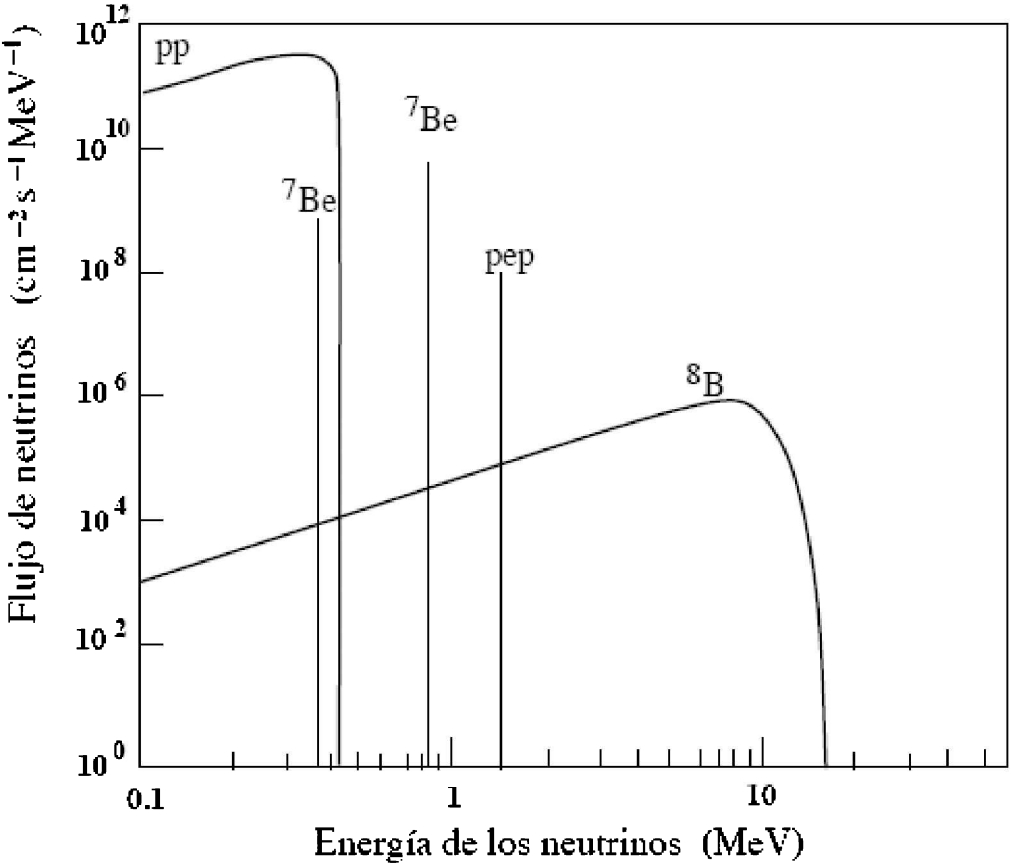


Figura 14.5: Espectro de neutrinos solares incidentes en la Tierra. Se observan los espectros continuos del proceso pp y de la desintegración del $^{8}_{5}\mathrm{B}$ así como los picos monoenergéticos de la captura electrónica del $^{7}_{4}\mathrm{Be}$ (hay dos picos; el de mayor energía proviene de la desintegración al estado fundamental del $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ y el de menor energía al primer estado excitado del

$^{7}_{3}\mathrm{Li}$) y del proceso pep que también contribuye a la síntesis del deuterio: $\mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + \nu_{\mathrm{e}}$.

Desde el experimento pionero de Raymond Davis Jr. que buscó la detección de neutrinos procedentes del Sol, el flujo de neutrinos procedentes del Sol, está siendo medido continuamente. Por su importancia histórica se presentan a continuación cuatro experimentos dedicados al estudio de los neutrinos solares, cada uno de ellos utilizando técnicas complementarias:

- El experimento de R. Davis (Premio Nobel de Física 2002) *et al.*, situado en el sur de Dakota, en una mina a 1 milla de profundidad; estuvo operativo hasta 1994. El detector lo formaba una masa de 615 Tm de percloroetileno (C_2Cl_4), conteniendo 2, 18×10^{37} átomos de $^{37}_{17}\mathrm{Cl}$, cuya abundancia isotópica era del 25 %. Estudió, desde 1960, la reacción:

  $$\nu_{\mathrm{e}} + {}^{37}_{17}\mathrm{Cl} \rightarrow \mathrm{e}^{-} + {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} \qquad (Q = -0,81\ \mathrm{MeV})$$

  Observó 0,40±0,06 átomos de $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ radiactivo por día, lo que equivale a2,1 SNU, mientras que el *SSM* predice 7,9 SNU. Este experimento era insensible a los neutrinos de la cadena PP I puesto que su energía es inferior al umbral de la reacción del $^{37}_{17}\mathrm{Cl}$ (0,81 MeV). Este experimento es el que originó el conocido déficit de neutrinos solares.

- El experimento KAMIOKANDE, propuesto por Masatoshi Koshiba (Premio Nobel de Física 2002) es un detector situado en Japón. Es un enorme tanque de 2 000 Tm de agua, situado en una mina subterránea, rodeado de fotomultiplicadores que detectan la luz Cherenkov producida por los secundarios de las interacciones de neutrinos con el agua. Ha publicado un cociente Exp/Teór =

0,46±0,05, confirmando el anterior déficit de neutrinos solares. Una de las aportaciones originales de Kamiokande es que mide la dirección de los neutrinos, confirmando su origen solar. Este experimento, como el de Davis, es sensible a los neutrinos del $^{8}_{5}\mathrm{B}$ (véase la figura 14.5). Ahora ha sido ampliado en 50 000 Tm de agua (se llama Superkamiokande). Un resultado inesperado y sorprendente fue la detección por Kamiokande y otros experimentos el 23 de febrero de 1987 de un paquete de 12 neutrinos (¡de los 10^{16} que lo atravesaron!) procedentes de la supernova SN1987A que explotó(a 170 000 años luz) en la cercana galaxia de la Nube de Magallanes, en un intervalo de algunos segundos.

- SAGE, (Soviet American Gallium Experiment), basado en la reacción:

$$\nu_e + {}^{71}_{31}\mathrm{Ga} \rightarrow \ e^- + {}^{71}_{32}\mathrm{Ge} \qquad (Q = -0,23\,\mathrm{MeV})$$

que es sensible a los neutrinos de la cadena PP I. En el experimento esperan 132 SNU y han reportado un resultado de 69 ± 10 (error estadístico) ±20 (error sistemático) SNU, con un nivel de confianza del 90 %.

- GALLEX, situado en el Laboratorio del Gran Sasso, cerca de Roma, en un túnel bajo 3.500 m equivalentes de agua, que reducen el flujo de cósmicos en un factor 10^6 respecto a la superficie. Después de dos años de funcionamiento, el flujo de neutrinos medido es de 79 ± 10 ± 6 SNU, cifra muy inferior a los 128 ± 10 SNU esperados.

Se puede concluir que existe un déficit de neutrinos solares en la Tierra. Es el conocido problema de los neutrinos solares. Una de las ideas que ha resuelto el problema es que esta desaparición de neutrinos es debida a las oscilaciones entre familias. Es un fenómeno de naturaleza

cuántica.

Lo mismo sucede cuando se estudian los conocidos neutrinos atmosféricos, que aparecen en las desintegraciones de las partículas que se producen en las reacciones de los rayos cósmicos con los núcleos de la atmósfera. Las medidas hechas en el experimento subterráneo de Kamiokande (Japón), también concluyen que los neutrinos oscilan y por lo tanto tienen masa, aunque probablemente muy pequeña.

La conclusión de este tema de astrofísica nuclear es que han aparecido dos grandes retos a la física de partículas: uno, el de la existencia de una gran cantidad de *materia*, cuya naturaleza ni es conocida ni forma parte de los constituyentes de la materia que componen el modelo estándar de las partículas y que se estudiará en los siguientes temas. Por otra parte, el estudio de los neutrinos procedentes del Sol, ha abierto un nuevo frente de investigación en física de neutrinos, habiendo quedado establecido que los neutrinos *oscilan*, es decir, cambian de naturaleza (sabor) al recorrer grandes distancias. Fenómeno cuántico que implica que los neutrinos tienen masa, aunque ésta es minúscula. De nuevo este hecho no está previsto por el modelo estándar que supone que los neutrinos tienen masa nula. Se está ante uno de los pocos fenómenos que necesitan la incorporación de nuevas ideas físicas.

14.4 Aplicaciones de la fusión nuclear

Las reacciones de fusión son aquellas que tienen lugar entre núcleos ligeros que se funden dando lugar a núcleos más pesados. Ya se vio al estudiar la curva de estabilidad de los núcleos que éste es un proceso exoenergético. El problema es que para que la reacción tenga lugar, los núcleos deben vencer la barrera culombiana que los separa. Las reacciones de fusión son las que generan la energía solar (y la de las estrellas): este proceso es pues responsable de la evolución de la vida sobre la Tierra.

Se trata de otra vía para la obtención industrial de energía por procesos

nucleares y es ventajosa respecto a la fisión porque:

- en la Tierra hay más abundancia de núcleos ligeros,
- no se producen tantos residuos radiactivos de larga duración, y
- no se requiere un tamaño máximo (masa crítica) como en la fisión; no hay peligro de accidente por explosión.

pero tiene la desventaja, ya apuntada, de que para que la reacción tenga lugar debe disponerse de energía para superar la barrera culombiana (aunque tenga lugar por efecto túnel).

14.4.1 Procesos básicos de fusión nuclear

Como se acaba de ver, para que la fusión nuclear tenga lugar, es necesario que los núcleos venzan la fuerza de repulsión culombiana. Esto implica que los núcleos que intervienen en la reacción de fusión deben tener una energía cinética suficiente para vencer la barrera culombiana o al menos para tener una elevada probabilidad de efecto túnel. Los procesos más importantes son:

a) reacciones de fusión con protones; la interacción fuerte más elemental ${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{2}_{2}\mathrm{He} + \gamma$ no es posible porque el ${}^{2}_{2}\mathrm{He}$ es inestable. No existe un núcleo estable formadoúnicamente por dos protones. La reacción de fusión:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} \quad (Q = 0,42\,\mathrm{MeV}) \tag{14.4}$$

es la que tiene lugar en las estrellas. Sin embargo es una interacción débil (su sección eficaz es minúscula:[3] $\sigma \sim 10^{-47}$ cm^2) por lo que es indetectable en el laboratorio. Es un proceso inverso a la desintegración beta del neutrón, puesto que el balance de la reacción es que se transforma un protón, libre, en un neutrón, ligado en el deuterón.

b) reacciones D-D:

$$\begin{aligned} {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{n} \quad (Q = 3,27\,\mathrm{MeV}) \\ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \quad (Q = 4,03\,\mathrm{MeV}) \end{aligned} \tag{14.5}$$

La reacción ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \gamma$ (Q = 23,8 MeV) tiene el valor de Q demasiado grande; mayor que las energías de separación nucleónicas del ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ (S_n = 20, 6 MeV; S_p = 19, 6 MeV), y por lo tanto no es aprovechable.

c) reacción D-T:

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{n} \quad (Q = 17,6\,\mathrm{MeV}) \tag{14.6}$$

que es una fuente de neutrones rápidos (con energía cinética T_n = 14,1 MeV), lo que la hace muy interesante para procesos en los que es necesario disponer de *n* secundarios. También podría utilizarse:

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \quad (Q = 18,4\,\mathrm{MeV})$$

aunque para ello debería disponerse de ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ y además, como se justificará más adelante, sería poco interesante porque la carga eléctrica del ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ es 2.

d) procesos con otros núcleos ligeros, también considerados de fusión:

$$\begin{aligned} \mathrm{n} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li} &\rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad (Q = 4,8\,\mathrm{MeV}) \\ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li} &\rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad (Q = 22,4\,\mathrm{MeV}) \\ {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{11}_{5}\mathrm{B} &\rightarrow 3({}^{4}_{2}\mathrm{He}) \quad (Q = 8,7\,\mathrm{MeV}) \end{aligned} \tag{14.7}$$

El primero, de gran utilidad para producir tritio, como se verá más adelante.

En las estrellas la energía proviene de la fusión de 4 protones en varias

etapas: $4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2e^{+} + 2\nu_e$. El paso siguiente que tiene lugar en la fusión en las estrellas es cuando ya se dispone de suficiente ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ y entonces el proceso es la síntesis del ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ a través de: $3 \times {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Todos estos procesos se discuten con más detalle en el parágrafo 14.3.2 dedicado a la fusión solar.

14.4.2 Características de la fusión nuclear

Se presentan a continuación cuatro características importantes de la fusión:

a) energética

En los procesos de fusión, la energía cinética de los proyectiles suele ser $T_a \approx 1 - 10$ keV, valores pequeños respecto a Q. Por lo tanto, despreciando T_a en el proceso $a + X \rightarrow b + Y$, se tiene que $Q = T_b + T_Y$ y como $p_b \sim p_Y$ se puede escribir $Q = T_b\left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right)$ con lo que se cumple:

$$\frac{T_b}{T_Y} = \frac{m_Y}{m_b}$$

lo que implica que en la reacción D-T por ejemplo, el *n* es emitido con el 80 % de la energía disponible (Q).

b) barrera culombiana

Para que la fusión $a + X$ tenga lugar, los núcleos a y X deben aproximarse hasta una distancia suficiente (unas decenas de fm). Al igual que en la desintegración α, habrá que superar una barrera culombiana de valor:

$$V_C = \alpha\hbar c\frac{Z_a Z_X}{R_a + R_X} \qquad (14.8)$$

siendo R_a y R_X los radios nucleares respectivos. En el caso de la reacción DT, la barrera alcanza V_C = 0, 34 $Z_D Z_T$ = 0, 34 MeV (mayor que los ~ 10 keV habituales de los reactores de fusión), y por lo tanto la reacción de fusión tendrá a lugar por efecto túnel. La probabilidad de efecto túnel es la misma que la de Gamow para la desintegración alfa:

$$P = e^{-2G} \qquad \text{con} \qquad G = \frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2\mu(V(r)-E)}dr \qquad (14.9)$$

donde μ es la masa reducida del sistema $a + X$ y E la energía centro de masas de la reacción. G es el factor de Gamow, que contiene el factor de penetración de la barrera culombiana cuyo máximo es $B = V_C$ de la ecuación (14.8) y recuerda que la fusión debe tener lugar por efecto túnel. Es el mismo factor que en el caso de la desintegración α vista en (9.9), pero ahora se cumple $Q = E$, energía cinética en el centro de masas de la reacción $a + X$. Los límites de integración a y b corresponden a los valores $V(a) = B$ y $V(b) = E$. Así, la reacción DD a una energía[4] de 1 keV tiene $P = 10^{-13}$ mientras que a 10 keV alcanza $P = 10^{-3}$.

c) sección eficaz

Fuera de la región de las resonancias, y como a baja energía la sección eficaz varía como $\sigma \sim k^{-2}$, es decir, inversamente proporcion a la la valocidad relativa de a y X al cuadrado, se cumple:

$$\sigma \propto \frac{1}{v^2} e^{-2G} \qquad (14.10)$$

Como $Q << B$, es decir, la energía en el centro de masas es mucho menor que la barrera culombiana, queda:

$$\boxed{G = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi Z_a Z_X}{\hbar v}}$$

y aunque falta conocer el elemento de matriz nuclear y los factores de

espín, la expresión anterior contiene toda la dependencia con la energía. La fórmula exacta de Gamow para la sección eficaz de fusión es:

$$\sigma_{aX}(E) = \frac{S(E)}{E}\, e^{-\frac{2\pi\alpha c Z_a Z_X}{v}}$$

El primer factor es el término nuclear y la exponencial da cuenta del efecto túnel. $S(E)$ es casi constante y vale unos 5,4 MeV · barn para $E = T_a \sim 10$ keV. En la práctica se suele utilizar la parametrización:

$$\boxed{\ln(E\sigma_{aX}) = A' - \frac{B'}{\sqrt{E}}} \qquad (14.11)$$

en donde los valores de las constantes A' y B' son bien conocidos experimentalmente. La observación de las curvas de la sección eficaz en función de la energía cinética, $E = T_d$ (véase la figura 14.6) permite concluir rápidamente que, en cualquier caso, la reacción D-T es la más favorable, ya que es la más probable a menor energía.

d) velocidad de reacción

El ritmo de producción de las reacciones de fusión viene dado por el valor medio del producto de la sección eficaz por la velocidad relativa blanco– proyectil $\langle\sigma v\rangle$ (por ejemplo, en el caso de la captura neutrónica este producto es constante, ya que $\sigma \sim 1/v$). Para calcularlo, se supone una distribución de velocidades de Maxwell (deducible de la distribución de energías de Boltzmann); en equilibrio térmico, la probabilidad de encontrar una partícula, de masa m, con una velocidad en el intervalo (v, $v + dv$) a una temperatura T, es:

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, e^{-mv^2/2kT} dv$$

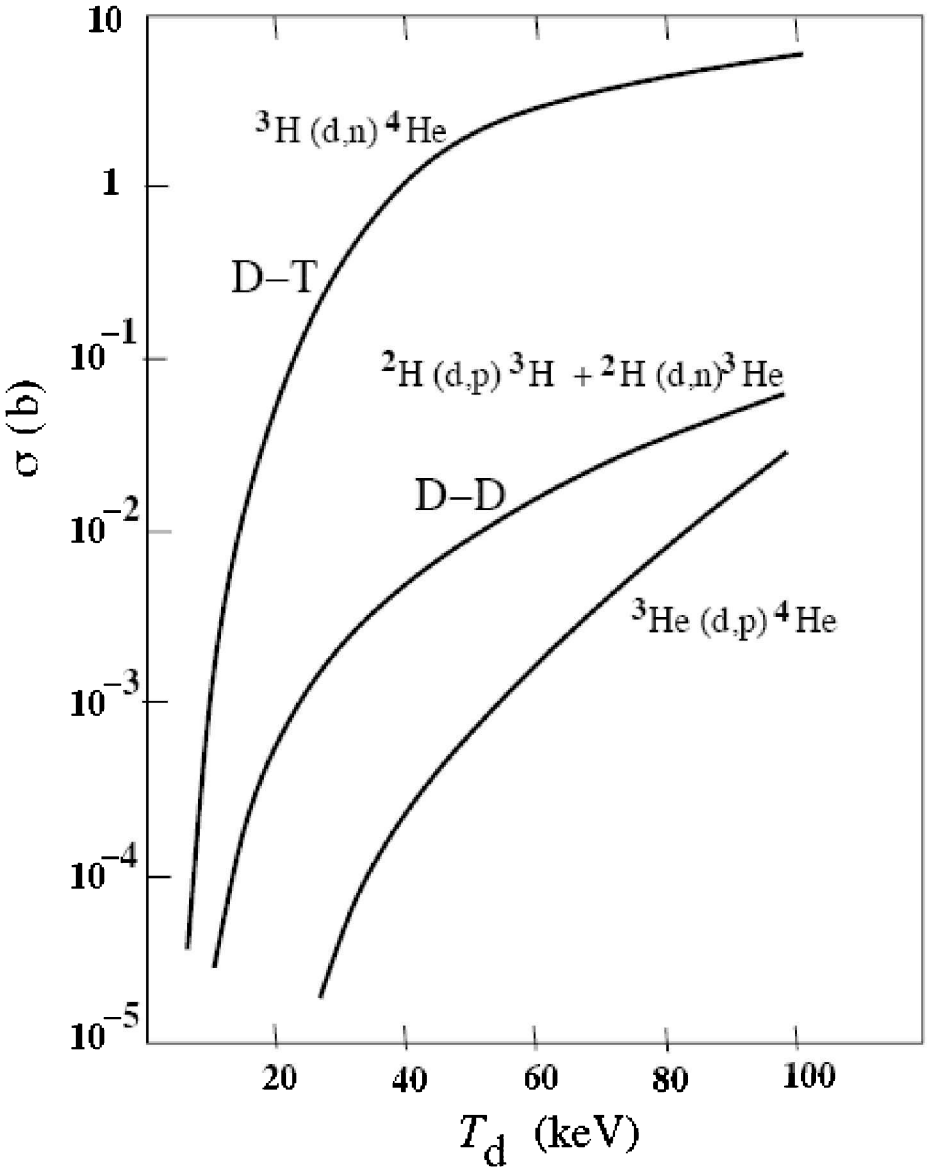


Figura 14.6: Sección eficaz de fusión para los procesos D-T y D-D en función de la energía del proyectil: el deuterón.

Para la fusión termonuclear, el valor medio de la velocidad de reacción:

$$\langle \sigma(v)v \rangle \propto \int_0^\infty \sigma(v) v e^{-mv^2/2kT} v^2 dv \qquad (14.12)$$

viene determinado por el crecimiento de la sección eficaz de fusión y la disminución de la distribución de Maxwell; el resultado de la convolución entre el espectro de Maxwell y la probabilidad de efecto túnel que aparece en el cálculo de la velocidad de reacción $< \sigma v >$ da un máximo para el valor de la energía, llamado pico de Gamow, E_G, visible en la figura 14.7 cuyo valor es:

$$E_G = E_B^{1/3}(kT/2)^{2/3} \qquad \text{con} \qquad E_B = 2(\pi Z_a Z_X \alpha)^2 \mu c^2$$

quedando:

$$\langle \sigma(v)v \rangle = 4(2\pi\mu)^{1/2}(kT)^{3/2} \int_0^\infty \sigma(E) e^{-E/kT} dE$$

y tras la integración:

$$\langle \sigma(v)v \rangle = \frac{4c}{kT}\left(\frac{2E_G}{3\mu c^2}\right)^{1/2} S(E_G) e^{-1.89(E_B/kT)^{1/3}} \qquad (14.13)$$

con lo que el ritmo de la reacción D-T a energías de 10 keV es de ~ 10^{-22}m^3/s. También se verifica que el valor óptimo del cociente $\frac{\langle \sigma(v)v \rangle}{kT}$ se sitúa entorno a los 10 ó 20 keV. En la figura 14.7 también se han representado la velocidad más probable, $v_p = \sqrt{2kT/m}$, la velocidad media, $v_m = \sqrt{8kT/\pi m}$, y la velocidad cuadrática media $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$.

Por lo tanto, de nuevo, se encuentra que la reacción D-T es ventajosa ya que tiene un ritmo mayor que las otras, si se compara dicho ritmo a las energías operacionales de los reactores de fusión termonuclear controlada previstos ($T \sim 10^8$ K o sea $E \sim 10$ keV): 10^{-22} m^3/s para D-T y 10^{-24} m^3/s para D-D.

La conclusión del estudio de las características de las reacciones de

fusión más interesantes para ser utilizadas en la fusión termonuclear conduce a seleccionar como la más eficiente a menor temperatura ($T \sim 10^7 - 10^8$ K equivalentes a $E \sim 1 - 10$ keV) a la reacción D-T.

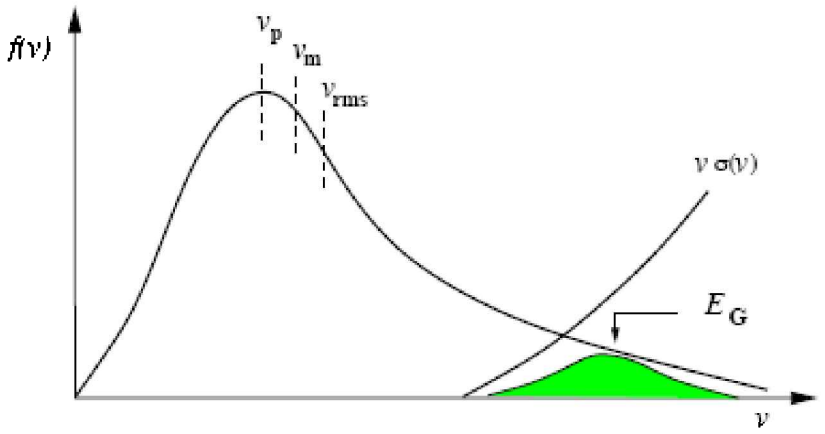


Figura 14.7: Distribución de velocidades de Maxwell de partículas con energía kT. Seobserva elpicode Gamow (E_G), resultado de la convolución con $< \sigma v >$.

14.5 Reactores de fusión

Desde 1945 se han propuesto varias ideas para utilizar la fusión como fuente de energía,

- por confinamiento magnético (1945, Alvarez, Fermi, Teller), utilizando imanes especiales para calentar y concentrar el plasma (*tokamak*);
- por confinamiento inercial: una pastilla de combustible (D y T) es bombardeada desde varias direcciones por láser y por partículas;
- y la llamada fusión fría, por catálisis de μ (1947, Frank, Andrei Sakharov)

Las dos primeras utilizan el confinamiento del plasma caliente de deuterio–tritio. En efecto, todo lo que se ha estudiado hasta ahora da la ventaja al proceso D-T:

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + n \quad (Q = 17,6\ \mathrm{MeV}) $$

éste es más favorable energéticamente, y además tiene la sección eficaz óptima alrededor de unos 10 ó 20 keV de energía cinética (véase la figura 14.6).

La fusión D-T no presenta problemas de abundancia de combustible. El deuterio se encuentra en el agua en una proporción 1/6500. El tritio es inestable ($t_{1/2}$ = 12,26 años) pero se obtiene fácilmente por bombardeo neutrónico del litio:

$$ \boxed{n + {}^{6}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H}} \qquad (14.14) $$

proceso exoenergético (Q = 4, 8 MeV) o también:

$$ n + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{n} \qquad (14.15) $$

proceso endoenergético (Q = −2, 47 MeV). Las abundancias relativas del litio son 7,4 % ($^{6}_{3}\mathrm{Li}$) y 92,6 % ($^{7}_{3}\mathrm{Li}$).

Los diseños de las centrales de fusión utilizan el calor producido por estas reacciones, que calientan el $^{6}_{3}\mathrm{Li}$ y una vez líquido, transfiriendo el calor a otro circuito secundario, generan vapor que puede mover turbinas. Además esta energía térmica, mantiene el plasma caliente. Todo ello, gracias a los neutrones de la reacción D-T (T_n = 14,1 MeV) que, además, sirven para fabricar el tritio necesario al reaccionar con el litio.

14.5.1 Reacción de fusión controlada. Criterio de Lawson

Para lograr la fusión termonuclear controlada y poder extraer energía es necesario traspasar el punto de *ignición*, es decir, aquél en el que la energía producida es igual a la que se necesita para mantener la reacción de fusión. Los requerimientos son:

- calentar el combustible (D+T) hasta temperaturas $T \sim 10^8\ K$ ($E \sim$ 10 keV),
- mantener una densidad elevada durante un tiempo suficiente.

Los productos de reacción a elevada temperatura se encuentran en estado de plasma. Esto es, a la temperatura de operación los átomos no están ligados. El problema es la pérdida de energía por *bremsstrahlung* de los e^- del plasma.

Se demuestra que la densidad de potencia radiada por *bremsstrahlung* es:

$$P_{br} = 0,5 \times 10^{-36} Z^2 n_+ n_e \sqrt{kT} \qquad \frac{W}{m^3}$$

siendo n_+ y n_e las densidades de iones y electrones y donde kT viene dado en keV. Se observa que los procesos D-T son ventajosos (véase la figura 14.8) ya que la densidad de potencia emitida por la fusión supera rápidamente las pérdidas por *bremsstrahlung* (a partir de $T \sim 4$ keV para D-T y ~ 40 keV para D-D).

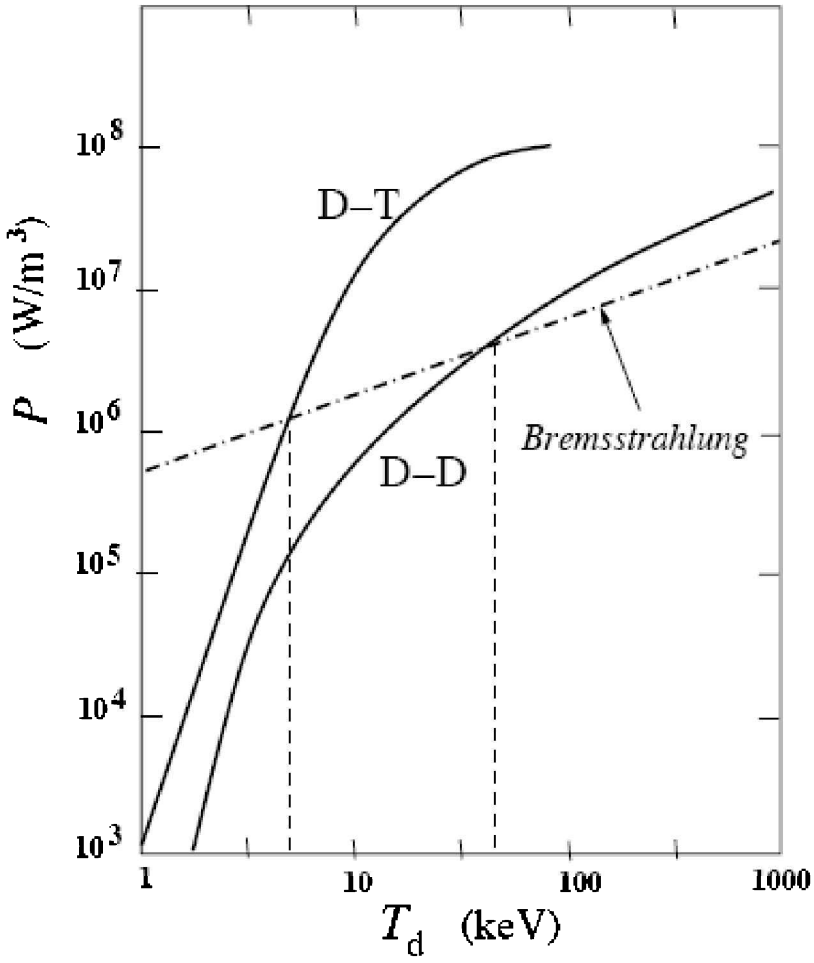


Figura 14.8: Comparación de las pérdidas por *bremstrahlung* con la potencia emitida en las reacciones D-T y D-D, suponiendo una densidad de iones de 10^{21}/m^3, en función de la temperatura. La reacción D-T supera las pérdidas por *bremsstrahlung* a demenor temperatura que la reacción D-D.

El criterio de Lawson da la condición mínima para que la energía emitida en la fusión supere las pérdidas por radiación y las del calentamiento del plasma. Sea τ el tiempo de confinamiento del plasma, y n la densidad atómica ($n_D \sim n_T \sim n/2$), que es igual a la densidad electrónica n_e. La energía producida por unidad de volumen en la fusión en el plasma será:

$$E_f = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle Q \tau$$

siendo, en el caso D-T, Q = 17, 6 MeV y la velocidad de reacción $\langle \sigma v \rangle$ = 10^{-22} m^3/s, a la temperatura habitual de 10 keV.

La energía térmica necesaria para calentar iones y electrones a la temperatura T es sencillamente $E_T = 3nkT$ (la mitad iones y la mitad electrones). Habrá producción de energía si $E_f > E_T$; o sea:

$$\boxed{n\tau > \frac{12kT}{\langle \sigma v \rangle Q}} \qquad (14.16)$$

es decir $n\tau > 10^{20}$ s/m^3, si la temperatura es de 10 keV. Ahora bien, para producir energía eléctrica hay que tener en cuenta el rendimiento en la transformación de energía térmica (nuclear) a la eléctrica, η, que suele valer ~ 30 % con lo que:

$$n\tau > \left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{12kT}{\langle \sigma v \rangle Q}$$

El criterio de Lawson ha sido ya alcanzado por las instalaciones experimentales (*tokamak*) de fusión. Todavía es pronto para diseñar un reactor capaz de producir energía industrialmente. Vistas las ventajas de la fusión frente a la fisión, se dispone de una fuente de energía no contaminante, y sin problemas de combustible, para el futuro.

Las instalaciones experimentales de fusión termonuclear por confinamiento magnético *tokamak* (del acrónimo en ruso) son grandes toros en cuyo interior se hace el vacío; los iones de deuterio y tritio llegan al estado de plasma por calientamiento (por ejemplo por intensas corrientes eléctricas) y se confina con dos fuertes campos magnéticos; uno toroidal y otro poloidal. Los iones y electrones del plasma, describen una hélice alrededor del eje del toro. Mantener este plasma a la temperatura de 10^8K, representa un reto tecnológico y un desafío para la

selección de los materiales de la instalación. Por eso la construcción de una central de fusión es mucho más compleja que la de una central de fisión.

Tres proyectos de tokamak, iniciados a mitad de los años 1980, han alcanzado las prestaciones nominales del diseño; el TFTR (*Tokamak Fusion Test Reactor*, Princeton, EEUU), el JT–60 (Jaeri Tokamak, Japón) y Europa desarrolló el proyecto JET (Culham, Reino Unido). Estos dos últimos han conseguido alcanzar el criterio de Lawson. Ahora se está negociando el proyecto más ambicioso concebido hasta hoy: el ITER, promovido por todas las potencias mundiales. Su concepción prevé una potencia de 1,5 GW y mantener el confinamiento del plasma (de 2000 m^3) durante 1000 segundos.

14.6 Problemas

14.1 Calor de reacción en reacciones de fusión

a) Calcular el valor Q para las siguientes reacciones de fusión:

- $^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n$
- $^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + p$
- $^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n$
- $^2H + {}^3He \rightarrow {}^4He + p$
- $^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma$

b) Estimar las energías de los estados finales para todas estas reacciones si la energía cinética de las partículas incidentes puede despreciarse con respecto al valor Q del proceso.

c) Calcular la energía necesaria así como la temperatura equivalente para acercar dos núcleos de deuterio a una distancia de $r = 1{,}4 \times 10^{-13}$ cm.

Datos: $M(^2H) = 2{,}014102$ u, $M(^3H) = 3{,}016049$ u, $M(^3He) = 3{,}016029$ u, $M(^4He) = 4{,}002603$ u, $m_n = 939{,}6$ MeV/c^2.

14.2 Reacciones de fusión y criterio de Lawson

a) En la reacción D–T, $^{3}H(^{2}H, n)^{4}He$, la energía que se libera por cada fusión es de Q = 17,6 MeV. Si se supone que toda la energía es aprovechable calcular la cantidad de deuterio y tritio así como su frecuencia de consumo para conseguir una potencia de 1 MW. Tomar para la densidad del plasma el valor $n = 7 \times 10^{18}$ m^{-3} con la misma cantidad de deuterio ytritio.

b) Suponer que el reactor anterior de fusión puede operar a energías de los iones y electrones del plasma de 1 keV, 10 keV y 20 keV. Calcular el tiempo de confinamiento necesario para que se cumpla el criterio de Lawson.

c) Repetir el cálculo anterior a 10 keV para el caso de la reacción D–D correspondiente a $^{2}H(^{2}H, ^{1}H)^{3}H$. Obtener la temperatura a la que se debería calentar el plasma para obtener el mismo resultado que en el apartado anterior.

14.3 Sección eficaz de fusión

La sección eficaz para una reacción de partículas cargadas a bajas energías puede parametrizarse en la forma:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} S(E) e^{-G(E)}$$

donde la exponencial representa la probabilidad de transmisión por efecto túnel y $S(E)$ una función que tiende a un valor constante para $E \rightarrow 0$ y que depende del tipo de reacción. Se pide:

a) Deducir la expresión anterior para $\sigma(E)$ a partir de la fórmula de Breit– Wigner en la región a bajas energías en la cola del pico de la resonancia.

b) Teniendo en cuenta el comportamiento de la sección eficaz anterior calcular el cociente de las secciones eficaces de fusión D–D a 20 keV y 100 keV. Hacer lo mismo para las secciones

eficaces de fusión D–T.

14.4 Plasmas de fusión

Calcular **a)** la temperatura necesaria para vencer la barrera Coulombiana y **b)** la energía de fusión liberada en un plasma de ^{10}B, ^{12}C, ^{14}N, ^{16}O y ^{24}Mg.

14.5 Reacciones de fusión termonucleares en el Sol La energía liberada en el interior del Soles consecuencia de un proceso de reacciones de fusión termonucleares que transcurren, principalmente, a traves de los denominados ciclos PP (ciclo protón–protón) y CNO (ciclo del carbono). En los dos casos, el resultado neto es la fusión de cuatro núcleos de hidrógeno en un núcleo de helio según el proceso:

$$4\,^{1}H \rightarrow {}^{4}He + 2e^{+} + 2\nu_e + \gamma$$

a) Calcular la energía total liberada en la formación de cada núcleo de ^{4}He.

b) Si la mayor parte de todos los neutrinos formados provienen del proceso pp:

$$^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu_e$$

calcular el rango de energías de los neutrinos emitidos si se supone que los protones iniciales tienen energías cinéticas despreciables.

c) Estimar el tiempo que tarda la radiación electromagnética así como los neutrinos emitidos en el interior del Sol en alcanzar su superficie. Emplear para ello la aproximación del camino aleatorio (*random walk*)en el caso de los fotones, cuyo recorrido libre medio es de $\lambda = 10^{-3}$ m.

d) Si la irradiancia solar promedio en la Tierra es de 1,4 kWm^{-2} y la energía promedio que se lleva un neutrino en el proceso pp

es de 0,3 MeV, calcular el número de núcleos de ^{4}He formados por unidad de tiempo así como el flujo de neutrinos solares en la Tierra. ¿Cómo resulta la variación del flujo a lo largo del año?

Datos: 1 UA (Unidad Astronómica)= 1,49598 × 10^{11} m, Afelio terrestre: 1,017 UA, Perihelio terrestre: 0,984 UA. Radio solar: $R_\odot$ = 6,96×10^8m.

14.6 Vida media del Sol

Si se supone que la masa del Sol ($M_\odot$ = 2 × 10^{30}kg) estaba original-mente compuesta de un 71 % de hidrógeno en peso y que la generación de energía ha permanecido constante durante 5 × 10^9 años al ritmo actual de 4 × 10^{26} W mediante la conversión de hidrógeno en helio, estimar el tiempo que le queda de vida al Sol.

Tabla 14.1: Flujos, rango de energías y energía promedio para los diferentes tipos de neutrinos solares producidos en la cadena PP.

Proceso	ϕ (cm^{-2}s^{-1})	E (MeV)	$\langle E \rangle$ (MeV)
$p + p \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e$	$6{,}0 \times 10^{10}$	$\leq 0{,}42$	0.263
${}^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu_e$	4.9×10^9	0.86 (90 %) 0.38 (10 %)	0.8
${}^8B \rightarrow {}^8Be^* + e^+ + \nu_e$	5.7×10^6	≤ 15	7.2
${}^3He + p \rightarrow {}^4He + e^+ + \nu_e$	8×10^3	$\leq 18{,}77$	10

14.7 Luminosidad de neutrinos solares

A partir de los datos sobre los diferentes tipos de neutrinos solares del ciclo PP que se dan en la tabla 14.1 calcular:

a) La fracción de cada uno de los subciclos que dan lugar a un núcleo de ^{4}He.

b) La luminosidad total de neutrinos provenientes del Sol en la

Tierra.

14.8 Detección de neutrinos solares

a) Calcular la energía mínima umbral del neutrino para que se puedan producir procesos de captura de neutrinos por parte de los núcleos: ^{37}Cl, ^{71}Ga, ^{7}Li, ^{205}Tl e ^{115}In. Comentart ambién el uso de detectores basados en los procesos anteriores para observar los distintos tipos de neutrinos solares procedentesson producidos en un de los ciclos PP y CNO (cadena del carbono).

b) En el experimento en la mina de Homestake de R. Davis se utiliza ^{37}Cl para detectar los neutrinos de la fusión solar mediante el uso de un detector formado por $3{,}79 \times 10^5$ litros de C_2Cl_4. Si se sabe que el flujo de neutrinos es de $6 \times 10^{10}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, que sólo un 0,1% de ellos pueden ser detectados y que la sección eficaz de absorción de neutrinos por parte del cloro ^{37}Cl es de 10^{-43}cm^2, calcular la frecuencia de producción de ^{37}Ar en el detector. ¿Cuántos átomos de ^{37}Ar son producidos en un mes?

c) Al cabo de un mes de exposición el argón producido en el detector es extraído por métodos químicos y su frecuencia de desintegración es medida con un contador proporcional gracias a la emisión de los electrones Auger de 2,8 keV que se emiten tras la captura electrónica. El resultado es de 2,6 SNU (*Solar Neutrino Unit*, 1 SNU = 10^{-36} capturas de neutrinos por unidad de tiempo y porátomo de blanco). Comparar este resultado con el valor esperado y extraer conclusiones. Suponer que al comenzar la exposición la cantidad de argón en el detector es nula.

Datos: $\rho(C_2Cl_4) = 1{,}623\ \text{g/cm}^3$. Peso molecular del C_2Cl_4: 164 g/mol. Abundancia isotópica del ^{37}Cl: 25 %. $t_{1/2}(^{37}\text{Ar}) = 35$ d.

---

[1]El parsec (del inglés *parallax second*), corresponde a la distancia desde la cual una unidad astronómica (UA = $1{,}49598 \times 10^{11}$ m, distancia del eje mayor Tierra–Sol) subtiende un ángulo de un segundo de arco (paralaje) perpendicularmente a

la línea de observación. Su valor es pc = 3,262 años luz.

[2] Por ello, J. Mather y G. F. Smoot recibieron el Premio Nobel de Física en el año 2006.

[3] en efecto, la sección eficaz de la interacción débil de fusión p + p es $\sigma \sim (G_F/(\hbar c)^3)^2(\hbar c)^2 E^2$, con $E = Q$.

[4]Se utiliza E para la energía cinética, con el objeto de no confundir con T, temperatura.

Parte V

Física de partículas

15. Constituyentes de la materia: introducción y generalidades

15.1 Introducción

La física de partículas (denominada también física de altas energías o física subnuclear) es la disciplina científica que tiene por objetivo determinar cuáles son los constituyentes básicos o elementales de la materia y las propiedades de las fuerzas que intervienen en sus interacciones.

En losúltimos 25 años del siglo XX, el progreso del conocimiento sobre las propiedades de los constituyentes fundamentales de la materia y sus fuerzas dio lugar al *modelo estándar* de la física de partículas (exceptuando la gravitación, que tiene poca influencia en el mundo de las partículas). Este modelo es la referencia que se tomaráalo largo deestas notas. Este modelo se basa en la existencia de doce fermiones constituyentes elementales de la materia; seis quarks y seis leptones, que interaccionan a través de tres fuerzas fundamentales representadas por sus correspondientes bosones. También se ha probado la existencia de los doce antifermiones fundamentales.

Las partículas elementales han ocupado durante mucho tiempo el papel preponderante de los estudios de la física de altas energías, y lo siguen ocupando, aunque el rol de lo que se ha venido denominando partícula elemental ha sido siempre más amplio que la propia definición.

La denominación de física de altas energías proviene de dos

conceptos:

a) por el hecho de que hay partículas fundamentales, como el bosón Z^0, cuya masa es elevadísima, M_Z = 91,1876 GeV/c^2, casi 100 veces la masa del protón. La equivalencia entre masa y energía ($E = mc^2$) implica que para producir estas partículas es necesaria mucha energía, o sea, hay que provocar colisiones a alta energía;

b) por la dualidad onda-corpúsculo, que postula que toda partícula de momento p tiene una longitud de onda asociada $\lambda = h/p$. Para explorar lo infinitamente pequeño (longitud de onda pequeña), es necesario disponer de proyectiles de alta energía.

Para cimentar los conceptos contenidos en el modelo estándar hay que remontarse a principios del siglo XX, cuando aparecen las nuevas ideas con las que se intenta explicar elátomo y sus propiedades. Dos grandes revoluciones conceptuales tienen lugar en la física, entre 1920 y 1930, que inciden directamente en la física de partículas: las teorías de la *relatividad* y la *mecánica cuántica*.

La consecuencia más conocida de la teoría de la relatividad es que ningún objeto puede desplazarse a una velocidad superior a la de la luz en el vacío:

$$c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

es decir, una velocidad cercana a los 300.000 km/s. Otra consecuencia es que la masa no se conserva; puede crearse o destruirse. Eso sí, la energía siempre se conserva. Para ello, hay que incorporar la masa como una nueva forma de energía. Es bien conocida la relación entre la masa, m, de una partícula y la energía asociada, dada por la fórmula de Einstein:

$$\boxed{E = mc^2} \qquad (15.1)$$

En realidad la fórmula de Einstein es $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$, de forma que, cuando la partícula está en reposo, entonces su momento es $p = 0$ ysólo queda el término de masa que aparece en la famosa ecuación (15.1).

La relatividad obliga a reconsiderar las nociones de espacio y tiempo absolutos e idénticos para todos los observadores, inicialmente formuladas por Isaac Newton. Esta concepción, aproximadamente válida en lo cotidiano, es inaplicable a entes que se desplacen a grandes velocidades ya que tanto el espacio como el tiempo son relativos al sistema de observación. Son conceptos tanto más diferentes cuanto la velocidad relativa de los sistemas de referencia sea más cercana a c.

La mecánica cuántica por su parte introduce muchos conceptos revolucionarios que se aplican al mundo atómico y subatómico. Un concepto macroscópico, el determinismo clásico, queda relegado en el microcosmos por el principio de incertidumbre, que relaciona las incertidumbres de dos magnitudes conjugadas; por ejemplo, si σ_x y σ_p son las incertidumbres de medida de la posición y el momento x y p se puede demostrar la conocida expresión de Heisenberg:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$$

que postula la imposibilidad de conocer simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula (por ejemplo, del electrón en el átomo) y en la que interviene la constante de Planck:

$$h = 2\pi\hbar = 6,\,626076 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

cuyo valor numérico es tan pequeño que sólo tiene consecuencias importantes en el mundo atómico y subatómico.

De especial relevancia es la relación de De Broglie:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \qquad (15.2)$$

que da la longitud de onda λ asociada a una partícula cuyo momento es p. Justifica, como ya se ha visto, la conexión existente entre la física de altas energías y el estudio de los constituyentes básicos de la materia. Al aumentar la energía de un proyectil, disminuye linealmente el tamaño mínimo de la estructura analizable por la onda asociada a dicha partícula. Se amplía así el comportamiento dual (onda y corpúsculo) de la radiación a la materia.

Si el primer tercio del siglo XX vió el nacimiento y desarrollo de la relatividad y la mecánica cuántica, es en el último tercio de ese siglo cuando se desarrolla el Modelo Estándar de Partículas e Interacciones, que es una teoría cuántica de campos relativista que explica casi la totalidad de los fenómenos entre constituyentes elementales de la materia (fermiones de dos tipos: quarks y leptones) debidos a las fuerzas propagadas por partículas fundamentales (bosones de tres tipos, uno para cada tipo de interacción: a) el fotón γ, cuanto de la electrodinámica; b) los bosones de la interacción débil, $W^{\pm}$, Z y c) los 8 gluones de la interacción fuerte entre quarks). El Modelo Estándar requiere que las interacciones cumplan principios de simetría, como la invariancia *gauge*, que exige que los bosones fundamentales tengan masa nula, si bien experimentalmente se ha encontrado que los bosones $W^{\pm}$ y Z, son masivos. Afortunadamente, este desacuerdo se resuelve teóricamente gracias al denominado mecanismo de Brout-Englert-Higgs, de rotura espontánea de la simetría electrodébil que, propuesto en 1964, predice la existencia de un campo escalar que permea todo el espacio y corresponde a una partícula que se llama bosón de Higgs. Esta parte de la teoría de las partículas es un bonito ejemplo de unificación de las fuerzas del electromagnetismo y las de la interacción débil, englobadas en la llamada teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam.

Es evidente que la física nuclear y de partículas se ha desarrollado, espectacularmente, en losúltimos 100 años. Y no sólo por la elaboración del Modelo Estándar sino también por el progreso de la física experimental. Esta ha evolucionado siguiendo la metodología instaurada por Lord Rutherford basada en el uso de fuentes y detectores de

partículas, utilizados para provocar choques entre partículas y escrutar a continuación sus propiedades. En el primer tercio del siglo XX, fueron las *fuentes radiactivas* las que permitieron trabajar con las primeras partículas (los rayos alfa, beta y gamma) e incluso llevaron a Lord Rutherford a descubrir el núcleo atómico en 1911. Un año después fue el año del descubrimiento de la *radiación cósmica* por V. Hess,[1] que abrió las puertasa nuevos descubrimientos célebres como el positrón (la antipartícula del electrón), en 1932, o el pión de Yukawa, en 1947, que puede tomarse como el nacimiento de la física de partículas. También se descubrieron el muón y otras partículas bautizadas con el nombre de *extrañas* porque siempre aparecían emparejadas. La radiación cósmica permitió estos nuevos descubrimientos porque los rayos cósmicos pueden tener altas energías. Sin embargo es gracias al desarrollo de los *aceleradores de partículas* que se han ido verificando con mucha precisión las predicciones del Modelo Estándar. En efecto, al final de la segunda guerra mundial una revolución tecnológica (el radar) impulsó el desarrollo de los aceleradores que se convirtieron en la más potente fuente artificial de partículas; así, tras el impulso inicial impartido por el propio Lord Rutherford, los aceleradores de partículas, que fueron pensados para escrutar el interior de los núcleos, permitieron fabricar en el laboratorio numerosas nuevas partículas, gracias a las reacciones entre partículas aceleradas y los blancos de materia. Con ellos, en pocas décadas, se logró un considerable avance en la comprensión de las propiedades de la materia. Paralelamente, con la llegada de los aceleradores ha habido una explosión de instrumentos de mucha precisión (cámaras de chispas, cámaras de burbujas y espectrómetros electrónicos que han llegado a alcanzar tamaños gigantescos (el tamaño de ATLAS es equivalente al de un edificio de cinco plantas). Otras fuentes muy importantes de partículas son las fuentes de neutrinos, que pueden generarse en aceleradores (el proyecto CNGS del CERN al Gran Sasso o el haz de Fermilab a SUDAN). También, la construcción de potentes *reactores nucleares* de fisión, han ofrecido a los físicos de partículas una fuente artificial de neutrinos de incalculable utilidad para

el estudio de la física de neutrinos. Junto con la fuente natural de neutrinos procedentes del Sol y de las interacciones de la radiación cósmica en la atmósfera han ampliado considerablemente el conocimiento actual sobre los neutrinos. El desarrollo de las computadoras ha sido un utensilio fundamental para el análisis de las complejas reacciones a altas energías.

Es conveniente pues recordar que, en el año 1997 se celebróel centenario del descubrimiento del electrón, puesto de manifiesto en los trabajos en los tubos de rayos catódicos llevados a cabo por J. J. Thomson. También se celebró el cincuentenario del descubrimiento del pión en los rayos cósmicos. A mitad del siglo XX eran conocidas unas pocas partículas: el electrón, el protón, el neutrón y el neutrino junto con el cuanto del campo electromagnético, el fotón. Lo curioso es que la materia que nos rodea puede explicarse prácticamente con estas partículas. Sin embargo, el estudio de las propiedades de la fuerza nuclear entre protones y neutrones, así como la búsqueda de nuevas partículas inestables que se producen en las reacciones de los rayos cósmicos, dieron lugar al descubrimiento de centenares de partículas inestables que sembraron la duda sobre el concepto de partícula elemental.

En esta impresionante carrera en búsqueda de lo desconocido, entre los conceptos más originales cabe citar el del modelo de quarks constituyentes de los hadrones.[2] Fue realmente espectacular, el gran número de descubrimientos de los años 1970, debidos sobre todo a los colisionadores de partículas,último eslabón del desarrollo de los aceleradores. Se descubren nuevos quarks, confirmando las especulaciones lógicas y abstractas sobre los constituyentes fundamentales de la materia. En 1983, se detectan por primera vez los bosones intermediarios de la interacción electrodébil, partículas llamadas $W^{\pm}$ y Z^{0}, en el CERN (Ginebra). En los años 1990 se culmina otra etapa muy fructífera en la que se confirma la existencia de sólo tres familias de neutrinos en el LEP (colisionador $e^{+}e^{-}$) del CERN y en la que se descubre el sexto y último de los quarks en el Tevatrón de Fermilab

(Chicago, EEUU), el quark *top*. Al mismo tiempo se confirman numerosas predicciones del modelo estándar de las partículas.

Por fin, el bosón de Higgs se descubrióen el CERN en 2012, en los experimentos ATLAS y CMS instalados en el colisionador LHC, es decir, casi 50 años después de los trabajos de Brout-Englert-Higgs, que previeron su existencia. Se puede afirmar que la última pieza faltante del Modelo Estándar ha sido felizmente encontrada.

Este conjunto de descubrimientos han completado nuestro conocimiento sobre las propiedades de la materia al igual que hicieron las teorías de los años 1920 y 1930.

En lo que sigue, se procederá en primer lugar a dar un breve repaso de la evolución histórica de los descubrimientos más relevantes de esta disciplina, fruto del progreso del conocimiento acumulado en sólo un siglo. En otros capítulos del texto se presentan muchos de los conceptos y se introducen las técnicas y la instrumentación utilizada tanto en física nuclear como en física de partículas.

15.2 Del e^- al Higgs. Los descubrimientos de partículas

La mayoría de los grandes descubrimientos descritos en esta sección, han sido reconocidos con el Premio Nobel de Física. Es curioso que muchos de los científicos que han hecho descubrimientos relacionados con la radiactividad hayan sido premiados con el Nobel de Química, como Lord Rutherford (1908), Marie Curie (1911), F. Soddy (1921), los esposos Joliot-Curie (1935), O. Hahn (1944) y W. Libby (1960). Por el contrario, sólo un premio Nobel de Física ha sido otorgado al descubrimiento de la radiactividad en 1903 a H. Becquerel y los esposos Marie y Pierre Curie.

En la Sección C.2 del Apéndice C se encuentra una lista de todos los premios Nobel de Física concedidos en trabajos y descubrimientos relacionados con la Física Nuclear y de Partículas.

Se puede ver que en la lista de premios Nobel de Física, aparecen

también las contribuciones teóricas que han permitido la propuesta y verificación del Modelo Estándar de las Partículas y sus Interacciones.

15.2.1 Las tres primeras partículas (antes del neutrón)

A finales del siglo XIX ya se hablaba, utilizando para ello un lenguaje ondulatorio, de tres tipos de rayos:

- canales (+), los conocidos iones positivos, medidos originalmente por W. Wien,
- catódicos (−), es decir los electrones,
- luminosos (γ), con las mismas propiedades que los rayos X.Éstos fueron descubiertos en 1895 por W. C. Röntgen (el primer premio Nobel de Física en 1901).

El electrón es uno de los primeros corpúsculos, identificado por primera vez por J. J. Thomson,[3] en 1897, precisamente un año después del descubrimiento de la radiactividad (así llamada por la propiedad que tenía el radio de emitir ciertas radiaciones) por el físico francés H. Becquerel. A partir de entonces, nace una nueva denominación de las partículas utilizando también la denominación ondulatoria de rayos y que aún perdura hoy:

- α, posteriormente identificados como núcleos de helio,
- β, los electrones, y
- γ, los fotones.

El experimento de Thomson de medida de la carga del electrón fue realizado con un tubo de rayos catódicos. Thomson utilizó un tubo de vacío en el que montó un campo eléctrico de intensidad ε y un campo

magnético *B*. Anteriormente, el físico francés J. Perrin demostró, utilizando un campo eléctrico, que las partículas emitidas (por efecto térmico) en el cátodo de un tubo de rayos catódicos tenían carga negativa. Midió la posición del impacto de los electrones después de atravesar los campos eléctrico y magnético, en una pantalla de sulfuro de zinc (*SZn*). El principio de funcionamiento del experimento de Thomson es el siguiente. Sea un haz de electrones con dirección perpendicular a un campo eléctrico y magnético, conocidos y perpendiculares entre sí, tal como puede verse en la figura 15.1. Supóngase que la deflexión de los electrones es nula. Como consecuencia, el efecto combinado de $\mathcal{E}$ y *B* permite determinar la velocidad de los electrones. En efecto, se cumple que $F_e = -F_m$, las fuerzas eléctrica y magnética son opuestas, con lo que:

$$q_e\vec{\mathcal{E}} = q_e\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$$

o sea, $v = \mathcal{E}/B$.

Para acelerar los electrones hasta la velocidad *v*, se establece un potencial exterior *V*. La conservación de la energía toma ahora la forma:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q_e V$$

quedando para el cociente

$$\frac{m}{|q_e|} = 2V\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}}\right)^2 \qquad (15.3)$$

La medida realizada por J. J. Thomson no fue muy precisa. Los valores que encontró iban de 1,1 a 1,5 × 10^{-11} kg/C. El valor aceptado hoy es:

$$\frac{m}{|q_e|} = 0{,}568 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg/C}.$$

Eléxito del experimento fue debido a la calidad del vacío conseguido en el interior del tubo de rayos catódicos (unos 10^{-3} mm de Hg). Posteriormente, el propio Thomson, utilizando un dispositivo de condensación ideado por uno de sus alumnos, C. T. R. Wilson, midió la carga del electrón, obteniendo: $|q_e| = 3{,}4 \times 10^{-10}$ esu.

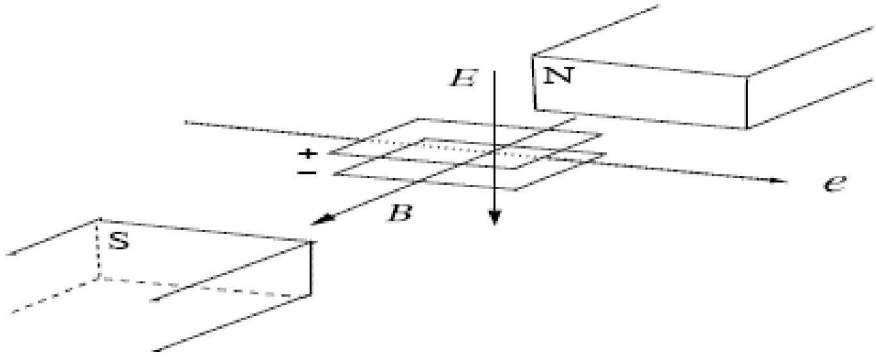


Figura 15.1: Esquema del experimento de Thomson, con los campos ε y B implementados en el interior de un tubo de rayos catódicos en el que se había producido un vacío muy elevado.

También fue Thomson, en 1907, siguiendo los trabajos de Wien sobre rayos canales, quién determinó la carga y masa del protón. Gracias al norteamericano R. Millikan fue perfeccionado el método de medida de la carga del electrón. Hoy se sabe que la carga del electrón en valor absoluto es:

$$|e| = 4{,}803 \times 10^{-10} \text{ esu} = 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

tomándose, por convenio, como una carga negativa; o sea, $q_e = -e$.

Las cargas eléctricas del electrón y del protón son iguales y opuestas. Sus masas son muy diferentes:

$$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0{,}511 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = 1{,}672 \times 10^{-27} \quad 938{,}279 \text{ MeV}/c^2$$

kg =

Así puesse tiene $q_e = -q_p$ y el cociente $m_p/m_e = 1836{,}16$.

En física nuclear se utiliza la unidad de masa atómica, u = M(^{12}C)/12, que toma como referencia la masa del ^{12}C. Se obtiene para esta unidad el valor u = 931,494 MeV/c^2, con ello, la masa del protón vale m_p = 1,00727647 u.

Además del electrón y del protón, otra partícula era conocida a principios del siglo XX: el fotón. La evidencia experimental de la existencia del fotón se debe al físico alemán H. Hertz, quien entre 1886 y 1887 verificóla teoría unificadora del electromagnetismo de James C. Maxwell graciasa un experimento en el que, al incidir luz UV entre dos electrodos, logró la des carga eléctrica entre ellos. Pero fue a través del efecto fotoeléctrico (explicado por Einstein en 1905, y del efecto Compton (1923) cuando quedó clara la existencia del fotón como corpúsculo de masa nula.

15.2.2 Del neutrón al pión

Hasta 1932 sólo se conocían, pues, tres partículas elementales:

$$\boxed{e^-,\ p,\ \gamma}$$

las dos primeras bastaron para edificar la primera idea atómica, de Rutherford y Bohr, que se completaron después del experimento de Rutherford de difusión de las partículas α del radio por una lámina de oro, con el que se puso de manifiesto la existencia del núcleo atómico (véase la figura 15.2).

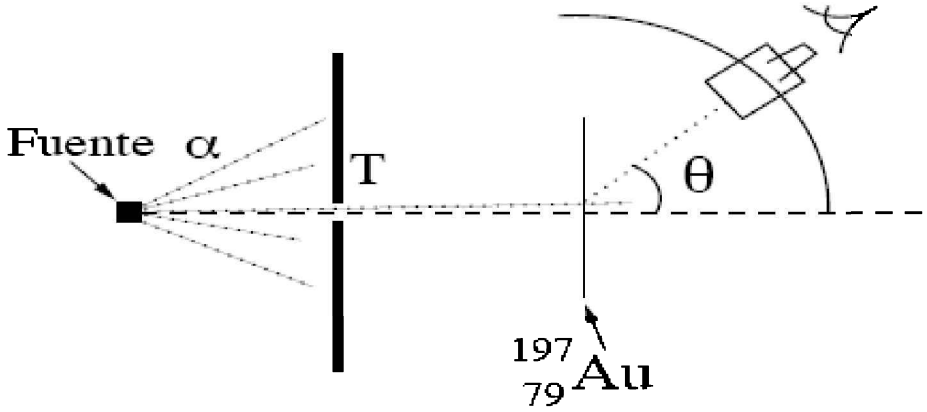


Figura 15.2: El esquema del detector (que recibía el curioso nombre de *spinthariscope* de Crookes, inventado en el año 1903) utilizado en el experimento de Rutherford por Geiger y Marsden en el que se descubrió el núcleo atómico.

En 1932 James Chadwick[4] descubrió el neutrón (n), al explicar la reacción nuclear $\alpha + {}^{9}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \mathrm{n}$ apareciendo así la primera versión razonable del modelo nuclear. Ese año puede considerarse como el del nacimiento de la física nuclear moderna. El mismo año 1932, C. Anderson,[5] discípulo de Millikan, descubrió el positrón, antipartícula del electrón cuya importancia es notoria ya que confirmó la predicción de la ecuación relativista de Dirac, propuesta en 1928. La figura 15.3 muestra la fotografía del paso de un positrón a través de una *cámara de niebla*, un detector de trazas que fue inventado por C. T. R. Wilson inserta en un campo magnético. El mismo Anderson y Neddermeyer[6] obtuvieron la primera evidencia del muón (μ) pocos años después (en 1937).

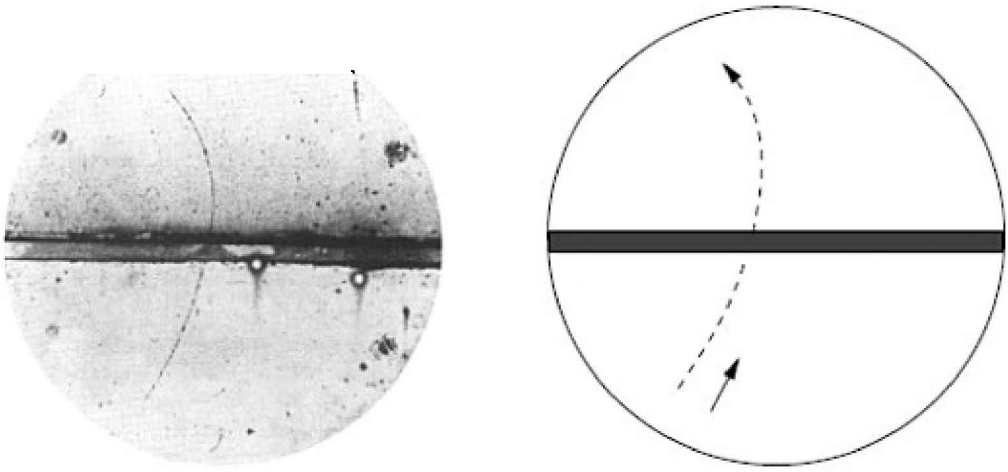


Figura 15.3: **a)** Fotografía del paso de uno de los primeros positrones a través de una cámara de niebla que fue el detector utilizado por C. Anderson para estudiar la radiación cósmica. La placa central es de plomo. El positrón, que entra por debajo, es frenado al atravesar dicha placa. La curvatura es debida a que la cámara estaba en el seno de un campo magnético y es menor después de atravesar la placa de plomo. **b)** Esquema del suceso fotografiado.

En estos años 1930, estos descubrimientos cruciales, teniendo en cuenta los avances conceptuales teóricos, lograron una comprensión tan grande de los fenómenos subatómicos que el respetado premio Nobel de Física H. Bethe recuerda el calificativo de *los felices años 30* que le daban a pesar de las tormentas sociales de la época.

Hay que esperar hasta el año 1947 para que se resuelva otro nuevo e importante descubrimiento: el del pión (π) de H. Yukawa. Fue efectivamente predicho por el físico japonés H. Yukawa en 1935 para explicar la fuerza de cohesión nuclear a través del intercambio de una partícula de masa cercana a los 100 MeV/c^2, partícula de masa intermedia (origen de la palabra *mesón*), que supuso un enorme salto para el entendimiento de la fuerza nuclear. El pión fue descubierto, gracias a las reacciones de las partículas de la radiación cósmica (mayoritariamente protones) con los núcleos de la atmósfera, por Cecil F.

Powell, Lattes, Muirhead y Occhiallini en 1947, utilizando emulsiones fotonucleares instaladas en un laboratorio a gran altura (5500 m), en Chacaltaya, Bolivia, en la cordillera de los Andes. Se tardó un cierto tiempo en verificar que el pión se desintegra dando un muón, con lo que quedó aclarada la confusión inicial que existió entre el muón, μ (un leptón) y el pión, π (un hadrón), en un experimento crucial realizado por M. Conversi, E. Pancini y O. Piccioni en Roma en 1947.[7] O sea, lo que se descubrió es, simplemente:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad \text{seguido de} \qquad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$$

y lo mismo para π^-, cuidando que el tipo de neutrino sea el correcto. Cuatro fotos de desintegración del pión pueden verse en la figura 15.4.

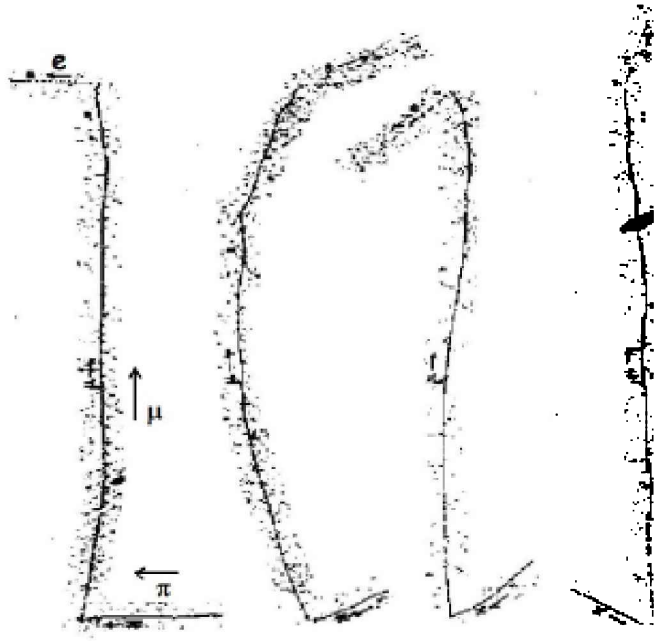


Figura 15.4: Fotogramas de cuatro trayectorias de desintegraciones del pión en emulsiones fotográficas. En la de la izquierda, se observa la secuencia $\pi \rightarrow \mu \rightarrow$ e.

Los experimentos con cámaras de Wilson instaladas en laboratorios

situados a gran altura, para detectar reacciones con rayos cósmicos continuaron y se descubrieron así una nueva serie de partículas bautizadas con el nombre de *extrañas*, porque se producían a pares, lo que originó un nuevo número cuántico; la extrañeza. Los trabajos del grupo de Leprince-Ringuet en Francia, en el laboratorio situado en el *Pic du Midi*, en los Pirineos y poco antes en Chamonix, en los Alpes, descubrieron entre 1943 y 1950 muchos mesones e hiperones extraños. También en inglaterra, en 1947, Rochester y Butler confirmaron la existencia de mesones extraños neutros (K^0) e hiperones neutros (Λ^0).

Un nuevo paso se dio con el experimento de Reines y Cowan en el que por primera vez identificaron reacciones del neutrino electrónico (ν_e), en 1956, 25 años después de que Pauli, en 1931, lo hubiese propuesto argumentando la conservación de la energía en la desintegración β. Este experimento se realizóen una central nuclear, fuente intensa de neutrinos.

El neutrino muónico (ν_μ) fue descubierto en 1962, en un experimento realizado en el acelerador AGS de Brookhaven, por L. Lederman, J. Steinberger y M. Schwartz, demostrando así que cada leptón lleva asociado un neutrino distinto.

15.2.3 La era de los quarks. Nuevas generaciones de partículas

Inicialmente, los primeros hadrones se descubren gracias al estudio de la radiación cósmica pero, tras el *boom* de los aceleradores, los hallazgos se multiplican casi anualmente. En los años 1960 se descubren más de un centenar de hadrones. El gran número de partículas descubiertas; por ejemplo, los mesones $\pi^{\pm}(140)$, $K^{\pm}(494)$, $K^0(498)$, $\rho^{\pm}(770)$, $\omega^0(783)$, etc. y los bariones p(938), $\Lambda^0(1116)$, $\Sigma^{\pm}(1189)$, $\Xi^-(1315)$, $\Omega^-(1672)$, etc. sembró la inquietud y la incredulidad de los físicos hasta que M. Gell-Mann simultáneamente con Y. Neeman y G. Zweig, proponen el modelo de quarks (basado en la conocida simetría SU(3) de clasificación de las partículas conocidas hasta entonces) y postulan que los hadrones están

compuestos por unos entes (en principio ficticios y matemáticos) que poco tiempo después se lograron *ver* en un ingenioso experimento de difusión de electrones contra protones realizado en SLAC desde 1967 por J. Friedman, H. Kendal y R. Taylor.

Un resultado trascendental tuvo lugar en 1973 con un experimento, hecho en el CERN (Ginebra) con la cámara de burbujas Gargamelle, en el que se descubrieron las corrientes neutras. Ver la figura 15.5 en la que se muestra una reacción elástica $\overline{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \overline{\nu}_\mu + e^-$ sin cambio de carga entre los leptones. El mecanismo de producción de esta reacción puede verse en el diagrama de la figura 18.14, en la Sección 18.5. El experimento de la cámara de burbujas Gargamelle confirmó la existencia del bosón Z^0. Los bosones $W^\pm$ y Z fueron predichos por la teoría unificadora de Glashow, Weinberg y Salam, construida por los años 1960. Este descubrimiento impulsó nuevos experimentos que concluyeron con la dentificación de dos nuevos quarks:

a) el quark c (de *charm*; es decir, encanto), en 1974, con el descubrimiento del mesón J/ψ, con una masa de 3097 MeV/c^2, gracias a las iniciativas de los físicos B. Richter en SLAC[8] y S. Ting en Brookhaven,[9] ambos en EEUU.

b) el quark b (de *beauty*; es decir, belleza), en 1977, con el descubrimiento del Υ, con una masa de 9460 MeV/c^2, por el grupo de L. Lederman en Fermilab[10] (Chicago), también en EEUU.

Las corrientes neutras, debidas al intercambio del bosón Z, son complementarias a los procesos como $\overline{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ llamados de corrientes cargadas, que se explican por el intercambio de $W^\pm$.[11] También se descubren reacciones inelásticas del tipo $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$, en las que el nucleón se rompe dando un sistema de partículas X.

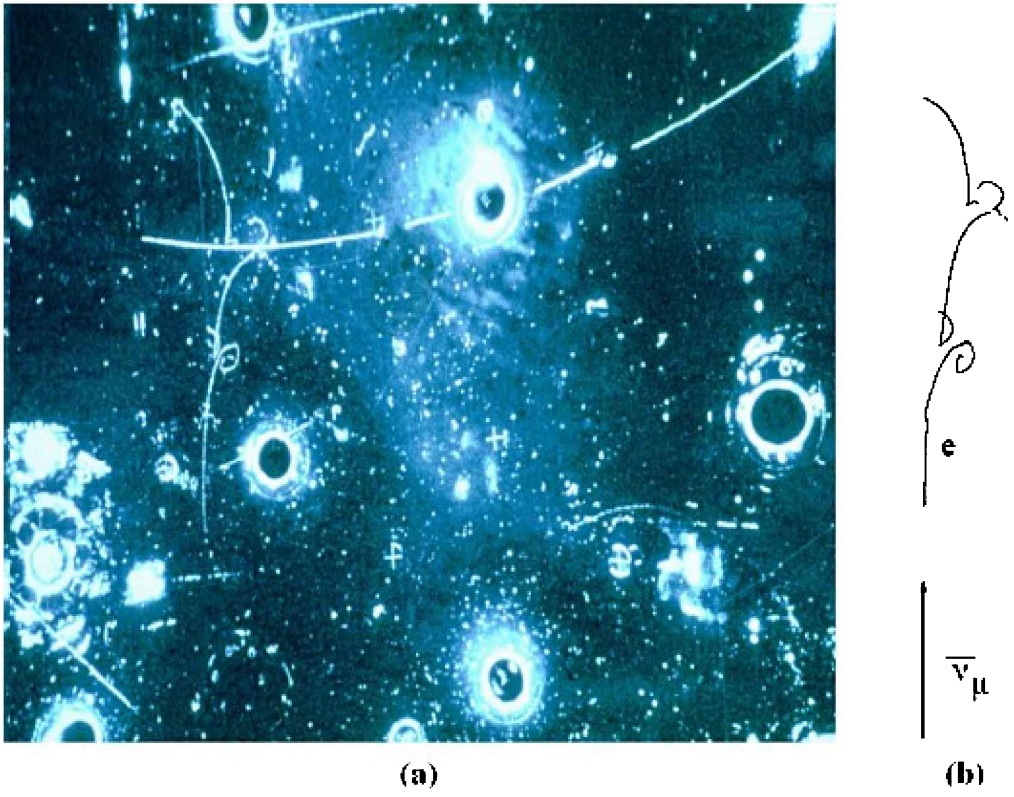


Figura 15.5: **a)** Fotografía del suceso de la cámara de burbujas Gargamelle donde se observa una reacción elástica $\overline{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \overline{\nu}_\mu + e^-$ que confirmó la existencia del bosón Z. **b)** Esquema del suceso fotografiado.

La década de los años 1970, conocida entre los físicos de partículas como la d *écada prodigiosa*por la cantidad de descubrimientos que se realizaron en dicha época, también vio el descubrimiento, en 1975, del tercer leptón cargado (el leptón tau), en un experimento conducido por Martin Perl, de SLAC, por lo que recibió el premio Nobel de Física en 1995 que compartió con F. Reines por su descubrimiento del neutrino electrónico.

El estado J/ψ es un mesón compuesto por un par quark-antiquark c $\overline{c}$, por tanto no es un mesón con encanto, ya que el encanto se cancela. Curiosamente el quark *c* fue predicho en 1970, con anterioridad a su descubrimiento, por Glashow, Iliopoulos y Maiani. Análogamente el Υ

es un mesón compuesto por un par quark-antiquark $b\bar{b}$, y que por lo tanto es un mesón que no tiene belleza. Tanto el J/ψ como el Υ forman parte de la espectroscopía de estados conocidos por el nombre de *quarkonio* (respectivamente *charmonio* y *bottomonio*), de mucha importancia para el modelo de quarks.

En 1979, los experimentos instalados en el anillo de colisiones PETRA del laboratorio DESY (Hamburgo) presentaron la primera evidencia directa de la existencia del gluón. Mostraron claramente que, además de sucesos con dos *jets*, también existían sucesos con tres *jets* en colisiones e^+e^-: el tercer *jet* era un gluón resultado del *bremsstrahlung* de uno de los dos quarks.

Merece recordarse el gran aumento de la energía obtenido gracias al impulso de los colisionadores, cuyo zenit se alcanza con los experimentos UA1 y UA2 del CERN gracias a los que en 1983 se observan por primera vez los bosones intermediarios Z^0 y $W^{\pm}$en el colisionador protón-antiprotón, llamado $Sp\bar{p}S$, que proporcionó colisiones a 540 GeV en el centro de masas, y ayudó a confirmar las ideas unificadoras de la teoría de Glashow, Weinberg y Salam cuyoéxito es aún más notorio después de los resultados de los cuatro experimentos del colisionador e^+e^- LEP del CERN, que inició su funcionamiento en verano de 1989 y finalizó su operación a finales del año 2000, periodo en el que aportó innumerables datos científicos que consolidaron las predicciones del modelo estándar.

15.2.4 Descubrimientos más recientes

En 1994 se descubrió[12] el quark t (de *top*; es decir, *cima* o también *truth*, o sea *verdad*), en las colisiones $p\bar{p}$ a 1,8 TeV en el centro de masas, gracias al Tevatrón de Fermilab (Chicago, EEUU), el colisionador que en esa época proporcionaba las colisiones de mayor energía. La masa encontrada para el quark *top* es $m_t = 173{,}5 \pm 1{,}0$ GeV. La masa del quark *top* es tan grande (casi igual a la masa de un átomo de

oro), que su desintegración por interacción débil es tan rápida que no hay tiempo suficiente para formar un mesón; por ello no existen hadrones formados por el quark *top*.

Sólo faltaba un fermión por descubrir, el neutrino del tau, perteneciente a la tercera familia de leptones. La evidencia de su existencia quedó probada en el experimento DONUT en el Tevatrón de Fermilab, donde finalmente en el año 2000 se logró aislar (en emulsiones fotográficas) 4 sucesos en los que el neutrino tau producía sendos leptones tau. Con éste, se puede concluir que los seis leptones han sido experimentalmente detectados y se han determinado todas sus propiedades.

15.2.5 El descubrimiento del bosón de Brout-Englert-Higgs

En el esquema del modelo estándar de las partículas y sus interacciones, la partícula (o partículas) fundamental que más se ha resistido a su detección y descubrimiento es el llamado bosón de Higgs, cuya masa no la predice la teoría y por lo tanto es desconocida aunque se sospechaba que era muy elevada ($m_H > 100$ GeV/c^2). Es la partícula que se introdujo hace ahora 50 años para cumplir con la unificación electrodébil y dar masa a los constituyentes y a los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z, a través del llamado mecanismo de Brout-Englert-Higgs[13] de rotura espontánea de la simetría electrodébil y que predice la existencia de un campo (bosón escalar) que, popularmente y de manera simplificada, se viene llamando bosón de Higgs.

Para la búsqueda del bosón de Higgs (infructuosa en el colisionador LEP y en el Tevatrón), el CERN diseñó y construyó el mayor colisionador protónprotón del mundo, el LHC (*Large Hadron Collider*), utilizando el mismo túnel que albergó el LEP, y que inició su programa experimental, a una energía de 7 TeV en el cdm (haces de protones de 3,5 TeV), en el año 2010 y 2011, subiendo la energía a 4 TeV por haz en 2012. Después de dos años de operación y tras acumular una

luminosidad cercana a unos 10 fb^{-1}, los experimentos ATLAS[14] y CMS[15] del CERN anunciaron el 4 de julio de 2012 el descubrimiento de un bosón que claramente se desintegra en el canal $H \rightarrow \gamma\gamma$ y otros como $H \rightarrow ZZ$, compatible con el bosón de Higgs, con una masa ~ 126 GeV/c^2. Estudios posteriores confirmaron que posee las propiedades del bosón de Higgs. Se puede pues afirmar que ha tenido lugar el evento de física de partículas de mayor importancia de esta última década: la del descubrimiento de la última pieza fundamental del modelo estándar de las partículas y sus interacciones.

Más adelante en la sección 15.4.4 se presentan los diagramas de Feynman de las interacciones y los modos de desintegración que han dado lugar al descubrimiento del bosón de Brout-Englert-Higgs.

15.3 Clasificación de partículas

Esta extraordinaria cadena de descubrimientos ha conducido a la identificación de los constituyentes más elementales de la materia: los quarks y los leptones. De momento se ha establecido que existen sólo tres familias (pares) de ambos. Estos doce constituyentes son todos fermiones. También existen las correspondientes antipartículas de cada fermión de forma que existe una simetría total en el número de antifermiones constituyentes.

Las cuatro interacciones puestas de manifiesto (gravitatoria, débil, electro-magnética y fuerte) tienen también en común que la fuerza se explica mediante el intercambio de partículas elementales, que se suelen llamar partículas fuerza, y que en este caso son bosones, es decir, partículas con espín entero. El conjunto de partículas descritas puede verse en las tablas 15.1 y 15.4.

Podría darse una definición de partícula, como:

> ente físico con masa, espín y propiedades electromagnéticas bien definidas de forma que en un campo electromagnético describe una

trayectoria perfectamente calculable y conocida.

En efecto, es bien conocida la relación entre el momento, *p* (en GeV/c) y el radio de curvatura *R* (en metros) de la trayectoria que describe una partícula de carga eléctrica *Ze* (siendo *Z* un número entero positivo, negativo o nulo) en un campo magnético de intensidad *B* (en tesla):

$$p = 0{,}3\, Z\, \mathcal{B}\, R \tag{15.4}$$

Pero cabe también añadir a la anterior definición el adjetivo de partícula elemental o fundamental. En este caso se entiende que se trata de entes puntuales que no pueden explicarse como entes compuestos por otros más elementales o por estados excitados de éstos.

15.3.1 Partículas y antipartículas

Cada partícula, sea elemental o no, tiene su antipartícula. La antipartícula tiene las mismas propiedades físicas que la partícula (masa, espín, vida media) pero tiene todas las cargas opuestas. Por ello, si una partícula entra en contacto con su antipartícula se aniquilan. Esta aniquilación es un proceso electrodébil. Puede tener lugar por intercambio de fotón o de bosón Z.

El concepto de antipartícula es consecuencia de la mecánica cuántica y de la relatividad. Para visualizarlo basta con recordar las ecuaciones de una partícula libre. Tanto en el caso no relativista como en el caso relativista, si se aplica el principio de sustitución se encuentran las ecuaciones de Schrödinger y de Klein-Gordon, respectivamente:

$$E = p^2/2m \quad \rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \rightarrow \quad -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + m^2c^4\Psi(\vec{r},t)$$

Ambas ecuaciones de ondas tienen como solución:

$$\Psi(\vec{x},t) = N e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t)/\hbar} \qquad (15.5)$$

Lo llamativo es que si Ψ es solución de la ecuación de Klein-Gordon con $E_p > 0$, la función Ψ^* también lo es con $E_p < 0$.

Dirac replanteó la ecuación relativista $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{x},t)$ tomando como hamiltoniano $H = \alpha pc + \beta mc^2$, lineal en p y m en vez de cuadrático, y encontró que los coeficientes α y β debían ser matrices 4×4, en vez de escalares. Esto se verifica al exigir que las funciones de onda cumplan también las ecuaciones de Klein-Gordon, con lo que encontró que Ψ es un vector columna de 4 componentes:

$$\Psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \qquad (15.6)$$

que se conoce por el nombre de *biespinor de Dirac*. De las cuatro componentes hay dos soluciones con $E_p > 0$ y otras dos con $E_p < 0$, que se interpretan como partículas y antipartículas. Hay dos soluciones con $E_p > 0$ porque el electrón tiene espín 1/2. El espín aparece cuando se coloca al electrón en un campo magnético, responsable del término de interacción, que está definido por el momento dipolar magnético de Dirac:

$$\vec{\mu}_D = \frac{g^{(s)}}{\hbar}\frac{q\hbar}{2m}\vec{s} \qquad (15.7)$$

Este es el momento magnético que se predice para una partícula puntual (sin estructura) de carga q y masa m. En el caso del electrón $s = \frac{1}{2}\hbar$ y, según la predicción de Dirac, el factor giromagnético de espín del

electrón vale $g_{\mathrm{e}}^{(s)} = 2$ ya que el resultado de la medida de μ_{e} es el magnetón de Bohr: $\mu_{\mathrm{e}} = -\mu_{\mathrm{B}} = -\frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{e}}}$. Curiosamente, el espín, una de las magnitudes físicas más importantes de las partículas, fue postulado antes que la ecuación de Dirac por Uhlenbeck y Goudsmit para poder explicar el efecto Zeeman en física atómica. En conclusión, el electrón obedece a la ecuación de Dirac, que suele escribirse:

$$\boxed{(\gamma_\mu p^\mu c - mc^2)\psi(x) = 0} \qquad (15.8)$$

siendo $\psi(x)$ el llamado biespinor de Dirac, de cuatro componentes, p^μ, el cuadrivector energía-momento (E/c, $\vec{p}$) y γ_μ, las matrices (4×4) de Dirac (véase por ejemplo el Apéndice E). El biespinor de Dirac describe dos estados; uno de energía positiva y el otro de energía negativa: $p^0 = \pm\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2c^2}$ asociados, respectivamente, a estados de partícula y antipartícula y además cada uno de ellos con dos estados de polarización (los que corresponden a partículas de espín 1/2). Con esto, las partículas y antipartículas tienen las mismas propiedades físicas espacio-temporales (masa *M*, espín *J*, vida media) pero sus magnitudes electromagnéticas (carga, momento magnético) y sus números cuánticos internos (I_3, extrañeza, encanto, belleza, verdad), cambian de signo. La teoría relativista de Dirac explica, por lo tanto, la existencia de antipartículas y contiene el espín como grado de libertad necesario para explicar las propiedades de los electrones. Por contra, las medidas del momento magnético del protón y del neutrón, dan:

$$\mu_{\mathrm{p}} = +2{,}79\mu_{\mathrm{N}} \qquad \text{y} \qquad \mu_{\mathrm{n}} = -1{,}91\mu_{\mathrm{N}} \qquad (15.9)$$

en donde, en primer lugar, sorprende que el neutrón, que tiene carga nula, tenga un momento magnético distinto de cero. Estos valores pusieron de manifiesto que ni el protón ni el neutrón son puntuales como

el electrón. En efecto, en la expresión anterior se puede comprobar que los factores giromagnéticos de espín del protón y del neutrón son, respectivamente, $g_{\mathrm{p}}^{(s)} = 5{,}58$ y $g_{\mathrm{n}}^{(s)} = -3{,}82$, muy diferentes del valor para el electrón puntual de Dirac $(g_{\mathrm{e}}^{(s)} = 2)$. Téngase en cuenta que para el electrón, el momento dipolar magnético viene dado en magnetones de Bohr, $\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{e}}}$, donde se divide por la masa del fermión. Ahora, en el caso de los nucleones, la unidad de medida es el magnetón nuclear $(\mu_{\mathrm{N}} = \frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{p}}})$, para el que se toma, por convenio, la masa del protón.

Hoy se sabe que efectivamente el protón y el neutrón están compuestos por quarks y, como se verá más adelante en 17.5.4, el modelo de quarks explica el valor de sus momentos magnéticos.

15.3.2 Fermiones y bosones

La materia observable que nos rodea está formada por conglomerados de moléculas obtenidas por unión de múltiples átomos con una nube electrónica (compuesta por los leptones cargados de menor masa y mejor conocidos: los electrones) y un núcleo. Los núcleos atómicos, como bien se sabe, están compuestos por protones y neutrones (llamados nucleones). Estos últimos, a su vez, están compuestos por quarks.

La materia está, pues, compuesta por fermiones, partículas de espín semientero, y se clasifican en quarks y leptones. Estos constituyentes son partículas sin estructura, puntuales, al menos hasta los menores tamaños que ha sido posible explorar hasta hoy con los aceleradores disponibles (10^{-3} fm). La interacción de los fermiones entre sí se describe mediante el intercambio de bosones, partículas de espín entero.

Principio de conexión espín-estadística

A los constituyentes fundamentales –fermiones y bosones– se les aplica el principio de conexión espín-estadística, propuesto por E. Fermi en 1940, al igual que a otros sistemas cuánticos. Este principio permite conocer la simetría de la función de ondas $\psi(q_1, q_2, .., q_N)$ de un sistema de N partículas idénticas.

Cuánticamente, las partículas idénticas (cuyas funciones de onda se superponen) son indistinguibles. Clásicamente el concepto de trayectoria las distingue. Por definición, el hamiltoniano, H, es simétrico en las variables q_i ya que las i partículas son idénticas. El *operador intercambio* de dos partículas P_{ij}: $q_i \leftrightarrow q_j$, conmuta con H y clasifica las funciones de onda en simétricas (ψ_S) o antisimétricas (ψ_A), correspondiendo a los valores propios ±1 de P_{ij}, teniendo el mismo valor propio E del hamiltoniano.

Para un sistema de N partículas se puede definir el operador P, *operador permutación* de N partículas (N! posibilidades), que conmuta con H y es una constante del movimiento. Los N! estados propios del operador P son propios de H y todos tienen la misma energía. En principio, todos los estados tienen la misma probabilidad de existir. En efecto, sea cual sea el tipo de partículas idénticas, el cuadrado de la función de ondas, $|\psi(q_1, q_2, \ldots, q_N)|^2$, que da la probabilidad de que las partículas ocupen el estado definido por las coordenadas q_i, no cambiará bajo cualquier intercambio $i \rightarrow j$.

Sin embargo, existen dos tipos de funciones de onda que se distinguen por el valor propio ± del operador permutación P. Se tienen las siguientes posibilidades según sea el estado totalmente:

simétrico $\qquad \psi_S(q_1, \ldots, q_N) \longrightarrow P\psi_S = +\psi_S$

antisimétrico $\qquad \psi_A(q_1, .., q_N) \longrightarrow P\psi_A = \begin{cases} +\psi_A \text{ (perm. par)} \\ -\psi_A \text{ (perm. impar)} \end{cases}$

es decir, el operador P tiene dos valores propios distintos (+ y −) según la paridad de la permutación de las partículas idénticas. La definición de

paridad de la permutación P es que el número de intercambios P_{ij} es par ($P = +$) o impar ($P = -$).

El postulado de simetrización parte del hecho que todo sistema de N partículas idénticas se describe con un estado simétrico ψ_S o antisimétrico ψ_A. La conexión espín-estadística establece la siguiente regla:

- los bosones, partículas con espín entero (ejemplo: γ, W, Z, g, π, ρ, etc.) son descritos por estados simétricos ψ_S y obedecen a la estadística de Bose-Einstein.

- los fermiones, partículas con espín semi-entero (ejemplo: leptones, quarks, p, n, Λ, etc.) se describen por estados antisimétricos ψ_A y obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.

El principio de exclusión de Pauli

Una consecuencia muy conocida del principio de simetrización es el principio de exclusión de Pauli, por el que dos electrones no pueden encontrarse en un mismo estado cuántico. Efectivamente, al tratarse de fermiones idénticos, la función de ondas es antisimétrica bajo el intercambio de alguna de sus variables y, en el caso en el que los dos fermiones ocupen el mismo estado cuántico, la función de ondas se anula. Este no es el caso de los bosones, para los que no hay limitaciones en el número de bosones que pueden ocupar el mismo estado cuántico.

La construcción de funciones de onda totalmente simétricas bajo el inter-cambio de cualquier par de ellas es inmediato. Para la construcción de funciones de onda antisimétricas, existe un método bien conocido en física atómica: el de los determinantes de Slater. Se aplica en el marco del modelo de partícula individual en el que la función de ondas total puede factorizarse en producto de funciones de onda de una partícula.

Un caso particular muy sencillo es el de un sistema formado por dos partículas (como por ejemplo los dos electrones del átomo de helio). Se

supone que $\psi(q_1, q_2) = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(1, 2)$, producto de la función espacial, Φ, por la función de espín, χ, que dependen de coordenadas totalmente independientes y por lo tanto se puede escribir como producto. Para formar una función antisimétrica se tendrán dos posibilidades:

$$\psi^{s=0}(q_1, q_2) = \Phi^{+}(r_1, r_2)\chi_{0,0}(1, 2) \qquad \textbf{función singlete de espín}$$

$$\psi^{s=1}(q_1, q_2) = \Phi^{-}(r_1, r_2)\chi_{1,M_S}(1, 2) \qquad \textbf{función triplete de espín}$$

ya que $\chi_{0,0}(1, 2)$ es antisimétrica bajo intercambio de 1 y 2 mientras que las tres funciones χ_1, $M_S(1, 2)$ son simétricas. Existen dos posibles funciones espaciales: $\Phi^{\pm}$. Se distinguen por el valor propio del operador intercambio:

$$P_{12}\Phi^{\pm}(1, 2) = \pm\Phi^{\pm}(1, 2)$$

La función espacial, Φ, describe el movimiento orbital de una partícula alrededor de la otra, lo que se realiza gracias a los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$. El intercambio $1 \leftrightarrow 2$ equivale al cambio $\theta \rightarrow \pi - \theta$ y $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, lo que introduce el factor $(-1)^\ell$ multiplicando a Φ. De esta manera, existe una relación directa entre el valor del momento angular orbital ℓ y la simetría de la función; si ℓ es par (impar), la función Φ es simétrica (antisimétrica). En concreto:

$$P_{12}\Phi(r_1, r_2) = \Phi(r_2, r_1) = (-1)^\ell \Phi(r_1, r_2)$$

es decir, el valor propio del operador intercambio P_{12} es $(-1)^\ell$. En el caso del átomo de helio, en el estado fundamental los dos electrones ocupan el estado espacial[16] 1*s*, que es simétrico, luego por construcción $\Phi^- = 0$; sólo existe el estado llamado *para*-helio, cuya energía es $E_{1s,1s} = -78{,}99$ eV. Fue la observación de un único nivel energético del estado fundamental del helio la que condujo inevitablemente al principio de exclusión de Pauli.

Otro buen ejemplo de aplicación del principio de simetrización es el de la desintegración del mesón $\rho^0(770)$, de espín $J = 1$, en dos piones. La desintegración $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ no está permitida porque al tratarse de dos bosones idénticos en el estado final se debe tener ℓ par, y como los mesones π^0 tienen espín 0 no puede obtenerse un valor impar para el espín del ρ, luego dicha desintegración no es compatible con el valor del espín del ρ.

Principio de conservación del número de fermiones

Por último, es importante tener presente el principio de conservación del número de fermiones. Este principio implica que los fermiones se crean o se destruyen a pares, entendiendo el par como de fermión-antifermión. En los sistemas de bosones, por el contrario, el número de bosones total no es constante. Pueden crearse y destruirse siempre que se respeten los otros principios de conservación, como por ejemplo la carga eléctrica y todos los demás números cuánticos que son generalizaciones de la carga (*S, C, B, T*), y que se definen más adelante.

15.3.3 Las familias de quarks y leptones

Apenas un mes después de haber iniciado su funcionamiento el colisionador e^+e^- LEP del CERN (Ginebra), en octubre de 1989 y gracias a la medida de la anchura de masa, Γ, del bosón intermediario Z^0, medida que se llevó a cabo simultáneamente en los cuatro experimentos instalados en el LEP: ALEPH, DELPHI, L3 y OPAL, pudo determinarse el número de especies de neutrinos y de aquí inducir el número de constituyentes básicos de la materia; en el universo sólo existen doce fermiones (partículas de espín semientero) fundamentales, agrupados en tres familias de pares de quarks:

$$(u, d), (c, s), (t, b) \qquad (15.10)$$

y tres pares de leptones (los cargados: electrón, muón, tauón y sus correspondientes neutrinos que son neutros):

$$(e^-, \nu_e), (\mu^-, \nu_\mu), (\tau^-, \nu_\tau) \qquad (15.11)$$

Existen por supuesto también las doce antipartículas correspondientes.

Sólo el doblete de quarks de la primera generación o familia; los quarks u (*up*) y d (*down*) y el doblete de leptones de la primera familia (el electrón, e^- y su neutrino asociado ν_e, llamado neutrino electrónico) son relevantes, es decir, aparecen en la materia que nos rodea. Las denominadas segunda y tercera generación, tuvieron seguramente relevancia instantes después del *big-bang*, el supuesto origen del universo. Hoy por hoy se cree que quarks y leptones son entes puntuales, sin estructura, al menos hasta la escala que ha sido verificada experimentalmente, de 10^{-18}m.

En la tabla 15.1 aparecen los constituyentes de la materia con todos sus números cuánticos. Los quarks son fermiones, con espín $\frac{1}{2}$, tienen cargas fraccionarias $+\frac{2}{3}|e|$ y $-\frac{1}{3}|e|$ y se distinguen entre sí por el número cuántico interno llamado sabor y denominados u, d, c, s, t, b. Tienen número bariónico $B = \frac{1}{3}$, y las otras cargas además de la eléctrica son: *S, C, T, B*, es decir, la extrañeza (número cuántico cuya inicial recuerda el nombre inglés del sabor del quark s, *strange*), el encanto (del quark c, *charm*), la verdad (del quark t, *truth*) y la belleza (del quark b, *beauty*), respectivamente. Sólo hay un doblete de isospín ($I = \frac{1}{2}$) formado por los quarks u, d cuya tercera componente del operador isospín es $I_3(\mathrm{u}) = +\frac{1}{2}$ e $I_3(\mathrm{d}) = -\frac{1}{2}$. Se trata de dos quarks que tienen masas muy parecidas. Esta es la causa de la invariancia de carga de la interacción fuerte que está asociada a la simetría de isospín. Los demás quarks son todos singletes de isospín (por ello tienen $I = 0$); una consecuencia de la gran diferencia de masas entre ellos. Cada quark, además, posee tres grados de libertad de color, que por convenio se

toman como r, a, v (rojo, verde y azul), propiedad que se supone ser la fuente de la fuerza fuerte, descrita por la cromodinámica cuántica (teoría llamada QCD).

Tabla 15.1: Constituyentes de la materia (fermiones) y sus números cuánticos. Existen también las doce antipartículas correspondientes, con las cargas cambiadas de signo. Cada quark, además, posee tres grados de libertad de color, propiedad que se supone ser la responsable de la fuerza fuerte, descrita por la cromodinámica cuántica (teoría llamada QCD).

LEPTONES $\mathbf{S}=\frac{1}{2}$ $\mathcal{B}=0$	M (MeV/c^2)	τ (s)	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,5109989	-	-1	1	0	0
ν_e	≤ 3 eV	-	0	1	0	0
μ^-	105,65837	$2{,}19703\times10^{-6}$	-1	0	1	0
ν_μ	$\leq$0,19	-	0	0	1	0
τ^-	1776,82	$0{,}2906\times10^{-12}$	-1	0	0	1
ν_τ	$\leq$18,2	-	0	0	0	1

QUARKS $\mathbf{S}=\frac{1}{2}$ $\mathcal{B}=\frac{1}{3}$	M (GeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0
d	0,39	$-1/3$	1/2	$-1/2$	0	0	0	0
c	1,60	2/3	0	0	1	0	0	0
s	0,51	$-1/3$	0	0	0	-1	0	0
t	173.5	2/3	0	0	0	0	1	0
b	5,4	$-1/3$	0	0	0	0	0	-1

La masa de los quarks

Las masas de los quarks no se pueden medir porque no existen en libertad. No pueden recorrer una trayectoria en un campo magnético. Los quarks están *confinados* en el interior de los hadrones y esta es una

propiedad fundamental de la teoría QCD. Por ello, las masas de los quarks sólo se pueden estimar. Un método consiste en suponer que la masa de los hadrones es suma de las masas de quarks, con lo que estas masas contienen parte de interacción y parte debida a su energía cinética dentro del hadrón. Estas son las *masas constituyentes* que se dan en la tabla 15.1 y deben tomarse solamente a título indicativo. Otro método es el de las llamadas *masas de corrientes*, que dependen del modelo ya que se sustraen los efectos debidos a la interacción y a la energía cinética. Se obtienen entonces masas más pequeñas que las anteriores, sobre todo para los quarks ligeros:

	$\mathrm{MeV/c^2}$		$\mathrm{GeV/c^2}$
$m_{\mathrm{u}} = 2,3 \pm 0,7$		$m_{\mathrm{c}} = 1,275 \pm 0,025$	
$m_{\mathrm{d}} = 4,8 \pm 0,7$		$m_{\mathrm{b}} = 4,18 \pm 0,03$	
$m_{\mathrm{s}} = 95 \pm 5$		$m_{\mathrm{t}} = 173,5 \pm 0,6$	

Los quarks tienen otra propiedad llamada *color*. Cada quark puede tener tres colores identificados por las iniciales *r, v, a*. Esta es la propiedad que se supone que da lugar a la fuerza fuerte a partir del intercambio de *gluones*, que también tienen color.

Los leptones

Los leptones son también fermiones, con espín $\frac{1}{2}$ y número bariónico[17] $B = 0$. Cada familia se distingue por un número leptónico distinto: L_ℓ con $\ell = \mathrm{e}, \mu, \tau$ llamado número leptónico electrónico, muónico y tauónico, respectivamente. El neutrino de cada familia tiene el mismo número leptónico que el leptón cargado al que se asocia. Por convenio, $L_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^-) = L_{\mathrm{e}}(\nu_{\mathrm{e}}) = 1$ y así sucesivamente para cada familia. Como se trata de una *carga*, los números correspondientes de los antileptones, cambian de signo. Los leptones cargados más masivos son inestables (por interacción débil) y se desintegran. La vida media de los leptones masivos viene

también dada en la tabla 15.1.

La conservación del número de fermiones se traducirá en conservación del número de quarks y, en consecuencia, conservación del número bariónico, en el sector de los quarks y la conservación del número leptónico en el sector leptónico. La definición del número leptónico electrónico de un conjunto de leptones debe entenderse como la suma:

$$L_e = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\overline{\nu}_e) \qquad (15.12)$$

extendiéndose fácilmente a los otros dos números leptónicos L_μ y L_τ.

Una característica de los constituyentes fundamentales es que cumplen que la suma de sus cargas eléctricas (incluido el color en el caso de los quarks) se anula $\Sigma_{qi} = 0$; en efecto: $(3 \times 3 \times \frac{2}{3} - 3 \times 3 \times \frac{1}{3} - 3)|e| = 0$. Es de especial importancia puesto que conduce a una teoría de campos renormalizable.

15.3.4 Hadrones

Si bien los quarks son constituyentes fundamentales de la materia, nunca se han podido detectar en estado libre. Se puede decir que los quarks, al estar fuertemente ligados formando hadrones, no pueden vivir en estado libre lo suficiente como para dejar una traza en los detectores de partículas. Sólo pueden observarse combinaciones de quarks que, de acuerdo con la simetría SU(3), son estados singletes de color. A estos singletes de color, o dicho de otra manera, entes sin color, se les llama hadrones y son los que pueden ser detectados en estado libre.

Así pues, reciben el nombre de hadrones las partículas que sienten la interacción fuerte. Todos los hadrones se supone que están constituidos por quarks. Se verá más adelante que el modelo de quarks constituyentes de los hadrones explica muchas propiedades de los mismos. Se han descubierto más de 200 hadrones, todos ellos con carga eléctrica entera. Los hadrones se clasifican en:

- bariones: su estructura en quarks es $q_1q_2q_3$. Son, por lo tanto, fermiones. Tienen número bariónico B = 1. Los representantes más genuinos en este grupo son los nucleones. El número bariónico se conserva en todas las interacciones. Esto es consecuencia de la conservación del número de fermiones. Además de masa, carga eléctrica, espín, poseen otros números cuánticos como paridad, isospín, etc. que se estudiarán más adelante. La tabla D.4 del Apéndice D contiene los bariones estables (bajo la interacción fuerte).

- mesones: el modelo de quarks supone que son estados $q_1\overline{q}_2$. Por lo tanto son bosones. Tienen número bariónico B =0. El nombre de mesón fue introducido por Yukawa cuando propuso la existencia del mesón π. Pueden crearse y destruirse individualmente, siempre que se cumplan todos los principios de conservación. La tabla D.3 del Apéndice D contiene los mesones[18] estables (bajo la interacción fuerte).

Los números cuánticos de los hadrones son función del número y sabor de sus quarks constituyentes. Sean N_{q_i} y $N_{\overline{q}_i}$ el número total de quarks y el de antiquarks de sabor q_i. Es decir, $N_{qi} = N_{\mathrm{u}}, N_{\mathrm{d}}, N_{\mathrm{c}}, N_{\mathrm{s}}, N_{\mathrm{t}}, N_{\mathrm{b}}$, y similarmente para los antiquarks. Los números cuánticos son, sencillamente,

extrañeza: $S = -(N_{\mathrm{s}} - N_{\overline{\mathrm{s}}})$; **encanto:** $C = (N_{\mathrm{c}} - N_{\overline{\mathrm{c}}})$

belleza: $B = -(N_{\mathrm{b}} - N_{\overline{\mathrm{b}}})$; **verdad:** $T = (N_{\mathrm{t}} - N_{\overline{\mathrm{t}}})$

Se da la circunstancia que T =0 para todos los hadrones conocidos hasta hoy. En efecto, la partícula que tenga un quark t entre sus constituyentes, debe necesariamente tener una masa $M > 173{,}5$ GeV/c^2, lo que requiere disponer de aceleradores con energías superiores a las actuales.

Los números cuánticos que acaban de describirse son muy importantes

porque se conservan en las interacciones fuertes y electromagnéticas, como se verá más adelante.

El número bariónico puede calcularse:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{3}(N_q - N_{\overline{q}})$$

que resulta ser $B = 1$ para los bariones, $B = -1$ para los antibariones y $B = 0$ para los mesones. La conservación del número bariónico está ligada a la conservación del número de quarks. Este es un número que es conservado por todas las interacciones. Las interacciones fuertes y electromagnéticas conservan incluso el sabor de los quarks. Por ejemplo, en la reacción:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^+ \qquad (15.13)$$

que procede por interacción fuerte, el número de quarks de cada sabor, se conserva. Sin embargo puede darse el cambio de sabor de un quark. Esto sólo es posible por interacción débil. Un ejemplo es la desintegración β del neutrón que puede verse en la figura 15.12, en la que el quark d cambia al sabor u:

$$\mathrm{d} \rightarrow \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e} \qquad (15.14)$$

La carga eléctrica de los hadrones es $q = Q|e|$, siendo:

$$Q = \frac{2}{3}(N_u + N_c + N_t) - \frac{1}{3}(N_d + N_s + N_b) \qquad (15.15)$$

Finalmente, es fácil comprobar que tanto a nivel de quarks como de hadrones se cumple:

$$Q = I_3 + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2} \qquad (15.16)$$

que es la relación generalizada de Gell-Mann Nishijima. Originalmente se llamó hipercarga a la suma $Y = B + S$.

15.3.5 Hadrones excitados. Resonancias

En las tablas D.3 y D.4 del Apéndice D se han enumerado los mesones y bariones estables bajo interacción fuerte; es decir, los estados ligados de quarks por interacción fuerte de menor masa. Sin embargo, todos ellos (excepto el protón) son inestables porque se desintegran debido a la acción de otras fuerzas: la interacción débil o la electromagnética.

También existen numerosos hadrones excitados (véanse las otras tablas incluidas en el Apéndice D) que suelen denominarse resonancias. La primera resonancia detectada entre partículas fue la conocida resonancia Δ^{++} al estudiar las colisiones pión-protón, en las que la sección eficaz sigue la forma de la curva de Breit-Wigner:

$$\sigma = \frac{(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \Gamma^2/4}{\left[(E - M_R)^2 + \Gamma^2/4\right]} \qquad (15.17)$$

donde $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$ es la longitud de onda de De Broglie de las partículas que colisionan, y p el momento del proyectil en el centro de masas de la colisión, siendo s_1 y s_2 el espín de las partículas del estado inicial, J, Γ y M_R el espín, la anchura y la masa de la resonancia. La sección eficaz tiene un máximo para una energía total M_R y disminuye a la mitad para los valores $E - M_R = \pm\Gamma/2$; por ello Γ se llama FWHM (anchura total a media altura). Una resonancia tiene los números cuánticos bien definidos. Ejemplo, la $\Delta(1232)$; (se acostumbra a dar su masa entre paréntesis), tiene espín $J = 3/2$, isospín $I = 3/2$ y anchura $\Gamma = 120$ MeV. La vida media es $\tau = \hbar/\Gamma = 5,4 \times 10^{-24}$ seg, tan pequeña porque su desintegración es debida a la interacción fuerte, que es la más intensa. Otros ejemplos de resonancias pueden verse entre los bosones vectoriales; como el caso del mesón J/ψ (figura 17.8) que ilustra la forma

de la curva Breit-Wigner. Otros bosones vectoriales pueden verse en la figura 17.17. El caso más reciente es el de la producción de la resonancia Z^0 en el LEP (figura 18.17), es el bosón intermediario responsable de las interacciones electrodébiles neutras.

En física nuclear, se conocen también multitud de resonancias; por ejemplo en procesos de captura neutrónica (como el caso n + ^{238}U), donde se producen muchas resonancias para captura de neutrones con energías del orden del keV. También han sido muy estudiadas las llamadas resonancias nucleares gigantes, que se forman en reacciones de fotoabsorción nuclear. Todos los ejemplos vistos corresponden a fenómenos de *formación* de resonancias en reacciones nucleares. A veces, los números cuánticos de las resonancias no permiten su formación en reacciones; este fenómeno es frecuente en reacciones entre hadrones. Esto implica que se pueden también observar resonancias en mecanismos de *producción*: la resonancia se produce junto a otras partículas; por ejemplo en la reacción:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^- + p$$

puede producirse la resonancia $\Delta^0(1232)$, que se desintegra en el canal neutro π^- + p, acompañada de la producción del mesón $\rho^0(770)$ que se desintegra en dos piones $\pi^+ + \pi^-$. Se podría escribir $\pi^- + p \rightarrow \Delta^0(1232) + \rho^0(770) \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^- + p$, o sea, un proceso que se conoce como reacción a *quasi dos cuerpos* porque se producen dos resonancias de vida muy breve en la primera etapa, aunque al final aparecen cuatro hadrones.

15.4 Las cuatro interacciones fundamentales

Actualmente se sabe que existen cuatro fuerzas fundamentales a través de las cuales interaccionan estos constituyentes o fermiones primarios: la gravitatoria, la electromagnética, la débil y la fuerte. El concepto de fuerza ha evolucionado de la física clásica a la cuántica. Clásicamente una interacción (a distancia) entre dos partículas es debida a la acción del

potencial, o campo, creado por una sobre la otra. Cuánticamente, la interacción entre dos partículas se manifiesta a través del intercambio (emisión y absorción) de bosones (partículas de espín entero), también llamados cuantos del campo. La teoría de Yukawa es un buen ejemplo de esta idea. H. Yukawa[19] (en 1935), dió la primera explicación válida del corto alcance (~1 fm) de la fuerza de cohesión nuclear; la fuerza entre nucleones. Para ello, utilizó la idea basada en la teoría de la electrodinámica cuántica que describe la interacción entre cargas a través del intercambio de fotones, y que tantoéxito estaba teniendo, para suponer que la interacción entre dos nucleones es debida al intercambio de un cuanto (un bosón) del campo nuclear que fue llamado mesón y tras su descubrimiento se identificó con el pión. El diagrama que describe esta idea puede verse en la figura 15.6, llamado habitualmente diagrama de Feynman. Así, Yukawa introdujo la idea de que la interacción nuclear es mediada por el intercambio de *mesones*. Sólo se intercambian bosones, ya que para intercambiar fermiones habría que intercambiar también el correspondiente antifermión para cumplir los principios de conservación. Estas ideas dieron lugar al modelo llamado OPEP (*one pion exchange potential*).

Una de las grandes aportaciones de la teoría de Yukawa es que la masa del mesón intercambiado está relacionada con el alcance de la fuerza. En efecto, en los modelos de intercambio el principio de incertidumbre permite el intercambio de una partícula de masa m, o sea equivalente a una incertidumbre energética $\Delta E = mc^2$, siempre que el tiempo que dura el proceso cumpla:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar \longrightarrow R = \frac{\hbar}{mc} \qquad (15.18)$$

ya que $R = c\Delta t$, puesto que se supone que se propaga como máximo a la velocidad de la luz en el vacío. Se dice que la partícula intercambiada es virtual, ya que su energía y su momento no cumplen la relación de Einstein $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ (lo que equivale a decir que la partícula

intercambiada no está en su capa másica), y no es detectable ya que no es una partícula libre; no se trata de una partícula real. Los demás números cuánticos, tales como la carga, deben conservarse. A todos los efectos, se supone que la partícula intercambiada es puntual; no tiene estructura.

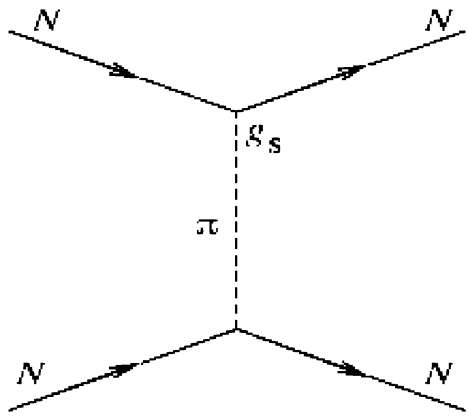


Figura 15.6: Diagrama de intercambio de π de Yukawa.

Para calcular el potencial de intercambio de un bosón hay que recurrir a la teoría cuántica de campos relativista. Pero haciendo una sencilla analogía con la electrodinámica, puede encontrarse una expresión para dicho potencial. El potencial electrostático creado por una carga q en el origen cumple la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V_c(\vec{r}) = -\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] 4\pi q \delta(\vec{r}) \qquad (15.19)$$

que tiene por solución el conocido potencial de Coulomb:

$$V_c(r) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] \frac{q}{r} \qquad (15.20)$$

La energía potencial de la carga q' en el campo creado por q será $U_c = q' V_c(r)$. Al cuantificar el campo electromagnético, la ecuación (15.19) se reinterpreta como la de la amplitud de probabilidad (función de ondas)

de un fotón libre con masa nula. Aparecen los cuantos del campo, los fotones, cuya fuente es la carga eléctrica. La fuerza electromagnética tiene alcance infinito y los fotones, cuantos del campo, tienen masa nula. La intensidad de la interacción electro-magnética viene dada por la constante de acoplamiento, proporcional a la carga eléctrica o la más comúnmente utilizada constante de estructura fina que es la constante adimensional $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137$. Supóngase ahora el caso de un cuanto del campo nuclear, que en principio tiene masa m y que es el responsable de la fuerza de atracción entre nucleones. El cuanto debe ser un bosón, emitido y absorbido por una fuente caracterizada por una constante de acoplamiento g_s. Análogamente al caso electrostático la mejor ecuación relativista para el potencial creado por una fuente en el origen es la ecuación relativista de Klein-Gordon:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(\vec{r}) - g_s\delta(\vec{r}) \qquad (15.21)$$

válida para partículas de masa m y espín $s = 0$. Tiene por solución el potencial de Yukawa:

$$\boxed{\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}r}}{r}} \qquad (15.22)$$

que suele escribirse también $\phi(r) = \frac{g_s}{4\pi}\frac{e^{-r/R}}{r}$ siendo $R = \hbar/mc$, parámetro que se interpreta como el *alcance* de una fuerza mediada por un bosón de masa m, ya que la intensidad del campo se reduce en $1/e$ a una distancia $R = \frac{\hbar}{mc}$. Esta expresión para el alcance coincide con la obtenida más arriba en (15.18), utilizando el sencillo argumento del principio de incertidumbre de Heisenberg.

El pión, $m_{(\pi^\pm)} = 139{,}57\ \mathrm{MeV/c^2}$, descubierto en 1947 por

Lattes, Occhialini, Muirhead y Powell, da para el alcance $R \sim 1{,}4$ fm, representando bien la parte de mayor alcance de la fuerza nuclear. Los piones cargados, junto con el pión neutro $(m_{(\pi^0)} = 134{,}97\ \mathrm{MeV/c^2})$, con vidas medias $\tau_{\pm} = 26$ ns y $\tau_0 = 8{,}4 \times 10^{-17}$ s, forman un triplete de isospín (lo que asegura la independencia de carga de la interacción nuclear) y son mesones pseudoescalares ($J^P = 0^-$).

Para estimar el valor numérico de g_s, pueden utilizarse los parámetros del deuterón $R \sim 2$ fm y $V_0 \sim 30$ MeV, con lo que se obtiene:

$$\frac{g_s^2}{4\pi} \sim 100\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm} \qquad \text{o sea, adimensionalmente:} \qquad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \sim 1$$

que puede compararse al valor de la constante de acoplamiento, adimensional, que mide la intensidad de la interacción electromagnética, la llamada constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137$. Así se comprende el origen de la denominación de fuerza fuerte.

Los bosones intermediarios de las fuerzas descritas más arriba son: el gravitón, el fotón, los bosones Z^0 y $W^{\pm}$ descubiertos en el CERN en 1983, y los gluones. Estas partículas y sus números cuánticos aparecen en la tabla 15.4; sólo los bosones intermediarios de la interacción débil son masivos; todos los demás tienen masa nula. El gravitón todavía no se ha descubierto experimentalmente. También se describen en la tabla 15.4 las fuentes del campo. Cada interacción tiene una intensidad diferente, depende de la propiedad física que genera la fuerza y se caracteriza por una constante que se llama la constante de acoplamiento de la interacción. Debe ser medida experimentalmente.

Tabla 15.2: Magnitudes físicas de los bosones fundamentales (Partículas fuerza).

BOSÓN ($\mathcal{B}=0, L_\ell=0$)	fuente del campo	M (GeV/c^2)	$J^{\mathcal{P}}$	Q
fotón, γ	carga eléctrica	0	1^-	0
$W^{\pm}, Z^0$	carga débil	80,385; 91,1876	$1^+, 1^-$	$\pm 1,0$
gluón, g_i(i=1,8)	color	0	1^-	0
gravitón, ϵ	masa	0	2^+	0

Estas interacciones actúan entre los constituyentes elementales. Así, los leptones son sensibles a la interacción débil y si están cargados, sienten la interacción electromagnética. Los quarks tienen las mismas interacciones que los leptones y además tienen interacción fuerte.

Como ya se ha indicado todos estos logros son el resultado combinado de profundos desarrollos teóricos y de un brillante trabajo de experimentación en gigantescos aceleradores de partículas, y a un nivel de complejidad prácticamente pionero en el dominio de las ciencias puras.

El estudio de las partículas elementales se sigue realizando según los principios del experimento de Rutherford, aunque en la actualidad se utilizan los aceleradores como fuentes de partículas. El choque de partículas pone de manifiesto los efectos de las fuerzas entre constituyentes, por eso las magnitudes más importantes con las que se catalogan los experimentos son las secciones eficaces. Muchas partículas tienen una vida efímera, se desintegran y por ello la otra magnitud importante es la vida media. Estas dos magnitudes están relacionadas entre sí, ya que las dos dependen de la intensidad de la interacción responsable.

Los diagramas de Feynman

Los cálculos de secciones eficaces (probabilidades de reacción) y de vidas medias (probabilidades de desintegración) se realizan gracias a las técnicas de cálculo de la teoría cuántica de campos contenidas en las reglas de Feynman. Para ello, primero hay que fijar los diagramas de

Feynman del proceso que se desea estudiar. Un diagrama de Feynman (véase figura 15.9 y siguientes) contiene líneas que representan los campos (partículas) que intervienen en un proceso físico de interacción. La figura 15.7 muestra el tipo de líneas y el campo al que representa. Hay dos tipos de líneas: *externas* (que representan partículas reales), e *internas* es decir, partículas virtuales. Las líneas coinciden en vértices, que representan el acoplamiento de las partículas al campo de fuerzas.

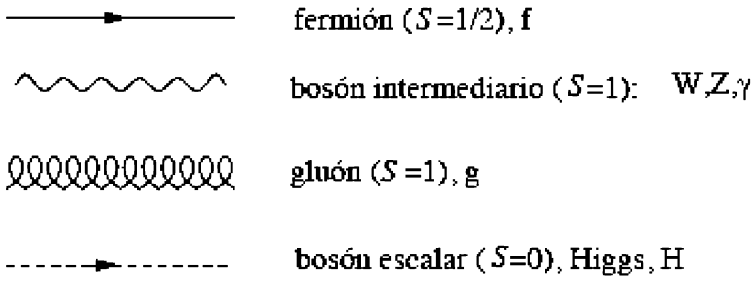


Figura 15.7: Representación de los distintos campos (partículas) en los diagramas de Feynman, según su espín *S*.

El diagrama no representa trayectorias de partículas ni implica distancias entre las mismas. Se trata simplemente de un método gráfico de representar una interacción entre las mismas, pudiendo tratarse de una reacción o una desintegración. En los diagramas de Feynman las partículas se representan con líneas que se dirigen en el sentido del tiempo. Las antipartículas en el sentido opuesto a *t*. Los diagramas de Feynman permiten calcular la amplitud de probabilidad de un proceso como resultado del producto de las siguientes cantidades:

1) la constante de acoplamiento de cada vértice, que da la amplitud de probabilidad de emisión y de absorción del cuanto del campo, y

2) el propagador del bosón virtual intermediario (líneas internas).

En cada vértice se conserva *p* y *Q*; es decir, el momento y la carga eléctrica. Las líneas internas no son observables. Se trata de partículas intercambiadas; se dice también que son los propagadores de la fuerza; de hecho transfieren el momento y la energía de la interacción. Son

partículas virtuales, de existencia efímera, y no tienen la masa de la partícula (o sea, no están en su capa másica); es decir, no cumplen la ecuación de Einstein $E^2=(pc)^2+(mc^2)^2$. Pero en el proceso global, entre partículas incidentes y salientes, la energía se conserva siempre.

En los procesos de colisión se introduce el concepto de *amplitud de difusión*, $f(q^2)$, que como su nombre indica es la amplitud de probabilidad de interacción y es función del momento transferido en la interacción. Es equivalente al propagador de los diagramas de Feynman. La sección eficaz de difusión es el producto de $|f|^2$ por el factor de espacio fásico, dividido por el flujo incidente. Este es el resultado que se obtiene en primer orden de teoría de perturbaciones y que coincide con la conocida regla de oro de Fermi. La amplitud de difusión debida al intercambio de un único bosón es igual al producto de los dos factores de vértice g_0 y g_s que describen el acoplamiento del bosón a las partículas difusora y difundida y del término debido al propagador. Para deducir una expresión del término del propagador, se puede utilizar la idea de que la difusión es causada por un potencial tipo Yukawa. En la llamada primera aproximación de Born,[20] la amplitud de difusión viene dada por la transformada de Fourier del potencial $V(r)$:

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r)e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r}$$

siendo m, la masa de la partícula que interacciona con el potencial. Como el potencial es central; es decir, con simetría esférica, se cumple que:

$$f(q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r)e^{iqr\cos\theta}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty rV(r)\sin(qr)dr$$

y cuando se usa un potencial de Yukawa de la forma $V(r) = \beta\frac{e^{-\mu r}}{r}$ como el visto en (15.22) se llega a:

$$f(q^2) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2(q^2+\mu^2)} \qquad (15.23)$$

donde q es el momento transferido en la interacción y μ contiene la masa del propagador. En el caso de una interacción elástica, $q = 2k \sin(\theta/2)$, elmomento está relacionado con el ángulo de difusión. La constante β, contiene los dos factores de vértice g_0 y g_s, que generalmente coinciden. Se aprecia pues que el propagador f representa la ley de fuerza debida al potencial V.

Se describen a continuación las tres fuerzas o interacciones incluidas en el Modelo Estándar. Al final del capítulo se justifica la ausencia de la gravitación en la teoría de las partículas elementales.

15.4.1 Interacción electromagnética (QED)

La interacción electromagnética es debida a la carga eléctrica de los constituyentes. Sus propiedades las describe la teoría mejor conocida hasta hoy: la electrodinámica cuántica, abreviadamente QED. Es la más simple y la que más éxitos ha cosechado.

El fotón es el cuanto del campo A_μ que se acopla a la carga eléctrica. Esta interacción puede representarse por un diagrama de Feynman de su vértice fundamental. La intensidad de la interacción viene dada por la carga eléctrica, e, que define la conocida constante de estructura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \qquad (15.24)$$

proporcional a e^2 y es el parámetro que caracteriza la interacción electromagnética. La probabilidad de emisión o absorción de un fotón es proporcional a la constante de acoplamiento. En la figura 15.8 aparecen cuatro vértices elementales, en donde se ha utilizado el electrón (o el positrón) como ejemplo aunque cualquier partícula cargada, con carga

unidad, posee el mismo acoplamiento. Aparecen los vértices elementales de la aniquilación, materialización, efecto Compton y *bremsstrahlung*. Todos ellos tienen un acoplamiento dado por la carga eléctrica del electrón, que al intervenir en un proceso físico, su sección eficaz es proporcional a la constante α de (15.24).

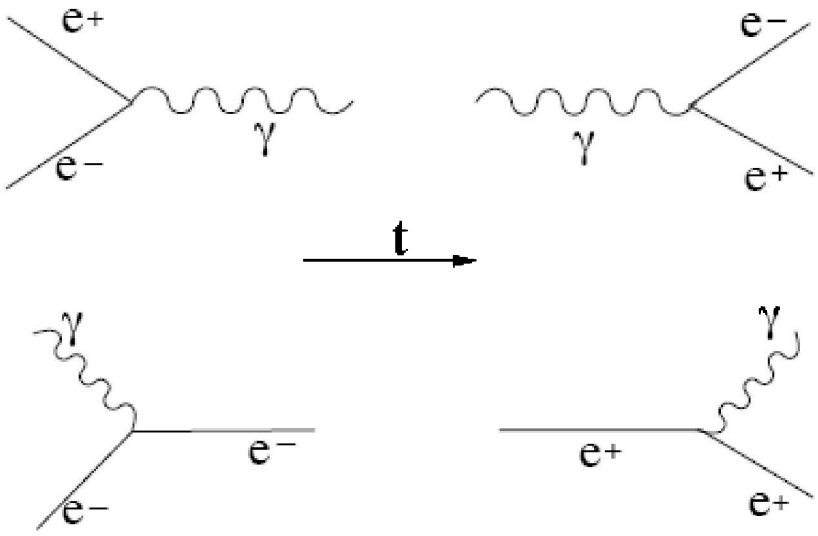


Figura 15.8: Diagramas de Feynman de los vértices que describen los acoplamientos básicos de la teoría electrodinámica cuántica.

Estos procesos elementales son puramente virtuales porque no conservan la energía. En efecto, tómese por ejemplo el diagrama de *bremsstrahlung* del positrón de la figura 15.8. La carga (Q), el momento (p) y el momento angular (J) se conservan, aunque sin embargo la energía no se conserva. En efecto, utilizando la notación $(\mathrm{E},\vec{k})$ para indicar el cuadrivector energía-momento se tiene:

$$\mathrm{e}^+(E_0,0) \rightarrow \mathrm{e}^+(E_k,-\vec{k}) + \gamma(kc,\vec{k})$$

que explícitamente conserva la cantidad de movimiento. Si el e^+ inicial está en reposo, $E_0 = mc^2$, el e^+ final tendrá una energía:

$$E_k = \sqrt{(kc)^2 + (mc^2)^2}$$

con lo que la diferencia de energía entre el estado final y el inicial será $\Delta E = E_k + kc - E_0$; es decir, se cumple $kc < \Delta E < 2kc$, en vez de ser nula. En conclusión, todos los procesos de la figura 15.8 sólo representan vértices fundamentales. Es una notación gráfica que describe las interacciones electromagnéticas posibles. Sin embargo un proceso en el que exista emisión y absorción del fotón virtual puede tener lugar, ya que entonces la energía y el momento pueden conservarse entre las partículas reales del estado inicial y final, con lo que por ejemplo podría darse la difusión electrón-electrón según la figura 15.9.

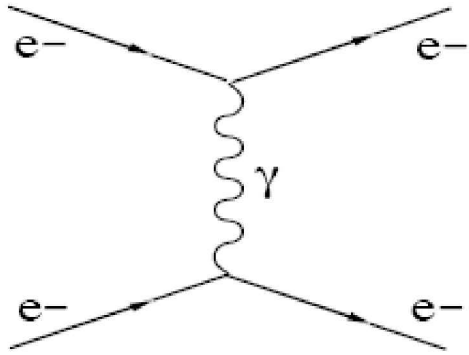


Figura 15.9: Diagrama de Feynman de primer orden de teoría de perturbaciones que explica la difusión elástica e^-e^-.

Este último es uno de los infinitos diagramas de Feynman que explican la interacción e^-e^-. Es el diagrama más sencillo: sólo se intercambia un fotón virtual, es decir representa un proceso de primer orden en teoría de perturbaciones (*leading-order*), que da la contribución dominante debido a que los otros diagramas de orden superior corresponden a procesos en los que intervienen potencias más elevadas de $\alpha = \frac{1}{137}$, la constante de acoplamiento entre cargas. Al ser pequeña, permite una buena convergencia de los cálculos. Puede entenderse también un diagrama muy parecido al anterior que representa la interacción electrón-positrón

$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ y que se muestra en la figura 15.10. Este proceso se denomina difusión *Bhabha* y en este caso hay dos posibilidades de intercambio de fotón y los dos diagramas son necesarios para explicar el fenómeno. Cada diagrama representa una amplitud de probabilidad; para calcular la probabilidad hay que calcular el módulo de la suma al cuadrado. Los dos diagramas se suelen clasificar según las variables cinemáticas *s, t,* de Mandelstam (véase la Sección 16.2.4): **(a)** Diagrama de la difusión elástica e^+e^- (en la *vía t*) **(b)** Diagrama de Feynman de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ (en la *vía s*). Este último mecanismo es el mismo que se podría utilizar para la reacción $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ o incluso para explicar la producción de hadrones a través del acoplamiento a un par quark-antiquark: $e^+ + e^- \rightarrow q + \overline{q}$. Igualmente se podrían explicar los procesos de producción de pares o la colisión Compton.

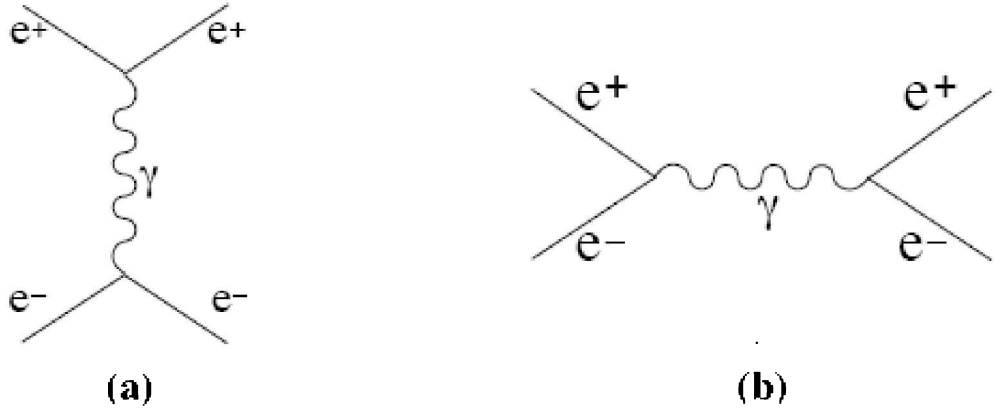


Figura 15.10: Diagramas de Feynman para la difusión *Bhabha*, es decir: $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$; a) difusión elástica y b) aniquilación.

El Hamiltoniano de la teoría QED describe el acoplamiento de cualquier fermión cargado con carga eléctrica $Q_f|e|$, representado por el campo *f*, solución de la ecuación de Dirac, con el fotón cuyo campo es A_μ:

$$(\mathcal{H}_I)_{QED} = \sum_f Q_f |e| \bar{f} \gamma^\mu f A_\mu \qquad (15.25)$$

donde se observa el acoplamiento proporcional a la carga eléctrica del fermión. Se ve también que la estructura es de tipo corriente×corriente porque el término $j^\mu = \bar{f}\gamma^\mu f$ se transforma como un vector bajo las transformaciones de Lorentz y A_μ es también un cuadrivector.

La teoría QED es la mejor conocida y estudiada y sus predicciones están verificadas experimentalmente hasta varias cifras decimales. Esta teoría ha servido de modelo para las otras teorías de campos. Una de las características de la teoría QED es que es una teoría invariante *gauge*. Se dice que es una teoría invariante *gauge* local porque el lagrangiano de la interacción es invariante bajo las transformaciones de fase:

$$e^{i\varphi(x)}$$

Esta invariancia lleva a una propiedad de enorme repercusión práctica que es que la teoría es renormalizable. En efecto, existen diagramas de Feynman, llamados de autoenergía, que dan lugar a valores infinitos. Afortunadamente estos infinitos se eliminan al redefinir la masa y la carga del electrón. La teoría QED es también una teoría *gauge* abeliana; la consecuencia es que no existe acoplamiento entre dos fotones ($\gamma\gamma$). Esto no sucede en las otras interacciones que se estudiarán a continuación. Pero antes se recordará la difusión de Rutherford, por su importancia histórica.

La difusión de Rutherford

Como ya se ha visto anteriormente, las reglas de Feynman permiten el cálculo correcto de las probabilidades de reacción (secciones eficaces y vidas medias). Tómese por ejemplo la difusión de Rutherford, que se describe prácticamente por un diagrama muy similar al de la figura 15.9.

La amplitud de probabilidad de un proceso es el resultado del producto de tres cantidades:

- la amplitud de probabilidad de emisión de un fotón (proporcional a la carga eléctrica, *e*),
- la de propagación del fotón y
- la de absorción del fotón ($\propto e$).

es decir, si *q* es el momento transferido entre el electrón inicial y el final, $\frac{d\sigma}{dq^2} \propto \left|\sqrt{\alpha}\frac{1}{q^2}\sqrt{\alpha}\right|^2$ o sea, una probabilidad proporcional a α^2, el cuadrado de la constante de estructura fina.

Más concretamente, es bien sabido que la sección eficaz diferencial de Rutherford $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R$ explica la difusión culombiana no relativista entre dos cargas puntuales. Por ejemplo podría aplicarse, en primera aproximación, a la difusión de un electrón, con carga eléctrica $-e$, por un núcleo cuya carga eléctrica es *Ze*; se obtiene la conocida fórmula:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]^2 \left(\frac{Ze^2}{4T\sin^2(\frac{\theta}{2})}\right)^2 = \frac{d_0^2}{16}\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \qquad (15.26)$$

siendo d_0 la distancia de máximo acercamiento al núcleo, obtenida al igualar la energía cinética *T* con la potencial,

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{Ze^2}{d_0}$$

Si se escribe en función del momento transferido entre el electrón inicial y final, $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$, al tratarse de una difusión elástica ($|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$) se cumple $q^2 = 4p^2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right) = \frac{4\pi Z^2\alpha^2}{q^4}$$

Pero en realidad es bien sabido que el núcleo es un objeto extenso; para tenerlo en cuenta, se introduce el factor de forma $F(\vec{q})$, que es la transformada de Fourier de la densidad de carga del blanco, con lo que la sección eficaz de Rutherford se escribe:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} \left[F(q^2)\right]^2$$

quedando, en función del momento transferido:

$$\left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right) = \frac{4\pi Z^2\alpha^2}{q^4} \left[F(q^2)\right]^2$$

15.4.2 Interacción débil y electrodébil

La primera manifestación de la interacción débil es la desintegración beta de los núcleos. Pronto se asoció la desintegración beta nuclear al proceso más elemental de la desintegración beta del neutrón: $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$. Ahora se sabe que en realidad es el cambio de sabor del quark *d* al quark *u* el que explica la desintegración del neutrón: $d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$, ya que tanto el protón como el neutrón son partículas compuestas por quarks. Inicialmente las desintegraciones débiles fueron descritas por la teoría de la interacción puntual de Fermi, que después se amplió y dio origen a la teoría V-A. El Tema 18 está dedicado al estudio de la desintegración de los leptones masivos y de los hadrones y se utilizará la teoría V-A. En particular se prestará atención al fenómeno de la violación de la paridad. Pero del estudio de las desintegraciones de los hadrones y de las interacciones de los neutrinos se llegó a la llamada teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam (GWS), una teoría

unificadora que explica las desintegraciones de los quarks y los leptones pesados. También explica las inter-acciones de los neutrinos y las interacciones de los leptones cargados en las que aparecen neutrinos. Esta interacción conserva los números leptónicos L_e, L_μ y L_τ. La teoría GWS supone la existencia de un triplete (cargas eléctricas 0,±)y un singlete (el fotón, de carga eléctrica 0) de bosones intermediarios sin masa; pero a baja energía la simetría se rompe y tres de los bosones adquieren masa: son los bosones $W^{\pm}$, Z^0, descubiertos en 1983 en el CERN en un experimento realizado en el colisionador $Sp\overline{p}S$ a una energía de 270 GeV por haz, a través de sus desintegraciones:

$$W^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e \qquad \text{y} \qquad Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$$

y se aamplía su estudio en la Sección 18.6 del tema dedicado al estudio de la interacción electrodébil. Se llama teoría electrodébil porque unifica la interacción electromagnética y la débil. Una manera inmediata de constatar que las dos interacciones están *unificadas* es que la teoría predice que las constantes de acoplamiento débil (la constante de Fermi, G_F) y la constante de estructura fina, α, están relacionadas entre sí:

$$\boxed{G_F = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{(M_W \sin\theta_W)^2}} \qquad (15.27)$$

donde $\sin^2\theta_W$ es un parámetro de la teoría (el ángulo de Weinberg, o el ángulo de mezcla débil) cuyo mejor valor medio actual, medido en los experimentos del colisionador LEP del CERN y del SLC de SLAC, es:

$$\sin^2\theta_W = 0,23152 \pm 0,00023 \qquad (15.28)$$

Una vez conocido el valor del $\sin^2\theta_W$, se puede determinar G_F la constante débil (que ya introdujo Fermi en su teoría) y de aquí determinar la masa de los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z que se dan en la tabla 15.4 y que están relacionados por:

$$M_W = M_Z \cos\theta_W \qquad (15.29)$$

Si se utiliza una notación parecida a la de la constante de estructura fina, es decir introduciendo una constante α_W proporcional a la carga débil, e_W^2, se encontraría un valor cercano a $\alpha_W \sim 4\alpha$ (véase la tabla 15.3). La teoría electrodébil postula que la interacción débil es debida al intercambio de alguno de los tres bosones intermediarios: $W^{\pm}$, Z^0. La fuerza es debida a la carga débil, una propiedad que poseen todos los constituyentes elementales de la materia, quarks y leptones, tengan o no tengan carga eléctrica. Otra de las propiedades de la teoría que describe la interacción electrodébil es que es una teoría invariante *gauge* no abeliana.

Tabla 15.3: Características de las interacciones entre constituyentes fundamentales (quarks y leptones).

interacción	cuanto del campo	Acoplamiento a quarks	leptones	Constante de acoplamiento	alcance (m)
Electromagnética	γ	$qq\gamma$	$\ell\ell\gamma$	$\alpha = 1/137$	∞
Fuerte	g	$q_r q_b g_{r\bar{b}}$	–	$\alpha_s \approx 100\alpha$	10^{-15}
Débil	$W^{\pm}, Z^0$	$W q_u q_d$	$W\ell\nu_\ell$	$\alpha_w \approx 4\alpha$	10^{-18}

Como la teoría es invariante *gauge* no abeliana, se da la circunstancia que los bosones también interaccionan entre sí, existiendo acoplamiento tres o cuatro bosones, como se muestra en la figura 15.11.

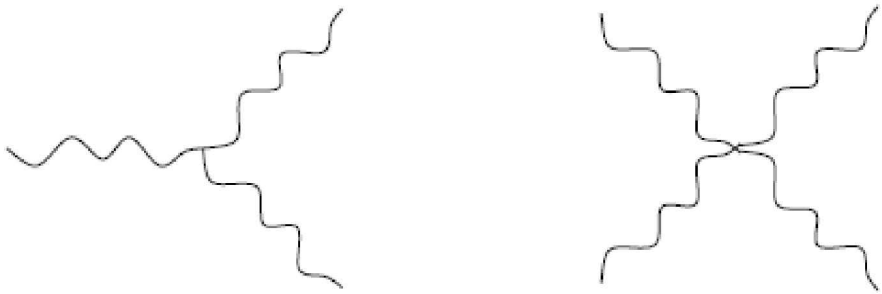


Figura 15.11: Autoacoplos de los campos *gauge* no abelianos. Los autoacoplos cuádruples pueden darse en WWWW, WWZZ, WWZ_γ y $WW_{\gamma\gamma}$

El bosón cargado $W^{\pm}$ es responsable de las llamadas corrientes cargadas, es decir, desintegraciones en las que un quark se transforma en otro cambiando su carga eléctrica (cambio de sabor) o un leptón se transforma en su neutrino (también cambio de sabor). En este último caso el acoplamiento básico es $W\ell\nu_{\ell}$ siendo ℓ uno de los tres leptones y $\nu\ell$ su neutrino asociado. En el caso de los quarks, el bosón $W^{\pm}$ acopla quarks con distinta carga eléctrica (ud, cs, tb); se puede entonces entender la desintegración del neutrón como debida al cambio de sabor de uno de sus quarks constituyentes, el quark d, como se puede constatar en la figura 15.12 que muestra el diagrama de Feynman correspondiente.

Hay, sin embargo, una observación sorprendente: las corrientes cargadas acoplan pares de quarks $u - d'$, $c - s'$, $t - b'$, siendo los quarks prima resultado de una mezcla entre ellos. La mezcla viene representada por la famosa matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), generalización de la teoría de Cabibbo. Esto implica que el bosón $W^{\pm}$ acopla también, pero con menor probabilidad, a quarks que pertenezcan a dos familias diferentes: (us, ub, …). Todos los acoplamientos básicos se pueden ver en los diagramas de Feynman de la figura 15.13(a). Siempre hay un cambio de sabor entre quarks.

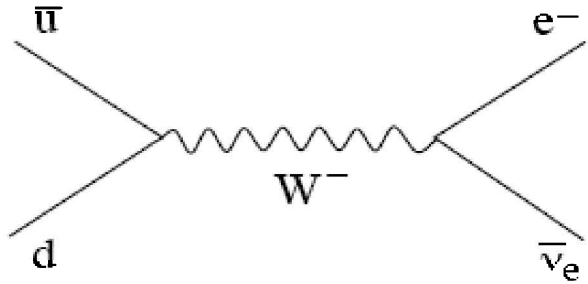


Figura 15.12: Diagrama de Feynman de primer orden de teoría de perturbaciones que explica la desintegración beta del neutrón a través del cambio de sabor del quark d.

El bosón Z^0, como no tiene carga eléctrica, sólo puede acoplarse al mismo par leptón-antileptón o al par $q\ \overline{q}$ de idéntico sabor. Las

interacciones del bosón Z, igual que las del fotón, no cambian el sabor de los constituyentes elementales. En la figura 15.13**(b)**, pueden verse los diagramas de Feynman básicos de las denominadas corrientes neutras.

La teoría de Glashow Weinber y Salam, incorpora todos estos fenómenos, considerando que los leptones se pueden agrupar en dobletes de isospín débil *L* (levógiros, con helicidad $\lambda = -1$) y singletes *R* (dextrógiros, sólo para leptones cargados), los quarks se pueden agrupar en dobletes $(u\ d)_L$ y singletes u_R y d_R (obsérvese que para quarks existen dos singletes y no uno sólo como para leptones). Los dobletes tiene isospín débil $I^W = 1/2$ y los singletes, lógicamente $I^W = 0$. La hipercarga débil se calcula utilizando la fórmula de GellMann-Nishijima, $Q = I_3^W + Y^W/2$, siendo *Q* el número de carga eléctrica. Con esta definición se pueden verificar las cargas débiles de todos los fermiones fundamentales en la tabla 18.3. El hamiltoniano de interacción, incluyendo cualquier fermión *f* (leptón o quark), se puede desarrollar para obtener una expresión donde aparezcan explícitamente los acoplos de los fermiones *f* con los bosones $W^{\pm}$, Z y el fotón *A*, llegando a una expresión del tipo $\mathcal{H}_I = (\mathcal{H}_I)_c + (\mathcal{H}_I)_n$. La parte de las corrientes cargadas es:

$$(\mathcal{H}_I)_c = \sum_f g_W \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma^5) f' W_\mu^- \quad + h.c. \tag{15.30}$$

$$\text{siendo} \quad g_W = g/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad v_f = a_f = +1/2$$

con lo cual las corrientes cargadas son de tipo V-A. En esta expresión, *f* es la primera componente del doblete de isospín y *f'* la segunda. En realidad *f'* es la mezcla de estados cuyos coeficientes están determinados por la matriz CKM. Se añade el hermítico conjugado (*h.c.*) para incluir el proceso conjugado de carga. En lo que respecta a la parte neutra (incluidas las interacciones del fotón) se llega a

$$(\mathcal{H}_I)_n = \sum_f \left[Q_f |e| \bar{f} \gamma^\mu f A_\mu + g_Z \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma^5) f Z_\mu \right] \qquad (15.31)$$

siendo $g_Z = g/2\cos\theta_w$, $v_f = I_3^W - 2Q_f \sin^2\theta_w$ y $a_f = I_3^W$

con lo cual únicamente la corriente neutra del neutrino es de tipo V-A. Más explícitamente se obtiene la tabla 15.4 de coeficientes para los acoplos vectorial y axial del bosón Z.

Una vez obtenidos los acoplos de los bosones W y Z, se puede proceder a determinar sus anchuras y cocientes de desintegración. El bosón W puede desintegrarse en cualquier par fermiónico $f\bar{f}'$ con tal de que la suma de las masas de f y f' sea inferior a la masa del W. Esto elimina únicamente el modo $t\bar{b}$ ya que la masa del quark t es superior a la del bosón W. Existen, por tanto, 5 modos posibles de desintegración. El bosón Z puede desintegrarse en cualquier par fermiónico $f\bar{f}$ con tal de que el doble de la masa de f sea inferior a la masa del Z. Esto elimina únicamente el modo $t\bar{t}$. El el caso del bosón Z, existen 11 modos de desintegración. Puede verse el resumen de las medidas de los bosones intermediarios y los resultados obtenidos en la Sección 18.6 que constituyen un importante test del modelo estándar.

Tabla 15.4: Coeficientes para los acoplos vectorial y axial del bosón Z.

f	v_f	a_f	f	v_f	a_f
u	$+\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$+\frac{1}{2}$	ν	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
d	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$	ℓ	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$

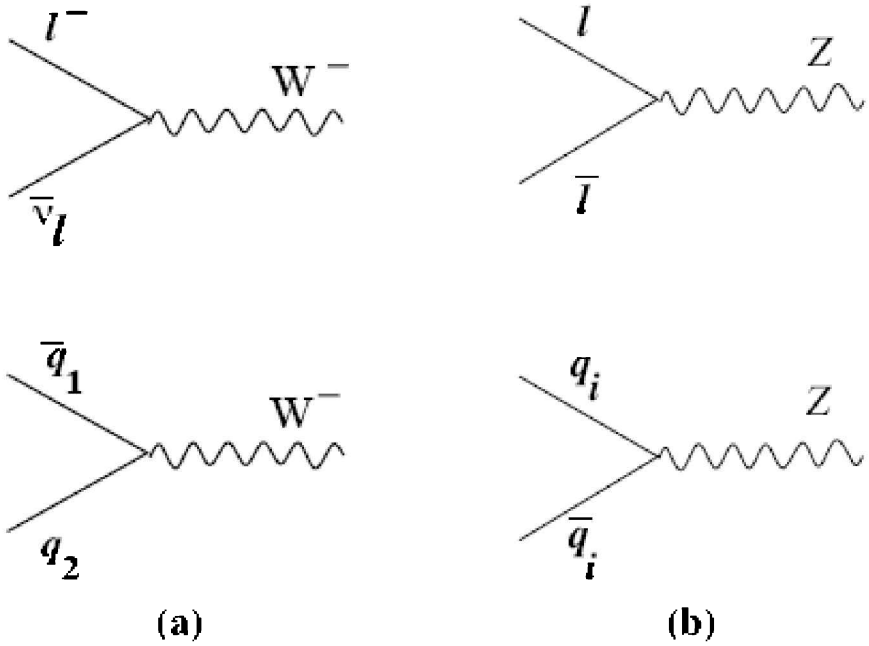


Figura 15.13: Acoplamientos fundamentales de la interacción débil: **(a)** por intercambio de $W^{\pm}$ (corrientes cargadas); la constante de acoplamiento es g_W. **(b)** por intercambio del bosón Z^0, es decir de procesos llamados de corrientes neutras, cuya constante de acoplamiento es g_Z.

15.4.3 Interacción fuerte (teoría QCD)

Históricamente se conoce como interacción fuerte la que liga los nucleones para formar los núcleos de la materia. Los primeros intentos de explicar la interacción fuerte, fueron llevados a cabo por Yukawa, quien postuló por primera vez la idea de intercambio de mesones para explicar la interacción *NN*. Así, en física nuclear existen modelos que han generalizado el intercambio de un pión y han explicado muchas propiedades de la interacción *NN* .

Pero hoy en día, tras los éxitos de los modelos de quarks constituyentes de los hadrones, se sabe que la interacción fuerte fundamental es la que existe entre quarks. Es la fuerza que los mantiene ligados en el interior de los hadrones.

La teoría cromodinámica cuántica (QCD), postula que la fuerza es debida al color de los quarks (cada quark puede tener 3 colores, representados por sus iniciales **r**, **v**, **a**) y el bosón del campo es el gluón, partícula sin masa y de espín 1, que al ser la teoría QCD una teoría *gauge* no abeliana, tienen también color, como los quarks, pero hay 8 gluones distintos. Un gluón acopla dos quarks con color, pero conserva el sabor (la interacción responsable del cambio de sabor es la interacción débil de corriente cargada). Uno de los posibles acoplamientos básicos de la teoría QCD puede verse en la figura 15.14 a) y la interacción fuerte fundamental entre dos quarks, q_r y q_a, aparece en el diagrama de Feynman de la figura 15.14 b). En realidad, a la constante de acoplamiento de QCD, se suele denominar g_s, con lo que $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ que recuerda el caso de QED. La intensidad de la interacción entre quarks, viene de nuevo dada por una constante de acoplamiento $\alpha_s \sim 1$, mucho mayor que la de la interacción electromagnética (véase la tabla 15.3).

Los gluones, contrariamente al caso del fotón, también tienen color. Por ello, en este caso también existen acoplamientos entre gluones. Ello es consecuencia de que la teoría QCD es una teoría *gauge* no abeliana. La consecuencia es que existen acoplamientos de tres (con acoplamiento igual a g_s) y cuatro gluones (con acoplamiento g_s^2) como puede verse en la figura 15.15

Una de las ideas más chocantes de esta teoría es que todos los hadrones observados son singletes de color. Esta idea obliga a que los entes fundamentales, que tienen color, estén confinados en el interior de los hadrones. Esto es lo que se denomina la esclavitud infrarroja: la fuerza fuerte aumenta con la separación entre quarks. Sin embargo, ha sido probado que a pequeña distancia los quarks se comportan como entes totalmente libres; este fenómeno se denomina libertad asintótica (este concepto puede visualizarse como la disminución progresiva de la constante de acoplamiento fuerte a pequeña distancia: $\alpha_s \rightarrow 0$, si $r \rightarrow 0$). Gracias a la libertad asintótica se han podido hacer predicciones en el

marco de la teoría QCD, realizando desarrollos perturbativos. Por el contrario, dado que la constante de acoplamiento $\alpha_s \sim 1$, fenómenos a grandes distancias (bajas energías) entre quarks no son calculables por teoría de perturbaciones ya que la serie no converge. Este concepto del confinamiento de los quarks fue desarrollado por los físicos estadounidenses David Gross, Frank Wilczek y H. David Politzer.

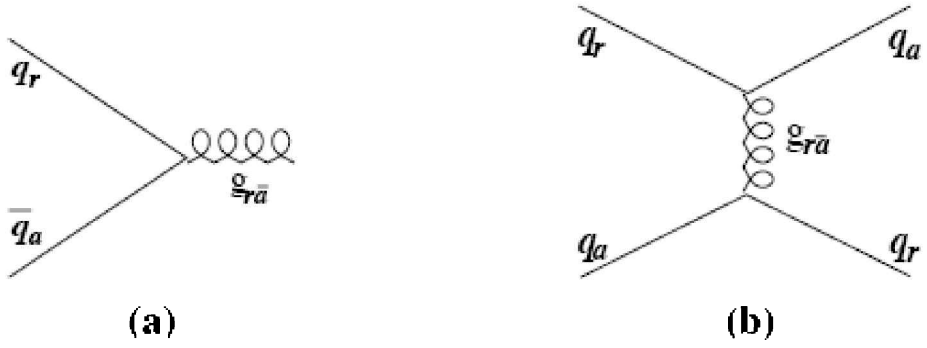


Figura 15.14: (a) Diagrama de Feynman de la interacción básica *qqg* de la teoría QCD. El color del quark cambia de *r* a *a* y por ello el gluón *g* tiene también color $r\bar{a}$. (b) Diagrama de Feynman de la interacción fundamental entre dos quarks (q_r y q_a) en la que se intercambia un gluón $g_{r\bar{a}}$.

Las teorías invariantes *gauge* predicen, como en el caso de QCD, que las constantes de acoplamiento no son tales constantes sino que son en realidad función de la escala de energía de las interacciones, o del momento transferido en la interacción q^2, es decir, función de la distancia a la que interaccionan los constituyentes en el proceso elemental.

Un resumen sobre las interacciones fundamentales, los bosones intermediarios y las constantes de acoplamiento puede verse en la tabla 15.3, donde también se consignan valores típicos de sus alcances.

Figura 15.15: Diagramas de Feynman de los vértices que describen los acoplamientos a 3 y 4 gluones de la teoría QCD.

15.4.4 Interacciones del bosón de Brout-Englert-Higgs

El bosón de Brout-Englert-Higgs se acopla a todos los constituyentes elementales (fermiones y bosones) con una intensidad proporcional a su masa. Este bosón se acopla a sí mismo, puesto que es masivo. La intensidad del acoplo del bosón de Higgs a los fermiones es proporcional a su masa; $g_{\mathrm{H}f\bar{f}} = m_f/v$ siendo *v* el valor esperado del campo de Higgs en el vacío: *v* = 246 GeV. Y el acoplo a los bosones intermediarios W, Z es proporcional a su masa al cuadrado: $g_{\mathrm{HVV}} = 2m_{\mathrm{V}}^2/v$, $g_{\mathrm{HHVV}} = 2m_{\mathrm{V}}^2/v$ y sus autoacoplos son $g_{\mathrm{HHH}} = 3m_{\mathrm{H}}^2/v$ y $g_{\mathrm{HHHH}} = 3m_{\mathrm{H}}^2/v^2$. Por consiguiente no se acopla a partículas de masa nula como el fotón y el gluón. Por ello se suele decir que las partículas que no inter-accionan con el bosón de Brout-Englert-Higgs, viajan a la velocidad de la luz. El descubrimiento del bosón de Higgs tuvo lugar en el colisionador de hadrones LHC. La interacción protón-protón a alta energía, es en realidad una interacción entre quarks. La figura 15.16 muestra los diagramas de Feynman que intervienen en la producción del bosón de Brout-Englert-Higgs.

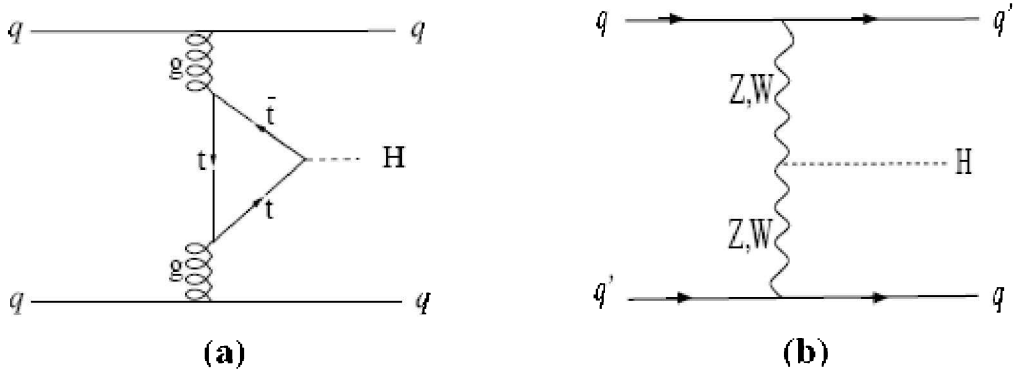


Figura 15.16: Diagramas de producción del bosón de Brout-Englert-Higgs:

a) Diagrama de fusión gluón-gluón y **b)** Diagrama de fusión de bosones vectoriales.

En el estado inicial, intervienen los quarks, pero los diagramas de Feynman son más complejos; presentan más vértices de interacción que los de primer orden vistos hasta ahora. La producción dominante en el LHC es la mostrada en el esquema a) y se llama *fusión gluón-gluón*. A las energías de operación del LHC en 2012, de 8 TeV en el cdm, la sección eficaz de producción es muy pequeña; aproximadamente $\sigma(gg \rightarrow H) = 25$ pb. El diagrama visible en b) contiene acoplamientos a los bosones intermediarios masivos y se conoce como *fusión de bosones vectoriales, VBF*. La sección eficaz de producción según este mecanismo es tan sólo del 10 % de la $\sigma(gg \rightarrow H)$. También puede tener lugar un tercer diagrama de producción de bosones intermediarios $W^{\pm}$, Z que producen el Higgs por el mecanismo llamado de Z o W-*strahlung*, ya que todo pasa como si el Higgs fuera emitido en un proceso parecido al de *bremsstrahlung*. Este diagrama se presenta en la figura 15.17. Como se puede apreciar, este diagrama requiere la presencia de antiquarks en el estado inicial, lo que al ser menos probable, da lugar a una sección eficaz más pequeña que las anteriores.

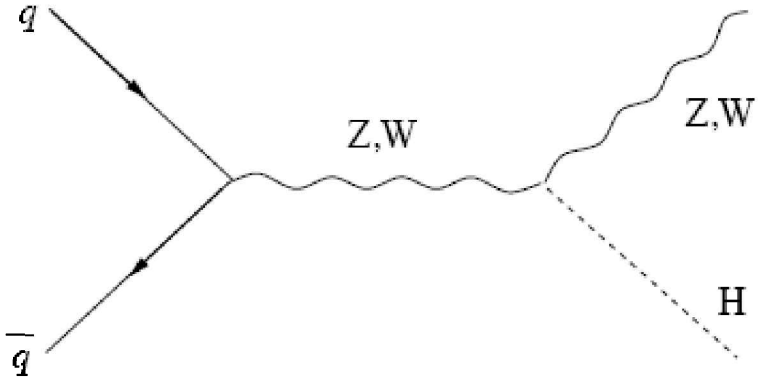


Figura 15.17: Producción del bosón de Higgs por Z o W-*strahlung*.

En cuanto a la desintegración del bosón de Higgs, los diagramas

mostrados en la figura 15.18 corresponden a un par de fermiones o a un par de bosones vectoriales masivos. Dado que la masa del Higgs descubierto es tan pequeña (~126 GeV), puede desintegrarse en dos fotones a través del mecanismo mostrado en la figura 15.19. Obsérvese que no existe acoplamiento directo del bosón de Higgs con los fotones, ya que éstos tienen masa nula. El acoplamiento se realiza a través del quark top o a través de los bosones $W^{\pm}$.

En la figura 15.20, puede verse el pico en el canal $H \rightarrow \gamma\gamma$, que también se observó en otros canales de desintegración como $H \rightarrow ZZ^{(*)}$. La notación Z^* recuerda que el bosón Z está fuera de su capa másica o que es virtual; es decir tiene una masa inferior al valor esperado puesto que el bosón de Higgs encontrado tiene una masa de ~126 GeV/c^2, que es inferior a $2M_Z$ (182,4 GeV/c^2).

Los datos que aquí se exponen corresponden a los del experimento ATLAS publicado en *Phys. Lett.*, **B716** (2012) 1-29 donde se reporta el valor de su masa: 126.0±0, 4(stat)±0, 4(sys) GeV/c^2 y donde se anuncia que la observación de esa señal es compatible con la producción y desintegración del bosón de Higgs previsto en el Modelo Estándar, con una significancia estadística de 5,9 desviaciones estándar (lo que equivale a una probabilidad de 1, 7×10^{-9} de ser una fluctuación del ruido de fondo). El número de desviaciones estándar supera la barrera del umbral que se fija para avalar el descubrimiento de un nuevo fenómeno; en este caso de una nueva partícula, que es de 5 desviaciones estándar. Por último, la figura 15.21 muestra los cocientes de desintegración del bosón H a dos bosones vectoriales. Aquí se puede apreciar la dificultad que entraña su descubrimiento, puesto de manifiesto en los canales de desintegración $H \rightarrow \gamma\gamma$ y $H \rightarrow ZZ^{(*)}$, que sólo representan una fracción del orden de uno por milenelcaso $H \rightarrow \gamma\gamma$ y del 1% en el caso $H \rightarrow ZZ^{(*)}$, respecto al total de las desintegraciones, para la masa del bosón de Higgs observada de ~126 GeV.

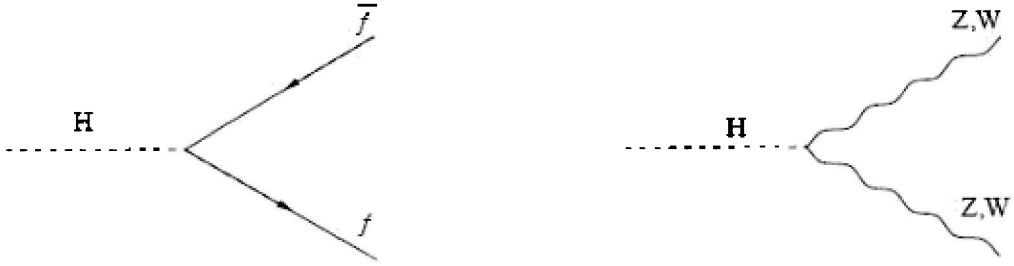


Figura 15.18: Diagramas de desintegración del bosón de Higgs a dos fermiones ($H \to f\bar{f}$) o a dos bosones vectoriales ($H \to W^+W^-$ o $H \to ZZ$). El descubrimiento del Higgs se realizó en los canales de desintegración a dos bosones vectoriales $H \to \gamma\gamma$ y $H \to ZZ^*$.

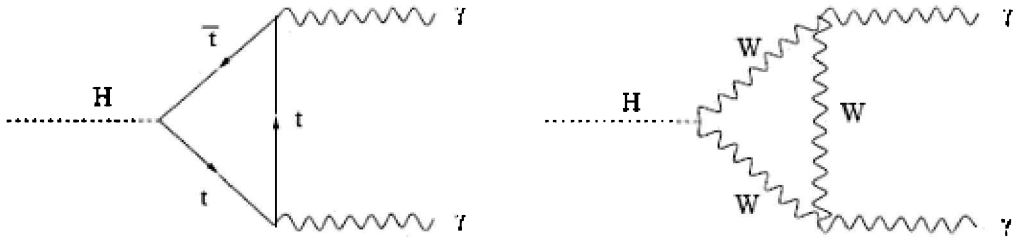


Figura 15.19: Diagramas de desintegración del bosón de Higgs a dos gammas. El descubrimiento del Higgs se realizó en el canal de desintegración a dos bosones vectoriales $H \to \gamma\gamma$ y $H \to ZZ^*$.

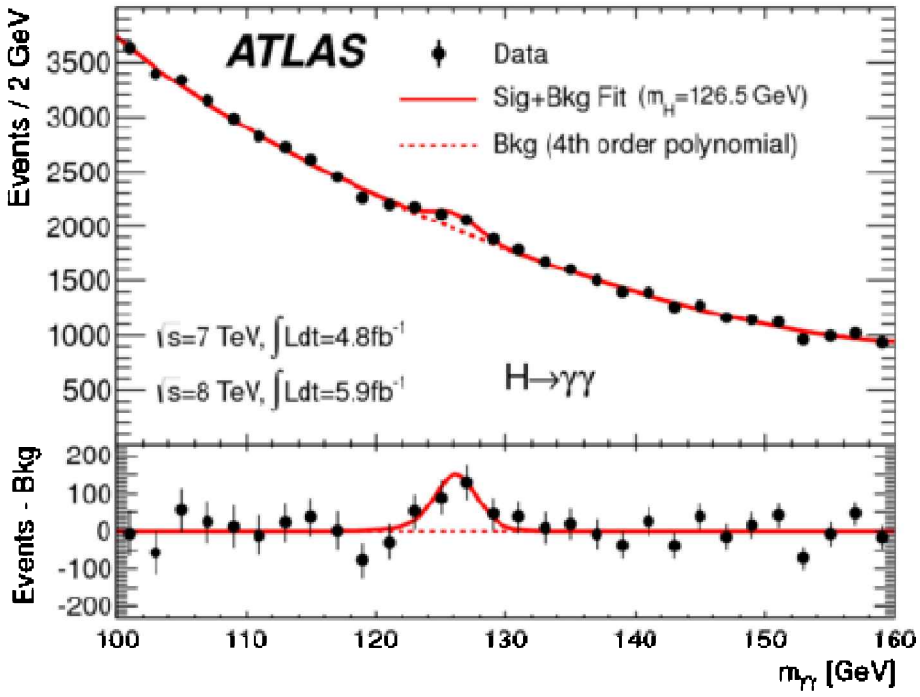


Figura 15.20: Espectro de masas $\gamma\gamma$ que muestran la evidencia de la desintegración del bosón de Higgs en el experimento ATLAS del CERN.

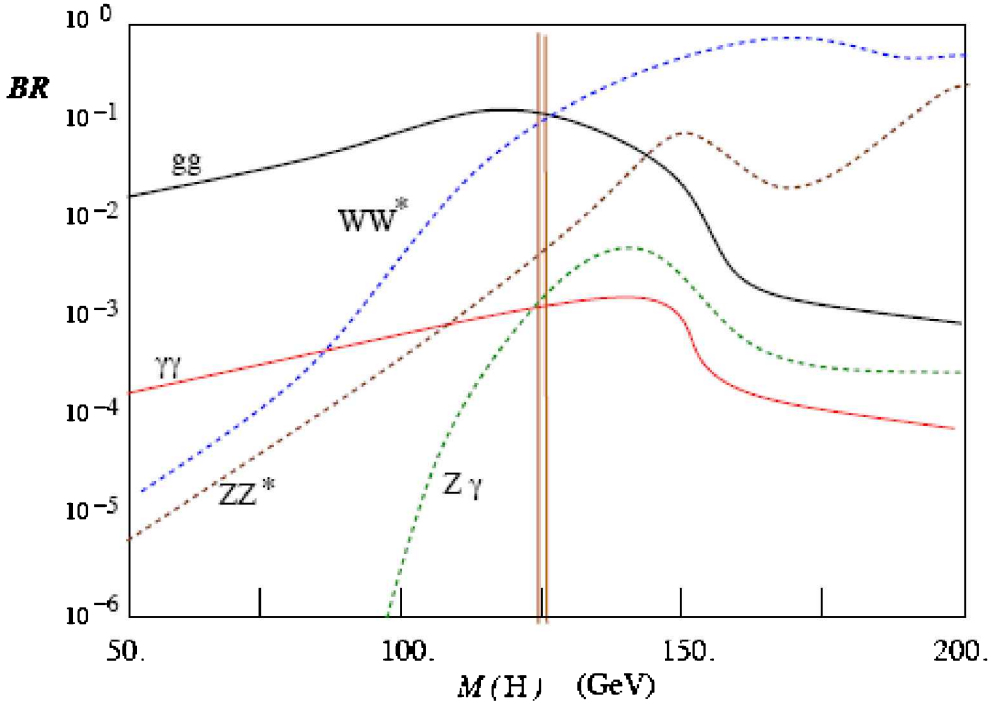


Figura 15.21: Cociente de desintegración del bosón de Higgs a dos bosones vectoriales, en función de la masa del Higgs. El descubrimiento del Higgs se realizó en los canales de desintegración $H \to \gamma\gamma$ y $H \to ZZ^*$, con el valor de la masa marcada en 126 GeV.

15.4.5 Diagramas de quarks

Una forma conveniente y sencilla de visualizar los procesos de interacción entre hadrones es utilizando los diagramas de líneas de quarks. Así por ejemplo, la desintegración fuerte de la resonancia Δ(1232):

$$\Delta^{++} \longrightarrow p + \pi^{+} \qquad (15.32)$$

puede verse en la figura 15.22**(a)**. En efecto, los números cuánticos de la resonancia Δ^{++} equivalen a los del estado *uuu*, luego el proceso entre quarks puede escribirse:

$$uuu \longrightarrow uud + u\bar{d}$$

En la citada figura se observa que el intercambio de un gluón (la interacción fuerte) es el responsable de la creación de un par quark-antiquark. De la misma manera, en la reacción $\pi^+ p$ puede entenderse la formación de la resonancia Δ, como se muestra en el esquema de la figura 15.22(b). Otro ejemplo es el de la producción de resonancias. Para ello, debe existir producción de muchas partículas en el estado final. En la figura 15.23, se puede ver el proceso $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- p$, en el que se pueden producir dos resonancias, la $\Delta^0 \rightarrow \pi^- p$ y la $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-$.

Los diagramas de quarks no son diagramas de Feynman porque no representan interacciones. Sin embargo, los diagramas de quarks son de gran utilidad porque plasman la conservación del número de quarks. También han servido para descubrir reglas, que prohiben por ejemplo que puedan existir procesos en los que las líneas de quarks se crucen entre sí (deben aparecer desconectadas); un ejemplo es la regla de OZI (se presentará en la Sección 17.6).

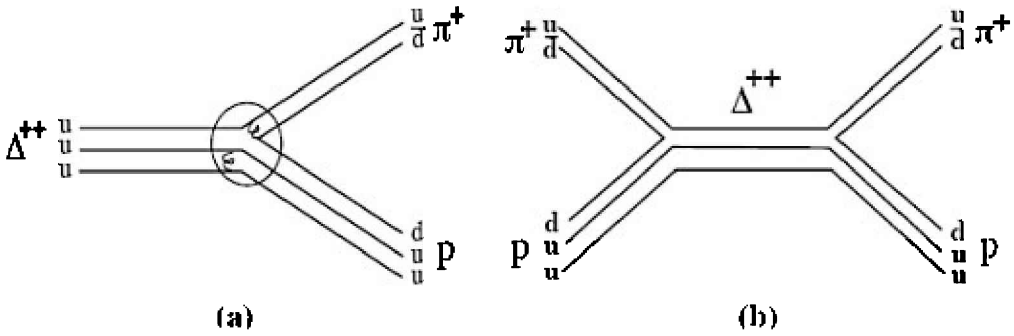


Figura 15.22: **a)** Diagrama de quarks de la desintegración de la resonancia $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ y **b)** Diagrama de quarks de la interacción $\pi^+ p$.

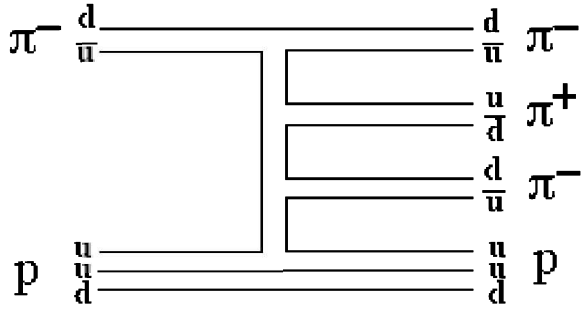


Figura 15.23: Diagrama de quarks de la interacción $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- p$.

15.5 El Modelo Estándar

A modo de síntesis de los conceptos vistos en este tema, es oportuno reunir en este apartado las ideas que estructuran el esquema general del llamado Modelo Estándar. El Modelo Estándar de las partículas y sus interacciones está concebido como una teoría cuántica, relativista y que cumple la invariancia *gauge*. Hay 3 tipos de partículas, que se clasifican según su espín:

1/ bosones vectoriales (de espín 1), que contiene todos los bosones inter-mediarios; los 8 gluones con color, que transmiten la fuerza fuerte descrita por la teoría QCD; los tres bosones masivos $W^{\pm}$, Z y el fotón sin masa que intervienen en las interacciones electrodébiles.

2/ los fermiones constituyentes (de espín 1/2), agrupados en tres dobletes de familias de quarks y leptones, con masa diferente.

3/ el bosón escalar de Brout-Englert-Higgs (de espín 0); residuo de la rotura espontánea de simetría en la interacción electrodébil y cuyo valor esperado en el vacío da la masa a los bosones intermediarios masivos y a los fermiones constituyentes. Podría haber más de un bosón de Higgs.

Hay tres interacciones: la interacción fuerte, la débil y la electromagnética, estas dos últimas unificadas según el esquema de Glashow, Weinberg y Salam. Simbólicamente el grupo *gauge* que engloba estas interacciones se escribe:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

C de color, *L* de levógiro e *Y* de hipercarga débil. Cada familia de fermiones aparece pues en 5 multipletes según su carga:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \mathrm{e}^- \end{pmatrix}_L, \mathrm{e}_R, \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}_L, \mathrm{u}_R, \mathrm{d}_R$$

los singletes dextrógiros sólo tienen hipercarga débil. Los dobletes que se acoplan al $W^{\pm}$ son levógiros; sólo sienten la fuerza *SU*(2). Como cada quark aparece con 3 colores, hay 15 partículas por familia y en total 45 fermiones. Al añadir los bosones, existen 58 partículas. Y a todo esto hay que añadir 19 parámetros que hay que medir: las 9 masas de fermiones (en el Modelo Estándar, los neutrinos se supone que tienen masa nula, aunque es bien sabido que tienen masa, aunque es muy pequeña), 4 parámetros de la matriz CKM, 3 constantes de acoplamiento y M_Z, m_h^0 y θ de QCD). Probablemente, demasiadas partículas y demasiados parámetros.

15.6 La gran unificación

El hecho que se ha descrito, que las constantes de acoplamiento de las tres interacciones descritas no son tales, sino que varían con la distancia (o con la escala de energía), puede interpretarse como una consecuencia de la polarización del vacío. Si se acerca una carga eléctrica a otra carga eléctrica,ésta se apantalla debido a la creación de pares e^+e^-, con lo que todo pasa como si la carga eléctrica fuera aumentando a medida que se acerca más al electrón. La constante α, aumenta a medida que la distancia se hace más pequeña; $r \to 0$. Este efecto, es el opuesto al del color; en este caso existe antiapantallamiento, y como consecuencia de ello, α_s, la constante de acoplamiento fuerte, va disminuyendo. Lo mismo sucede con la constante débil, puesto que también se trata de una teoría

gauge no abeliana. Se ha comprobado efectivamente que las constantes de acoplamiento α de las interacciones evolucionan con Q^2, el momento transferido, según:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha(Q_0^2) \ln(Q^2/Q_0^2)} \qquad (15.33)$$

siendo Q_0 un momento transferido que se toma arbitrariamente y que por lo tanto puede hacerse todo lo grande que se quiera. La constante β_0 depende de la interacción:

$$\beta_0 = -\frac{1}{3\pi} \sum_f e_f^2 \quad \text{(QED)}$$

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \qquad \text{(QCD)}$$

De esta manera, la constante de acoplamiento de QCD viene dada por:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)} \qquad (15.34)$$

donde n_f es el número de sabores de quarks cuya masa cumple $m^2 < Q^2$ (hasta hoy se sabe que el número de sabores máximo es $n_f^{max} = 6$) y Λ es una constante que debe ser medida experimentalmente; en la masa del Z, como $n_f = 5$ su valor es $\Lambda \approx 100$ MeV y depende de Q^2. Marca la escala de masas que separa el mundo de los hadrones (región no perturbativa) del mundo de quarks y gluones que interaccionan como si estuvieran libres (región perturbativa). Se ha verificado experimentalmente que α_s disminuye con Q^2. Puede comprobarse en la figura 15.24, que muestra los valores de α_s hasta la máxima energía alcanzada en el colisionador LEP del CERN en el año 2000. Por ejemplo

para $Q^2 = M_Z^2$, es decir para una energía equivalente a la masa del Z^0, la constante ha sido determinada y vale:

$$\boxed{\alpha_s(M_Z) = 0{,}1184 \pm 0{,}0007} \qquad (15.35)$$

y también se verifica la libertad asintótica; los quarks a pequeñas distancias se comportan como si fueran libres, lo que significa que $\alpha_s \rightarrow 0$ cuando $Q \rightarrow \infty$.

Esta variación de las constantes de acoplamiento, visible en la figura 15.25, cuando disminuye la distancia (o lo que es lo mismo, cuando aumenta la energía o el momento transferido Q), permite creer que las tres constantes de acoplo de las tres interacciones convergen en un punto. El punto de unificación que se obtendría se sitúa a distancias del orden de $R_o \sim 10^{-31}$ m.

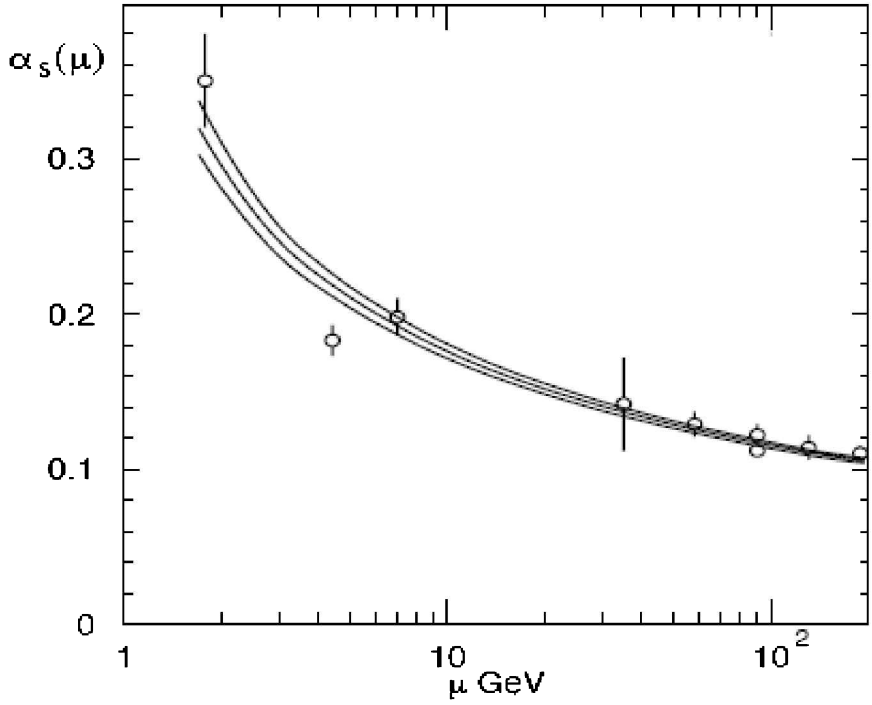


Figura 15.24: Evolución del valor de la constante de acoplamiento α_s en

función de μ, valor de la masa de la partícula inestable o del momento transferido en la interacción.

En el punto de unificación, se espera que las constantes de acoplamiento de las tres teorías tengan el mismo valor. Es como si las tres teorías se fundieran en una sola. Se tendría la unificación de las tres interacciones. El bosón *X*, ¡con una masa cercana a los 10^{15} GeV!, sería el responsable de estos procesos en el sector unificado. Los quarks pueden desintegrarse en leptones. El protón, por ejemplo podría desintegrarse dando:

$$p \rightarrow e^{+} + \pi^{0} \qquad (15.36)$$

proceso del que se intenta determinar la vida media y que de momento sólo se ha determinado experimentalmente un límite inferior que vale $\tau_p > 10^{31}$ a 10^{33} años, dependiendo del modo de desintegración. La medida de la desintegración del protón es un desafío iniciado por los años 1970 en experimentos subterráneos (KAMIOKANDE en Japón; IMB en EEUU) para protegerse de la contaminación de rayos cósmicos, motivada por las predicciones de las teorías de gran unificación. Los experimentos diseñados para medir la vida media del protón deben acumular mucho material (mil toneladas de agua contienen unos 10^{32} protones, con lo que vidas medias del orden de 10^{30} años darían lugar a una desintegración por día). La desintegración del protón no se ha detectado hasta hoy. Sin embargo, los experimentos diseñados para ello, han tenido un éxito inesperado detectando las interacciones de neutrinos de supernova y resolviendo el problema de los neutrinos solares y atmosféricos.

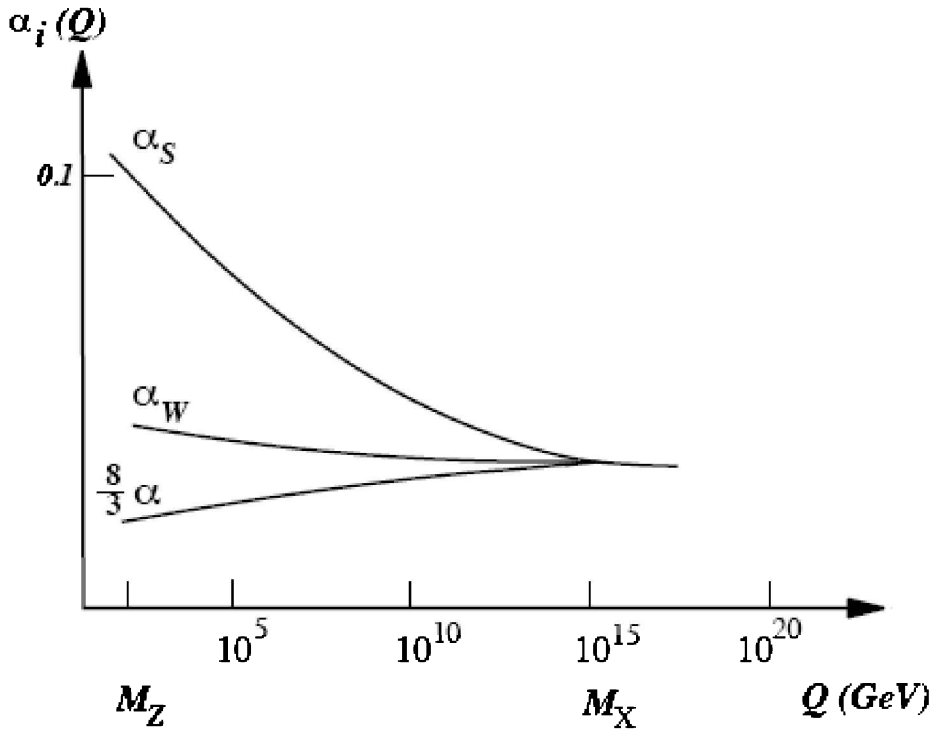


Figura 15.25: Evolución de los acoplamientos *gauge* en función de Q, el momento transferido en la interacción, según el esquema de gran unificación. Más allá de la escala de unificación, $\mu \sim 10^{15}$ GeV, las tres constantes de acoplamiento coincidirían. El factor 8/3 delante de la constante α resulta del cálculo de $\sum_f e_f^2$, para f = u, d, e.

En el mundo subatómico la interacción gravitatoria es despreciable. En efecto, como la constante de Newton $G_N = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, si se toma como unidad la masa del protón, la constante adimensional vale:

$$\frac{G_N m^2}{4\pi\hbar c} = 4{,}6 \times 10^{-40}$$

lo que es insignificante comparado con los acoplamientos de las otras fuerzas existentes. El hecho de no tomarla en consideración no altera ninguna de las conclusiones, por ello no se ha incluido aquí.

La gravitación continuará siendo una fuerza sin influencia en la física de partículas ya que la masa de Planck:

$$m_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\mathrm{N}}}} \tag{15.37}$$

que fija la escala de masas relacionada con la constante de la gravitación de Newton, G_{N}, es aún mucho mayor ($m_{\mathrm{P}} \approx 10^{19}$ GeV) que la masa del bosón X de las teorías de gran unificación (de las fuerzas electrodébiles y fuertes). Además su inclusión como interacción en el Modelo Estándar, requiere una teoría cuántica, que todavía no se ha logrado establecer.

15.7 Problemass

15.1 Constantes de acoplo de las interacciones fundamentales.

a) Utilizando las fórmulas del texto, definir cuatro constantes adimensionales, α, α_w, α_s y α_g, que caractericen las cuatro interacciones fundamentales (electro-magnética, débil, fuerte y gravitacional).

b) Calcular el valor numérico de dichas constantes así como el error en dichos valores. Indicar cuando sea posible el método de medida utilizado (se podrán consultar los apéndices así como los datos aportados en el resto del libro).

15.2 El sistema de unidades naturales.

a) En el sistema de unidades naturales ($\hbar = c = 1$), la vida media del muón resulta ser

$$\tau = 192\pi^3/(G_{\mathrm{F}}^2 m_\mu^5)$$

y la sección eficaz de colisión $e^+e^- \to \mu^+ \mu^-$ se expresa en la forma

$$\sigma = 4\pi\alpha^2/(3s)$$

Calcular τ y σ en s^{-1} y barn, respectivamente.

b) El sistema de unidades naturales se puede extender a la interacción gravitacional haciendo $\hbar = c = G_N = 1$, en cuyo caso todas las magnitudes son adimensionales. Calcular en dicho sistema de unidades m_e, m_p, M_Z y M_{Planck}.

15.3 Cálculos con argumentos dimensionales.

a) Utilizando únicamente argumentos dimensionales y los diagramas de Feynman correspondientes, estimar la vida media de las siguientes partículas: μ, π^+, n, D^+, B^+ y Z, así como la vida media del positronio (estado ligado e^+e^-). Comparar estas estimaciones con los valores experimentales.

b) Con idénticos argumentos, obtener el valor de las secciones eficaces para los procesos $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, $e^-\gamma \to e^-\gamma$ y $\nu_e n \to e^-$p. Comparar con los valores experimentales.

15.4 La ecuación de Dirac.

a) Demostrar que si ψ verifica la ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$, entonces verifica igualmente la de Klein-Gordon $(\partial^2 + m^2)\psi = 0$ y por tanto la ecuación de Dirac describe una partícula de masa m.

b) Demostrar que la ecuación de Dirac es invariante ante la transformación de Lorentz $x' = \Lambda x$, con tal de que se verifique la ley de transformación de los espinores $\psi'(x') = S\psi(x)$, donde la matriz S cumple $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S$. Considerar una rotación infinitesimal y demostrar que ψ describe una partícula de espín 1/2.

15.5 Límite no relativista de la ecuación de Dirac.

a) Considerar la descomposición de los espinores de Dirac $\psi = (\psi_A, \psi_B)$ siendo ψ_A y ψ_B espinores de Pauli (es decir de 2 componentes). Demostrar que en el límite no relativista y para

soluciones de energía positiva ($E > 0$), la ecuación de Dirac en un potencial coulombiano A^0 se reduce a la ecuación de autovalores

$$(\vec{P}^2/2m + eA^0)\psi_A \approx (E - m)\psi_A$$

mientras que $\psi_B \approx 0$. Concluir que ψ_A describe una partícula de masa m, espín 1/2 y carga $+e$.

b) Demostrar que para $E < 0$, se verifica

$$(\vec{P}^2/2m - eA^0)\psi_B \approx -(E + m)\psi_B$$

y por tanto ψ_B describe una partícula de masa m, espín 1/2 y carga $-e$.

15.6 Límite ultra-relativista de la ecuación de Dirac.

a) Demostrar que si $m = 0$, se pueden elegir las soluciones libres de la ecuación de Dirac de forma que sean igualmente autoestados del operador de helicidad $\lambda = \vec{S} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$.

b) Demostrar que estas soluciones son igualmente estados propios de γ^5 (se dice que son estados de quiralidad definida).

c) Demostrar que para $m = 0$, $\psi_L = (1 - \gamma^5)\psi$ describe una partícula *levógira* (helicidad negativa) o bien una antipartícula *dextrógira* (helicidad positiva).

---

[1]V. F. Hess, *Physik. Z.* **13** (1912) 1084

[2]Se denominan *hadrones* alas partículas que sienten la interacción fuerte o interacción nuclear. Se verán más adelante en el parágrafo 15.3.4 y, con mucho más detalle en el Tema 17 dedicado a la espectroscopía de hadrones.

[3]Joseph John Thomson (1856-1940) recibióel Nobel de Física en 1906. Fue el tercer director del Laboratorio Cavendish, sucediendo a John William Strutt (1842-1919) y al genial James Clerk Maxwell (1831-1879).

[4]J. Chadwick, *Nature*, **129** (1932) 312.

[5]C. D. Anderson, *The positive electron, Phys. Rev.*, **43** (1933) 491.

[6]C. D. Anderson, S. H. Neddermeyer, *Phys. Rev.*, 51 (1937) 884

[7]M. Conversi *et al.*, *Phys. Rev.*, **71** (1947) 209(L)

[8]Augustin, J. E., *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974) 1406.

[9]Aubert, J. J., *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974) 1404.

[10]Herb, S. W., *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 39 (1977) 252.

[11]Este es precisamente el proceso que Reines y Cowan estudiaron y permitió el descubrimiento por primera vez de interacciones de neutrinos.

[12]F. Abe *et al.*, *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 2966. En esta publicación se describe el experimento que llevó a cabo la Colaboración CDF en el que se presenta la primera evidencia experimental del quark *top* en el año 1994.

[13]F. Englert, R. Brout, *Phys. Rev. Lett.*, 13 (1964) 321; P. W. Higgs, *Phys. Lett.*, 12 (1964) 132 y *Phys. Rev. Lett.*, 13 (1964) 508

[14]ATLAS Collaboration, *Phys. Lett.*, **B716** (2012) 1-29

[15]CMS Collaboration, *Phys. Lett.*, **B716** (2012) 30

[16]En notación espectroscópica 1*s* representa el estado con números cuánticos $n = 1$ y $\ell = 0$.

[17]No debe haber confusión con la notación entre el espínylaextrañeza, que suelen representarse por la letra *S*, ni tampoco entre el número bariónico y la belleza, representados generalmente por la letra *B*.

[18]Los datos de las partículas contenidas en estas tablas pueden verse en la publicación bienal que realiza el *Particle Data Group*, (la correspondiente al año 2012 es: *Review of Particle Physics* J. Beringer *et al.*, *Phys. Rev.*, **D86** (2012) 010001). Véase también http://pdg.lbl.gov

[19]H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 17 (1935) 48

[20]Véase la subsección 5.2.2, donde se justifica esta aproximación.

16. Simetŕias y leyes de conservación

16.1 Introducción

Las simetrías y las leyes de conservación aparecen constantemente en la física. La importancia de las simetrías en física de partículas es que conducen a leyes de conservación. Este es el contenido del teorema de Noether, que dice que cada simetría de la naturaleza está asociada a una ley de conservación y viceversa. Ejemplos de esta conexión pueden verse en la tabla 16.1.

Tabla 16.1: Conexión entre simetría y ley de conservación que cumplen los sistemas físicos, consecuencia del teorema de Noether. Las tres primeras simetrías son espaciotemporales. La última simetría se refiere a la electrodinámica y es del espacio *interno* de las propiedades de las partículas.

invariancia		magnitud conservada
desplazamientos de t	→	E, energía total del sistema
desplazamientos de x	→	p, cantidad de movimiento total del sistema
rotaciones de θ	→	ℓ, momento angular total del sistema
transformaciones *gauge*	→	Q, la carga eléctrica

Matemáticamente, una simetría está asociada a una transformación que deja invariante la función de ondas del sistema físico, por lo tanto es una propiedad que puede cumplir cualquier tipo de interacción.

Las leyes de conservación están emparejadas con la existencia de números cuánticos que se conservan, es decir, permanecen inalterados antes y después de una interacción.

Algunas leyes son universales; son válidas para todas las interacciones. Por el contrario, hay simetrías que no son aplicables a ciertas interacciones. Un ejemplo es la paridad, que no se conserva en las interacciones débiles.

En ausencia de teorías, conocer bien las simetrías de un sistema y las leyes de conservación permite conocer muchas propiedades sobre una interacción.

16.1.1 Clasificación de las simetrías

Es posible establecer tres características que permiten clasificar las simetrías.

En primer lugar, existen dos tipos de simetrías según la naturaleza del espacio en el que se aplican:

- simetrías espacio-temporales: son consecuencia de propiedades del espacio-tiempo. Las leyes físicas son independientes del sistema de referencia utilizado para describir un fenómeno: debe existir invariancia bajo traslaciones y rotaciones.

- simetrías internas: son consecuencia de la propia estructura de las partículas. Las leyes físicas presentan invariancias bajo transformaciones de propiedades de las partículas, por ejemplo isospín I, conjugación de carga C o transformaciones del grupo SU(3), etc.

  Pueden también clasificarse en:

- simetrías continuas

  La invariancia bajo transformaciones continuas da lugar a números cuánticos aditivos.

- simetrías discretas

  La invariancia bajo transformaciones discretas da lugar a números cuánticos multiplicativos.

Porúltimo, existen teorías que cumplen un tipo de simetría muy particular, conocida como invariancia *gauge*. Es una simetría que se originó en el estudio del electromagnetismo, ligada a la elección del potencial (φ, A). Se puede elegir un potencial distinto si se exige la invariancia de las ecuaciones bajo la transformación *gauge*:

$$\Psi(\vec{x},t) \longrightarrow \Psi'(\vec{x},t) = e^{-iqf(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t) \qquad (16.1)$$

Estas simetrías pueden clasificarse como simetrías globales (se cumplen en todo el espacio; entonces la función f en (16.1) es una constante) o simetrías locales (la función escalar $f(\vec{x},t)$, depende de la coordenada espacial).

16.1.2 Invariancia y conmutación con *H*

Una forma de visualizar la conexión entre simetría y ley de conservación es a través de la propia ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$H|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$$

El hamiltoniano da lugar al operador evolución U (t, t_0) que permite obtener la función de ondas para cualquier instante de tiempo:

$$|\Psi(t\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle$$

siendo

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t - t_0)/\hbar}$$

Sea una magnitud física, representada por el observable cuántico *D*. Su evolución temporal vendrá dada por $D(t) = UD(t_0)U^+$. En la llamada representación de Heisenberg, el teorema de Ehrenfest estipula que:

$$i\hbar \frac{dD}{dt} = [H, D] \qquad (16.2)$$

con lo que si un operador conmuta con el hamiltoniano *H*, da lugar a una magnitud que se conserva. En efecto, si $|\varphi'\rangle = D|\varphi\rangle$ y $|\Psi'\rangle = D|\Psi\rangle$ se cumple que $\langle\varphi'|H|\Psi'\rangle = \langle\varphi|H|\Psi\rangle$ ya que *D* es un operador unitario, puesto que deja la norma del sistema invariante: $|\langle\varphi'|\Psi'\rangle|^2 = |\langle\varphi|\Psi\rangle|^2$.

Las operaciones de simetría suelen formar grupo (abeliano o no abeliano); puede ser un grupo finito o infinito y puede tratarse de un grupo continuo o discreto.

Los grupos más interesantes en física de partículas suelen estar representados por matrices (por ejemplo el grupo de Lorentz): a cada elemento del grupo *a*, le corresponde una matriz M_a.

16.2 Invariancia relativista

De capital importancia es la noción de invariancia relativista, que se deriva de la teoría especial de la relatividad. La teoría especial de la relatividad es necesaria para comprender las transformaciones entre sistemas inerciales; es decir, entre sistemas de referencia que se mueven con una velocidad relativa constante. Tiene dos principios básicos:

1) el principio de la relatividad, que dice que las leyes físicas deben ser idénticas en todos los sistemas inerciales, y

2) el principio de constancia de la velocidad de la luz, que implica que la velocidad de la luz es isótropa y de igual magnitud en todos los

sistemas inerciales. Es por ello que ningún ente puede desplazarse a una velocidad superior a la de la luz en el vacío, *c*.

La invariancia relativista implica que las ecuaciones físicas deben ser idénticas, independientemente del sistema de referencia inercial utilizado. Por ello, si se conocen las leyes físicas que gobiernan un sistema físico, ha de saberse cómo transformar sus observables dependiendo del sistema de referencia desde el que se observe. Estas transformaciones entre sistemas de coordenadas son las transformaciones de Lorentz (generalización de las conocidas transformaciones de Galileo de la física clásica). La invariancia Lorentz, coloca en el mismo plano al tiempo y al espacio.

Para estudiar las consecuencias de las transformaciones de Lorentz, se presenta a continuación la notación relativista basada en cuadrivectores.

16.2.1 Notación relativista

Las coordenadas relativistas de un punto en el espacio-tiempo (ct, x, y, z) = x^μ, forman un vector contravariante, que se denomina el cuadrivector posición x^μ, que también suele escribirse $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$, con el bien entendido que la coordenada 0 se refiere al tiempo ($x^0 = ct$). Análogamente se define el cuadrivector energía-momento: $(\frac{E}{c}, \vec{p}) = p^\mu$.

Sea $\hat{x}$ la coordenada de un punto en un sistema estacionario, cuyo origen de coordenadas es $\mathcal{O}$, como puede verse en la figura 16.1. Respecto a un sistema $\mathcal{O}'$, que se mueve a una velocidad v constante respecto al sistema fijo, la coordenada se transforma en $\hat{x}'$, y se aplica la transformación de Lorentz según el eje z:

$$\hat{x}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \hat{x}^{\nu} \qquad (16.3)$$

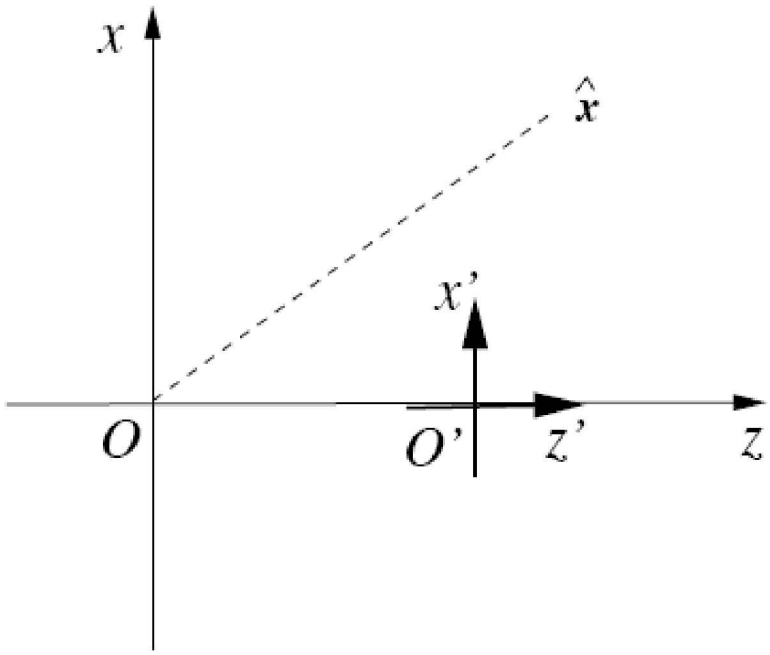


Figura 16.1: Representación gráfica del movimiento de un sistema de coordenadas ($\mathcal{O}'$) respecto al sistema laboratorio ($\mathcal{O}$), que se supone fijo con el observador.

En el caso general en el que el sistema $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $\vec{\beta}$ respecto de $\mathcal{O}$, la transformación de Lorentz es:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\beta}\gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{x} - ct\right)$$
$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{x}) \qquad (16.4)$$

En el caso de elegir la direcci ón de $\mathcal{O}'$ según el eje *z* la transformación es más sencilla, quedando matricialmente,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

en donde:

$$\beta = v/c \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{16.6}$$

Todo cuadrivector que se transforme según la ley (16.3) se dice que es un cuadrivector contravariante, en este caso x^μ.

El tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, cuya definición es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16.7}$$

es el que permite transformar cuadrivectores contravariantes y covariantes entre sí:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

e igualmente,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

cumpliéndose

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\nu$$

o sea, que su producto es igual a la delta de Kronecker y, por lo tanto, los tensores métricos $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ son iguales.

Sucede, pues, que un cuadrivector covariante, como x_μ, se diferencia

del contravariante en el hecho de que tiene las coordenadas espaciales cambiadas de signo. Se transforma según la misma matriz Λ^{μ}_{ν} de Lorentz.

Una curiosidad es el cuadrivector derivada. Si se trata del cuadrivector derivada respecto a las coordenadas contravariantes, será un cuadrivector covariante; en efecto, $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} x^{\mu}$ es un escalar, luego:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

mientras que

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

con lo cual el operador de D'Alembert toma la forma:

$$\boxed{\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2} \qquad (16.8)$$

con el que se simplifica la notación; por ejemplo la ecuación de Klein-Gordon es:[1]

$$(\Box^2 + m^2)\phi = 0 \qquad (16.9)$$

16.2.2 Invariantes Lorentz

El producto escalar de dos cuadrivectores, por ejemplo $\hat{p} \cdot \hat{q}$, será un escalar y por consiguiente un invariante Lorentz. No cambia bajo una transformación de Lorentz.

El producto escalar se define:

$$p^\mu q_\mu = g^{\mu\nu} p_\nu q_\mu = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q} \qquad (16.10)$$

luego las normas de los vectores

$$\hat{x}^2 = t^2 - \vec{r}^2$$

$$\hat{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

serán invariantes Lorentz.

Un invariante muy utilizado en el estudio de las propiedades de las partículas inestables, con vida media muy corta (las resonancias hadrónicas) es la masa efectiva, *M*. Sea una partícula que se desintegra en otras dos, que tienen cuadrimomentos $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$. La masa efectiva se define

$$M^2 = (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)^2 = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + 2\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos\theta)$$

en donde θ es el ángulo entre los vectores tridimensionales $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$.

16.2.3 Transformaciones entre sistemas de coordenadas

Sea una partícula de masa *m* cuyo cuadrivector es $\hat{p} = (E, \vec{p})$; se cumple $\hat{p}^2 = m^2$.

La energía y el momento relativistas son:

$$E = \gamma m c^2 \qquad \text{y} \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

luego:

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}} \qquad (16.11)$$

Supóngase ahora el caso de una colisión entre dos partículas. Se trata de conocer el cuadrivector energía-momento de las partículas que intervienen, en cualquier sistema de coordenadas. En física de partículas, los sistemas de coordenadas más utilizados son el sistema laboratorio y el sistema centro de masas. Se designará con un asterisco (*) las magnitudes del centro de masas.

El sistema laboratorio está fijo (por ejemplo con el observador), y el centro de masas se mueve con velocidad $\vec{\beta}_{cm}$ respecto a aquél. El cuadrivector energíamomento de la partícula en el sistema centro de masas será $(E^*, \vec{p}^{\,*})$. Si $p_{\parallel}$ es la componente de $\vec{p}$ paralela a $\vec{\beta}_{cm}$, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p^*_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & -\beta_{cm}\gamma_{cm} \\ -\beta_{cm}\gamma_{cm} & \gamma_{cm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \qquad (16.12)$$

quedando las componentes perpendiculares invariantes:

$$p^*{}_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{T}}$$

ya que las componentes perpendiculares no son alteradas por una transformación de Lorentz (en el caso de la transformación (16.3), las componentes según los ejes *y* y *z*, no cambian).

Ejemplo 1. Sea una colisión π^- + p, en la que un haz de π^- bombardea un blanco de hidrógeno en reposo tal como puede verse en la figura 16.2. En el sistema laboratorio se tiene $p_{\pi^-} \neq 0$, pero el momento del blanco, $\vec{p}_{\mathrm{P}} = 0$.

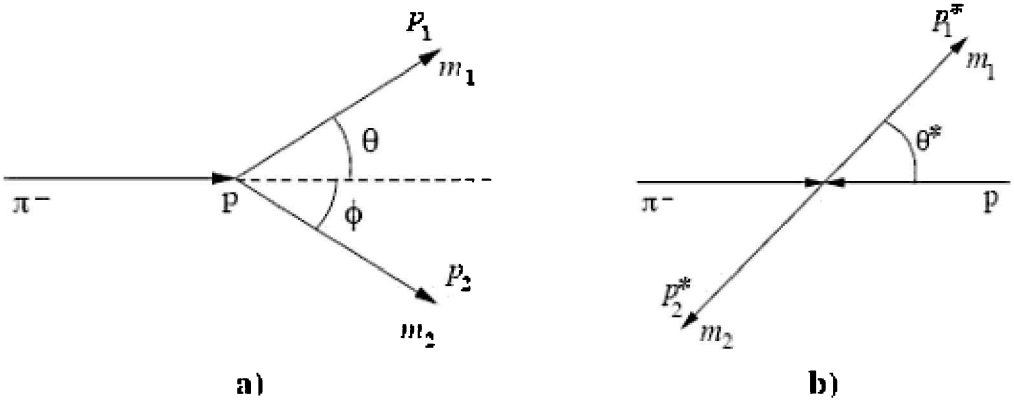


Figura 16.2: La colisión π^- + p → m_1 + m_2, vista desde **a)** el sistema laboratorio y **b)** el sistema centro de masas.

El movimiento del centro de masas de la colisión tiene por parámetros:

$$\vec{\beta}_{cm} = \frac{\vec{p}_\pi}{E_\pi + m_\mathrm{p}} \tag{16.13}$$

$$\gamma_{cm} = \frac{E_\pi + m_\mathrm{p}}{E_{cm}} \tag{16.14}$$

en donde E_π y $\vec{p}_\pi$ se refieren al sistema laboratorio.

La energía total del centro de masas, E_{cm} puede calcularse utilizando los invariantes relativistas. Los cuadrivectores del pión y del protón son $\hat{p}_\pi = (E_\pi, \vec{p}_\pi)$ y $\hat{p}_\mathrm{p} = (m_\mathrm{p}, \vec{0})$ en el sistema en el que la partícula m_2 está en reposo (sistema laboratorio). El cuadrivector suma de ambos: $\hat{p} = (\hat{p}_\pi + \hat{p}_\mathrm{p})$ tiene por norma

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_\pi^2 + \hat{p}_\mathrm{p}^2 + 2\hat{p}_\pi \cdot \hat{p}_\mathrm{p} = E_{cm}^2$$

es decir, la energía del centro de masas que se buscaba. Este cálculo tiene la ventaja que puede realizarse en cualquier sistema de coordenadas, ya que es un escalar Lorentz. En general se tendrá:

$$\hat{p}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) = E_{cm}^2$$

o sea, si se calcula en el sistema laboratorio:

$$E_{cm}^2 = m_\pi^2 + m_\mathrm{p}^2 + 2E_\pi m_\mathrm{p} \qquad (16.15)$$

Si se conoce elángulo entre las partículas 1 y 2 ($\theta + \varphi$ en el sistema laboratorio de la figura 16.2) se obtiene:

$$E_{cm}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2(1 - \beta_1 \beta_2 \cos(\theta + \phi))$$

y así queda resuelto el problema, tanto en el caso de una colisión elástica, en la que las masas cumplirían $m_1 = m_\pi$ y $m_2 = m_\mathrm{p}$ como en el caso de cualquier otra reacción inelástica, a dos cuerpos en el estado final, por ejemplo: $\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \pi^0 + \mathrm{n}$.

Se podría, a continuación, calcular el momento de las partículas incidente y blanco en el centro de masas, en el que se cumple por definición que $|\vec{p}_\pi^{\,*}| = |\vec{p}_\mathrm{p}^{\,*}|$, resultando al aplicar la transformación (16.12):

$$p^* = p_\pi \frac{m_\mathrm{p}}{E_{cm}} \qquad (16.16)$$

Otra manera de calcular estas cantidades, en función de la energía centro de masas, que se suele escribir $E_{cm} = \sqrt{s}$ es la siguiente; tomando como eje el de la dirección del π incidente, como aparece en la figura 16.2 se cumple para las partículas del estado inicial:

$$\hat{p}_\pi = (E_\pi, \vec{p}_\pi) \qquad \hat{p}_\mathrm{p} = (m_\mathrm{p}, \vec{0}) \qquad (16.17)$$

y las del estado final:

$$\hat{p}_1 = (E_1, \vec{p}_1) \qquad \hat{p}_2 = (E_2, \vec{p}_2) \qquad (16.18)$$

de forma que el ángulo θ se obtiene a partir de $\cos\theta = \frac{\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_1}{|p_\pi||p_1|}$.

Análogamente, los cuadrimomentos en el centro de masas para el estado inicial:

$$\hat{p}_\pi^{\,*} = (E_\pi^*, \vec{p}_\pi^{\,*}) \qquad \hat{p}_\mathrm{p}^{\,*} = (E_\mathrm{p}^*, \vec{p}_\mathrm{p}^{\,*}) \tag{16.19}$$

y las del estado final:

$$\hat{p}_1^{\,*} = (E_1^*, \vec{p}_1^{\,*}) \qquad \hat{p}_2^{\,*} = (E_2^*, \vec{p}_2^{\,*}) \tag{16.20}$$

obteniéndose el ángulo θ^* de la expresión $\cos\theta^* = \frac{\vec{p}_\pi^{\,*} \cdot \vec{p}_1^{\,*}}{|p_\pi^*||p_1^*|}$.

La conservación del cuadrimomento en el sistema laboratorio se expresa:

$$\hat{p}_\pi + \hat{p}_\mathrm{p} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \tag{16.21}$$

mientras que en el centro de masas se cumple:

$$\vec{p}_\pi^{\,*} + \vec{p}_\mathrm{p}^{\,*} = \vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = 0 \tag{16.22}$$

para el trimomento y

$$E_\pi^* + E_\mathrm{p}^* = E_1^* + E_2^* = E_{cm} = \sqrt{s} \tag{16.23}$$

para la energía. Se observa que:

$$\hat{p}_\pi^* + \hat{p}_\mathrm{p}^* = (E_{cm}, \vec{0}) \tag{16.24}$$

lo que simplifica enormemente los cálculos. En efecto, se encuentra directamente que

$$E_\pi^* = \frac{\hat{p}_\pi^* \cdot (\hat{p}_\pi^* + \hat{p}_\mathrm{p}^*)}{E_{cm}} = \frac{E_{cm}^2 + m_\pi^2 - m_\mathrm{p}^2}{E_{cm}} \qquad (16.25)$$

y de aquí:

$$p_\pi^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2} = \frac{\omega(s, m_\pi^2, m_\mathrm{p}^2)}{2\sqrt{s}} \qquad (16.26)$$

donde la función $\omega(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)^{\frac{1}{2}}$, aparece muy frecuentemente en los cálculos de invariantes relativistas.

Ejemplo 2. Se pretende calcular el momento de una de las partículas resultantes de la desintegración de otra.

La figura 16.3, muestra un esquema de la desintegración de una partícula de masa *M* en otras dos, con masas m_1 y m_2 y cuy os momentos son $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$.

En el sistema de centro de masas de la partícula *M* (piénsese por ejemplo en la desintegración $\Lambda^0 \rightarrow \mathrm{p} + \pi^-$), se puede calcular el momento de las dos partículas resultantes (que son iguales y de signo cambiado), desarrollando $M^2 = (p_1 + p_2)^2$, obteniéndose:

$$|\vec{p}_1^{\,*}| = \frac{\left\{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2M} \qquad (16.27)$$

que es otra forma de escribir

$$|\vec{p}_1^{\,*}| = |\vec{p}_2^{\,*}| = \frac{\omega(M, m_1, m_2)}{2M} \qquad (16.28)$$

De la misma manera, se puede calcular la energía en el centro de masas de la partícula 1:

$$E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \qquad (16.29)$$

obiendela partícula 2, simplemente permutando 1 ↔ 2.

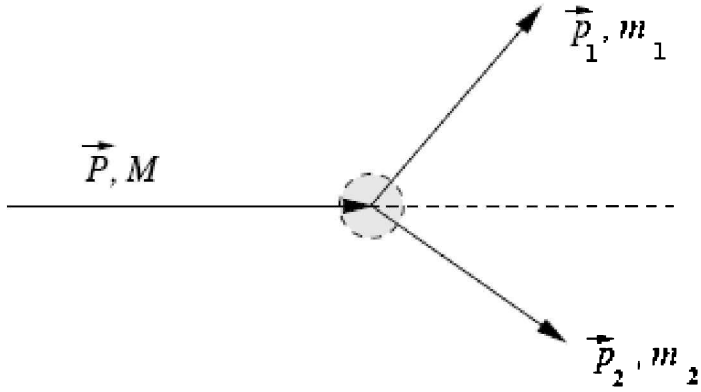


Figura 16.3: Esquema de la desintegración de una partícula de masa M en otras dos de masas m_1 y m_2, proceso que suele escribirse $M \rightarrow m_1 + m_2$.

16.2.4 La regla de oro de Fermi, relativista

Se pueden distinguir dos casos: desintegración de una partícula y procesos de interacción. En ambos, la finalidad de la regla de oro es calcular las probabilidades de desintegración o de reacción entre partículas. Toda la información teórica está contenida en el llamado elemento de matriz M, invariante Lorentz. Este elemento de matriz es proporcional a la amplitud de probabilidad de transición, es decir a la cantidad:

$$\int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \qquad (16.30)$$

donde $\varphi_i(x)$, $\varphi_f(x)$ son las funciones que representan el estado inicial y final del proceso, respectivamente, y $V(x)$ la interacción. Los cálculos teóricos se suelen realizar a partir de los diagramas de Feynman que

explican cada proceso, aplicando a cada uno, las reglas de Feynman (consúltese la bibliografía, por ejemplo Halzen and Martin [15].)

Desintegración a *n* cuerpos

Sea una partícula de masa *M*, inestable, que se desintegra en otras *n*partículas,

$$M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3 \ldots + \mathrm{m_n}$$

la expresión del ritmo de transición (probabilidad de transición por unidad de tiempo), toma la forma:

$$\boxed{d\lambda = \frac{(2\pi)^4}{2M}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(P; p_1, p_2, ..., p_n)} \qquad (16.31)$$

donde *M* es el elemento de matriz invariante Lorentz, el cuadrivector $P = \Sigma p_i$ y el elementodeespaciofásico de *n*cuerpos en el estado final es:

$$d\Phi_n = \delta^4\left(P - \sum_i^n p_i\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \qquad (16.32)$$

Se verán varios ejemplos de elementos de matriz *M* en el Capítulo 18, dedicado al estudio de las interacciones débiles.

Caso de la desintegración a 2 cuerpos

Así por ejemplo, en el caso de una desintegración en la que sólo hay dos partículas en el estado final como puede verse en la figura 16.3, o sea, $M \rightarrow m_1 + m_2$ se tiene:

$$\boxed{d\lambda = \frac{1}{32\pi^2}|\mathcal{M}|^2 \frac{|p_1^*|}{M^2} d\Omega} \qquad (16.33)$$

siendo $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido de la partícula 1:

$$d\Omega = d\varphi_1 d(\cos\theta_1)$$

Caso de la desintegración a 3 cuerpos

Ahora supóngase que hay tres partículas en el estado final, como puede verse en la figura 16.4, o sea, $M \rightarrow m_1+m_2+m_3$. Puede utilizarse la definición de masa efectiva entre dos partículas. Se define $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_i + \hat{p}_j$. Luego $m_{ij}^2 = \hat{p}_{ij}^2$ con lo que se cumple la relación:

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \qquad (16.34)$$

Con estas definiciones, la amplitud de probabilidad de desintegración viene dada por:

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M}|\mathcal{M}|^2 dE_1 dE_2 d\alpha d(\cos\beta) d\gamma \qquad (16.35)$$

siendo (α, β, γ) tresángulos de Euler que dan la orientación del estado final respecto a la partícula inestable M.

También se cumple:

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{1}{16M^2}|\mathcal{M}|^2 p_1^* p_3 dm_{12} d\Omega_1^* d\Omega_3 \qquad (16.36)$$

en donde las cantidades con * están en el sistema 1 − 2 en reposo y Ω_3 es el ángulo sólido de 3 en el sistema centro de masas de M.

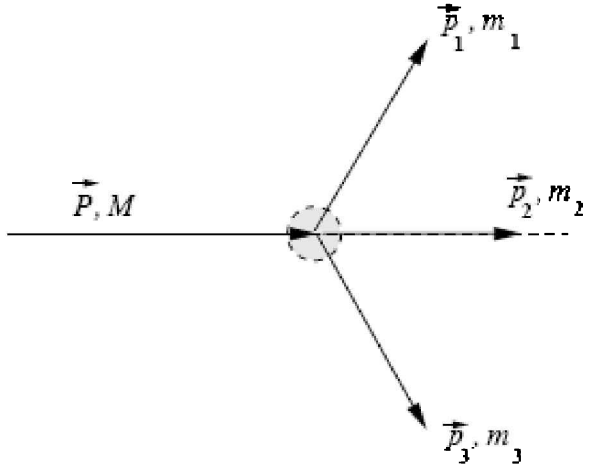


Figura 16.4: Definición de variables en una desintegración a tres cuerpos.

Es evidente que:

$$|\vec{p}_1{}^*| = \frac{\left\{[m_{12}^2 - (m_1 + m_2)^2][m_{12}^2 - (m_1 - m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2m_{12}} \qquad (16.37)$$

y

$$|\vec{p}_3| = \frac{\left\{[M^2 - (m_{12} + m_3)^2][M^2 - (m_{12} - m_3)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2M} \qquad (16.38)$$

que, al integrar sobre losángulos (en el caso en el que el espín de M sea 0) o promediando sobre los estados de espín se llega a:

$$d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8M}|\mathcal{M}|^2 dE_1 dE_2 \qquad (16.39)$$

o de otra forma,

$$\boxed{d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{32M^2}|\mathcal{M}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2} \qquad (16.40)$$

y esta última relación permite definir el llamado *Plot de Dalitz*, en el que se representan las variables m_{12}^2 en función de m_{23}^2 y cuya densidad informa sobre la estructura del elemento de matriz. Así, si en el *Plot de Dalitz*la densidad de puntos es uniforme, el elemento de matriz es constante.

Los valores cinemáticos máximo (+) ymínimo (−) de m_{23}^2 se calculan:

$$(m_{23}^2)^{\pm} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} \mp \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}\right)^2 \qquad (16.41)$$

siendo E_2^* y E_3^* las energías de las partículas 2 y 3 en el sistema en el que m_{12} está en reposo, es decir $E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/2m_{12}$ y $E_3^* = (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/2m_{12}$.

Colisión 1 + 2 → *n* cuerpos

La sección eficaz diferencial[2] de la colisión 1 + 2 → *n* partículas se calcula:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \times d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \ldots, p_{n+2}) \qquad (16.42)$$

En el sistema en el que m_2 está en reposo (sistema laboratorio),

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = m_2 p_{1lab}$$

mientras que en el sistema centro de masas:

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = p_1{}^* \sqrt{s}$$

siendo la variable $s = E_{cm}^2$.

Caso de la reacción con 2 partículas

Siguiendo la figura 16.5, puede abordarse el caso de la colisión $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$ entre dos partículas cuyas masas vienen dadas explícitamente. Se suelen utilizar las variables de Mandelstam, *s, t, u,* que se definen:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \end{aligned} \qquad (16.43)$$

Cumplen la sencilla relación:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \qquad (16.44)$$

Para energías muy altas $(s >> m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2)$ las variables *t* y *u* cumplen:

$$\begin{aligned} t &\simeq -\tfrac{s}{2}(1 - \cos\theta^*) \\ u &\simeq -\tfrac{s}{2}(1 + \cos\theta^*) \end{aligned} \qquad (16.45)$$

estando los valores de *t* y *u* comprendidos en el intervalo [0, −s].

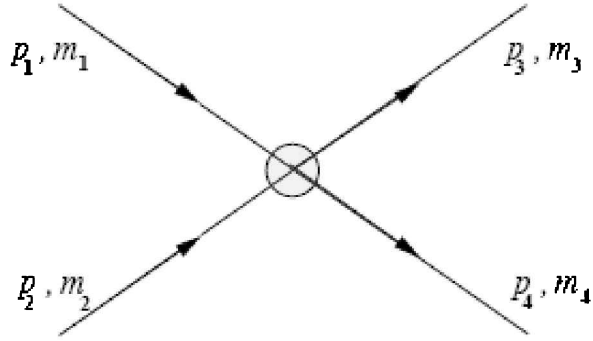


Figura 16.5: Definición de variables en una colisión con dos cuerpos en el estado final.

La sección eficaz de reacción de dos partículas puede escribirse como:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s}\frac{1}{|\vec{p}_1{}^*|^2}|\mathcal{M}|^2 \qquad (16.46)$$

También se puede escribir en función del elemento de ángulo sólido, en el centro de masas de la colisión, obteniéndose:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_3^*}{p_1^*}|\mathcal{M}|^2 \qquad (16.47)$$

siendo $d\Omega = d\phi_3^* d(\cos\theta_3^*)$, el elemento de ángulo sólido alrededor de la dirección de la partícula 3 (véase la figura 16.5).

Análogamente al caso de una desintegración pueden calcularse la energía y el momento de las partículas incidentes:

$$|\vec{p}^{\,*}| = \frac{\left\{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}} = p_1\frac{m_2}{\sqrt{s}}$$

$$E_1^* = \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}}$$

Probabilidades de supervivencia

Con la probabilidad calculada por la regla de oro de Fermi, puede calcularse la probabilidad de supervivencia de una partícula.

Si la partícula es inestable, con masa M y momento $\vec{P}$, la probabilidad de vivir durante un tiempo $t \geq t_0$ antes de desintegrarse valdrá:

$P(t_0) = e - t_0$

$$P(t_0) = e^{-t_0 \frac{\lambda}{\gamma}} \tag{16.48}$$

cumpliéndose que $\lambda^{-1} = \tau$ es la vida media de la partícula M. La probabilidad que tendrálapartícula de recorrer una distancia $x \geq x_0$ será:

$$P(x_0) = e^{-M \lambda x_0 / |\vec{p}|} \tag{16.49}$$

A continuación se presentan las invariancias espacio-temporales.

16.3 Traslaciones y rotaciones en el espacio

La invariancia bajo traslaciones es consecuencia del hecho que todas las posiciones en el espacio (o en el tiempo) son físicamente indistinguibles: el hamiltoniano es invariante,

$$H(x') = H(x + \delta x) = H(x)$$

16.3.1 Traslaciones espacio-temporales

Traslaciones espaciales

Una traslación infinitesimal $\varepsilon = \Delta x$, desplaza la función de ondas $|\Psi(x$

$+ \varepsilon)\rangle = D(\varepsilon)|\Psi(x)\rangle$, con lo que el operador $D(\epsilon) = [1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial x}]$, que al tener en cuenta el principio de equivalencia y pasando a una traslación tridimensional se puede escribir

$$D(\vec{\epsilon}) = 1 + i\frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}}{\hbar}$$

Se dice entonces que el operador $\vec{p}$ (momento lineal) es el generador de las traslaciones.

Una traslación finita, $\vec{r}$, será el resultado de calcular el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$ de n traslaciones $(1 + i\frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}}{\hbar})^n$, es decir:

$$\boxed{D(\vec{r}) = e^{i\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\hbar}}} \qquad (16.50)$$

Queda claro que $D(\vec{r})$ es un operador unitario, y que el operador $\vec{p}$ es el generador de las traslaciones espaciales. Los operadores $D(\vec{r})$ forman una representación del grupo de traslaciones. Como dos traslaciones conmutan, el grupo de traslaciones es abeliano.

Puesto que el espacio es homogéneo, las leyes físicas son idénticas independientemente del origen del sistema de referencia elegido. Una traslación da lugar a un sistema físico invariante, por ello se dice que la traslación espacial es una operación de simetría.

Se cumple $[D(\vec{r}), H] = 0$ y por lo tanto

$$[p, H] = 0$$

o sea, la homogeneidad del espacio implica la conservación del momento lineal.

Traslaciones temporales

Una traslación temporal viene dada por el operador $D(\Delta t)$:

$$\Psi(t + \Delta t) = D\Psi(t)$$

El operador D es:

$$D = e^{-i\frac{\Delta t E}{\hbar}}$$

o sea, el generador de las traslaciones temporales es E, la energía del sistema, con lo que

$$[E, H] = 0$$

y se conserva.

La homogeneidad del tiempo implica la conservación de la energía.

16.3.2 Rotaciones

Una rotación infinitesimal $\varepsilon = \Delta\varphi$, alrededor del eje z, transforma la función de ondas $|\Psi(\vec{r}')\rangle = D(\epsilon)|\Psi(\vec{r})\rangle$, con lo que el operador $D(\epsilon) = [1 - i\frac{\epsilon L_z}{\hbar}]$, puesto que la rotación transforma:

$x \rightarrow$	$x' = x + \varepsilon y$
$y \rightarrow$	$y' = y - \varepsilon x$
$z \rightarrow$	$z' = z$

y el operador $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Al igual que en el caso de las traslaciones se obtiene la expresión para una rotación finita de ángulo φsegún el eje z:

$$D(\phi) = e^{-i\frac{\phi L_z}{\hbar}}$$

Pero interesa conocer la expresión del operador rotación $D(\theta)$ de unángulo finito θ según una dirección cualquiera dada por el vector unitario $\hat{n}$:

$$\boxed{D(\theta) = e^{-i\theta\frac{\hat{n}\cdot\vec{L}}{\hbar}}} \qquad (16.51)$$

De nuevo, $D(\theta)$ es un operador unitario, y ahora el operador momento angular $\vec{L}$ es el generador de las rotaciones espaciales. Los operadores $D(\theta)$ forman una representación del grupo de rotaciones. Como dos rotaciones no conmutan, el grupo no es abeliano.

Puesto que el espacio es isótropo, las leyes físicas son idénticas independientemente del sistema de referencia elegido y no dependen de su orientación. Una rotación deja a un sistema físico invariante, por ello se dice que es una operación de simetría.
Se cumple $[D(\theta), H] = 0$ y por lo tanto

$$[\hat{L}, H] = 0$$

válido para partículas con espín $S = 0$. La misma ley se cumple si las partículas tienen espín, pero entonces es el momento angular total **J = L + S** quien conmuta con el hamiltoniano. O sea, la isotropía del espacio implica la conservación del momento angular.

Grupo de Lie de las rotaciones

Estos grupos de transformaciones (traslaciones y rotaciones) que pueden originarse a partir de sucesivas transformaciones infinitesimales son los llamados grupos de Lie.

Un grupo de Lie queda determinado por suálgebra. Elálgebra del

grupo de Lie de las rotaciones es:

$$\boxed{[J_j, J_k] = i\epsilon_{jk\ell}\hbar J_\ell} \qquad (16.52)$$

en donde los parámetros $\varepsilon_{jk\sim}$ (=±1, silossubíndices son cíclicos o anticíclicos y el resto son 0) son las llamadas constantes de estructura del grupo de rotaciones.

El grupo permite definir los estados físicos utilizando losíndices $|j, m\rangle$, que son los dos valores propios de dos operadores que conmutan; el operador de Casimir[3] $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ que conmuta con todos los generadores del grupo y la proyección J_z que se elige entre los generadores. Se cumple:

$$\left.\begin{aligned} J^2|j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \\ J_z|j,m\rangle &= m\hbar|j,m\rangle \\ J_\pm|j,m\rangle &= [j(j+1) - m(m\pm 1)]^{1/2}\hbar|j,m\pm 1\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (16.53)$$

con la conocida definición $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, cuyas reglas de conmutación con el operador J_z son: $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$, cumpliéndose también $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

Para cada valor de j existe un multiplete formado por $2j + 1$ estados con un valor de m diferente ($|m| \leq j$).

La suma de dos momentos angulares $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$ es también un momento angular, descrito por la base $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ o por $|j, m\rangle$, que están relacionadas. En general, como es bien sabido, el acoplamiento de dos representaciones irreducibles con espín j_1 y j_2 conduce a un estado con espín j que cumple

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

y el estado puede escribirse como una suma:

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} C^{jm}_{m_1 m_2} |j_1,m_1\rangle |j_2,m_2\rangle \qquad (16.54)$$

siendo las constantes *C* los coeficientes de Clebsch-Gordan (véanse las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan en el Apéndice F.8).

Representaciones del grupo de rotaciones

Se trata de encontrar la expresión matricial de las representaciones de los elementos $D(\theta)$ del grupo de rotaciones. Para ello basta recordar que toda rotación puede expresarse en función de tresángulos de Euler α, β, γ; dos de ellos respecto al eje *z* y el otro respecto al eje *y*:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\gamma J_{z'}} e^{-i\beta J_{y'}} e^{-i\alpha J_z} = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$$

referidos todos losángulos a los ejes de coordenadas original.

En la base $|j, m\rangle$, la representación matricial de *D* es,

$$D^{(j)}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m|D(\alpha,\beta,\gamma)|j.m'\rangle = e^{-i\alpha m} d^{(j)}_{mm'}(\beta) e^{-i\gamma m'}$$

siendo $d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \langle j,m|e^{-i\beta J_y}|j,m'\rangle$ (véanse las tablas en el Apéndice F.4).

La rotación de un estado da lugar a una combinación lineal:

$$e^{-i\beta J_y}|j,m\rangle = \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta)|j,m'\rangle$$

La matriz $D^{(j)}$ tiene dimensión $2j + 1$ y es la representación irreducible de dimensión $2j + 1$ del grupo de rotaciones.

La representación $D^{(1/2)}$ es la llamada representación fundamental porque3 todas las demás pueden construirse a partir de ella.

16.4 El grupo SU(2). Espín e isospín

Los sistemas con espín *J* e isospín *I* bien definidos deben cumplir las propiedades que se deriven de las transformaciones del grupo SU(2).

El grupo SU(2)⊂U(2) es el grupo especial de las matrices 2 × 2 unitarias, unimodulares que conforma la representación fundamental del grupo de rotaciones. Elálgebra de Lie del grupo es la de sus generadores, que ya se ha visto en (16.52). Una representación posible de la fundamental es la que forman las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (16.55)$$

que cumplen $\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_\ell \epsilon_{jk\ell} \sigma_\ell$, o sea; $\sigma_i^2 = I, Tr(\sigma_i) = 0$ y $det(\sigma_i) = -1$. Por supuesto, también puede verificarse que las matrices

Dirac	Vector
$\|1/2, +1/2\rangle \equiv \uparrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\|1/2, -1/2\rangle \equiv \downarrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

cumplen el álgebra vista en (16.52). Las matrices de Pauli son pues una representación matricial de los generadores del grupo.

Se presenta a continuación el caso de un sistema con espín *s* = 1/2.

Los estados vendrán dados por $|s, m_s\rangle$. La representación habitual de estos estados es

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_\ell \epsilon_{jk\ell} \sigma_\ell$$

Dadas las matrices de Pauli $\vec{\sigma}$, el operador espín tendrá una representación matricial:

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\hbar \tag{16.56}$$

Se llega a esta misma expresión si se utiliza la definición cuántica del operador de espín intrínseco **s** de una partícula con masa que dice que el operador espín es igual al operador momento angular en el sistema en el que la partícula estáen reposo:

$$s_z = i\hbar \lim_{\phi \to 0} \frac{R_z(\phi) - 1}{\phi} \tag{16.57}$$

en donde el operador $\sigma_i^2 = I, Tr(\sigma_i) = 0$ y $det(\sigma_i) = -1$ representa una rotación del estado de la partículadeunángulo φalrededor del eje *z*. Se obtiene así,

Dirac	Vector
$\|1/2, +1/2\rangle \equiv \uparrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\|1/2, -1/2\rangle \equiv \downarrow \equiv$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

que se generaliza dando lugar a (16.56).

Un sistema con espín 1/2, el electrón por ejemplo, podrá encontrarse en un estado cualquiera

$$R_z(\phi) = e^{-i\phi\sigma_3/2}$$

con $|\ a\ |^2 + |\ b\ |^2 = 1$. La interpretación física de esta normalización implica que $|\ a\ |^2$ ($|\ b\ |^2$) representa la probablidad de encontrar el valor $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$) al medir la proyección según el eje *z* del espín de la partícula que se encuentra en el estado $|\Psi\rangle$.

Una rotación de unángulo θ de este estado general se expresará:

$$|\Psi'\rangle = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

con $U(\theta) = e^{-i\theta\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}}$, y no cambia los observables del sistema. Si la rotación es según el eje definido por el vector unitario $\hat{n}$, entonces $U(\theta) = \cos(\frac{1}{2}\theta)I - i\sin(\frac{1}{2}\theta)\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$, donde *I* es la matriz 2 × 2 unidad.

Por otra parte, el espín del sistema formado por dos electrones se obtiene a partir de la operación más importante, la suma de momentos angulares: $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. En este caso es bien sabido que da lugar a dos funciones de espín con simetría de intercambio bien definida; un triplete de espín *S* = 1, simétrico, y un singletedeespín *S* = 0, antisimétrico. Los estados se escriben:

singlete: $\chi_{00}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ **antisimétrica**

triplete: $\chi_{1,M_S}(1,2) = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$ **simétrica**

en donde M_S es la tercera componente del espín del sistema (en el caso *S* = 1, se tienen los valores M_S = +1, 0, −1).

En el lenguaje de la teoría de grupos de Lie, el resultado de la composición de dos espines $\frac{1}{2}$ obtenido se escribe:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

en donde los términos que aparecen hacen referencia a la dimensionalidad de la representación. La representación fundamental correspondiente a *s* = 1/2 es efectivamente 2 (el valor numérico de 2*s* + 1). El 3 corresponde al triplete y el 1 al singlete resultantes. Si se a˜nade un tercer electrón, se tendría,

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

es decir, un cuarteto y dos dobletes de espín.

Recuérdese, como se acaba de ver más arriba, que el acoplamiento de dos representaciones irreducibles con espín j_1 y j_2 da lugar a un estado con espín *j*que cumple

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

y el estado puede escribirse como una suma
$|j, m\rangle =$

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} C^{jm}_{m_1 m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

siendo las constantes *C* los coeficientes de Clebsch-Gordan.

El tratamiento del isospín es completamente análogo al del espín, solo que ahora las transformaciones tienen lugar en un espacio abstracto, generalmente llamado el espacio interno, para distinguirlo del espacio-tiempo. También hay que notar que el isospín es un número sin unidades.

Para describir un sistema de isospín $I = 1/2$, como el del nucleón, bastará con introducir los estados base, vectores propios de I_3,

Dirac	Vector
$\mathrm{p} = \|1/2, +1/2\rangle \equiv$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathrm{n} = \|1/2, -1/2\rangle \equiv$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los generadores de la representación serán las mismas matrices de Pauli y, por lo tanto, se trata de la mismaálgebra. Las leyes de acoplamiento de dos nucleones serán las mismas que en el caso del

espín. Ahora, dos estados de isospín I' e I'' se acoplarán dando lugar a un estado

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I'_3, I''_3} C^{I I_3}_{I'_3, I''_3} |I' I'_3\rangle |I'' I''_3\rangle$$

Los hadrones forman multipletes de isospín. Para ello deben tener la misma masa y espín-paridad y distinguirse sólo por la carga eléctrica, relacionada con I por la fórmula de Gell-Mann-Nishijima:

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{Y}{2}} \qquad (16.58)$$

en donde $Y = B + S$ es la hipercarga, suma del número bariónico y de la extra˜neza.[4]

La conservación del isospín en la desintegración de un hadrón, por ejemplo la resonancia Δ(1232), que tiene espín $J = \frac{3}{2}$ e isospín $I = \frac{3}{2}$ y que es un proceso que tiene lugar por interacción fuerte, tiene como consecuencia que es posible predecir cocientes de desintegración o cocientes entre secciones eficaces,

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \to \mathrm{p}\pi^0)}{\Gamma(\Delta^+ \to \mathrm{n}\pi^+)} = 2 \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{\sigma(\pi^+ \mathrm{p})}{\sigma(\pi^- \mathrm{p})}\right|_{total} = 3 \qquad (16.59)$$

sólo teniendo en cuenta el valor de los coeficientes de Clebsch-Gordan para cada proceso. En efecto, todos los otros factores que intervienen en el cálculo de la vida media o de la sección eficaz (la regla de oro de Fermi) son idénticos.

De la misma manera se pueden encontrar relaciones entre secciones eficaces, por ejemplo en procesos $\pi^{\pm}$ + p → K + Σ, basándose en que el hamiltoniano tiene que ser de la forma $H = H_{1/2} + H_{3/2}$, suma de dos términos, uno para cada valor posible del isospín $I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Hay que

desarrollar el estado inicial (πp) y el final ($K\Sigma$) en amplitudes de isospín I = 3/2 y 1/2, calculando para cada una

$$\sigma = k|\langle f|H_{1/2} + H_{3/2}|i\rangle|^2 \qquad (16.60)$$

con lo que se obtiene (los subíndices indican el estado de carga del par KΣ):

$$\sigma_{00} : \sigma_{+-} : \sigma_{++} = \frac{2}{9}|A_{3/2} - A_{1/2}|^2 : \frac{1}{9}|A_{3/2} + 2A_{1/2}|^2 : |A_{3/2}|^2 \qquad (16.61)$$

Pero es bien sabido que la simetría de isospín es una simetría aproximada; supone que el protón y el neutrón son dos partículas idénticas (bajo interacción fuerte), y sin embargo la carga eléctrica las distingue y de hecho tienen masas distintas.

16.4.1 Caso de antipartículas: Isospín del sistema $N\overline{N}$

Para que las antipartículas $(\overline{\mathrm{n}}, \overline{\mathrm{p}})$ se transformen bajo rotaciones igual que las partículas debe definirse el doblete:

$$\begin{pmatrix} -\overline{\mathrm{n}} \\ \overline{\mathrm{p}} \end{pmatrix} \qquad (16.62)$$

En efecto, una rotación deángulo π (véase (16.56)) según el eje 2 transforma el doblete de nucleones:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{p}' \\ \mathrm{n}' \end{pmatrix} = e^{-i\pi\frac{\sigma_2}{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} \qquad (16.63)$$

de forma que para que el doblete de antinucleones se transforme igual, hay que elegirlo como en (16.62). Así, si se considera un estado nucleón-antinucleón $(N\overline{N})$, el triplete de isospín es:

$$\left\{\begin{array}{c} -\mathrm{p}\overline{\mathrm{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{p}\overline{\mathrm{p}}-\mathrm{n}\overline{\mathrm{n}}\right) \\ \mathrm{n}\overline{\mathrm{p}} \end{array}\right. \qquad \text{y el singlete:} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{p}\overline{\mathrm{p}}+\mathrm{n}\overline{\mathrm{n}}\right)$$

El sistema $N\overline{N}$ no es un sistema de fermiones idénticos y por lo tanto no cumple ningún principio de simetrización.

16.4.2 Sistemas de partículas idénticas

Si dos partículas son idénticas (cuánticamente indistinguibles), su estado cumple

$$|\xi_2\xi_1\rangle = \pm|\xi_1\xi_2\rangle$$

como puede comprobarse simplemente al intercambiarlas dos veces seguidas (un intercambio multiplica el estado por una fase). Esto implica que hay dos clases de estados:

$$\text{simétricos} \qquad |\xi_1\xi_2\rangle_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\xi_1\xi_2\rangle + |\xi_2\xi_1\rangle\right)$$

$$\text{antisimétricos} \qquad |\xi_1\xi_2\rangle_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\xi_1\xi_2\rangle - |\xi_2\xi_1\rangle\right)$$

El teorema de conexión espín-estadística asigna los estados simétricos a los bosones (partículas espín entero) y los antisimétricos a los fermiones.

Principio de exclusión de Pauli

Como se acaba de ver, por el teorema de la conexión espín-estadística, dado un sistema formado por dos electrones (indistinguibles), la función

de ondas debe ser totalmente antisimétrica bajo el intercambio de los dos electrones. Si se consideran funciones de onda producto espacio-espín, las posibilidades son:

$$\psi^{s=0}(q_1, q_2) = \phi^{+}(r_1, r_2)\chi_{0,0}(1,2) \qquad \text{PARA y singlete de espín}$$

$$\psi^{s=1}(q_1, q_2) = \phi^{-}(r_1, r_2)\chi_{1,M_s}(1,2) \qquad \text{ORTO y triplete de espín}$$

Como se ve, la simetría espacial es llamada función *para* y la antisimetría espacial, *orto*. Este principio introduce un acoplo entre variables espaciales y de espín. De esta manera, el estado fundamental delátomo de helio sólo tiene estado *para* ysingletedeespín.

Como consecuencia, se observa que dos fermiones no pueden encontrarse en un mismo estado cuántico ya que se anula su función de ondas. Este es el enunciado tradicional del principio de exclusión de Pauli.

Principio de exclusión de Pauli extendido

Pero si se introduce el isospín, como por ejemplo para un estado compuesto por dos nucleones (idénticos, si se introduce el isospín), entonces la función de ondas del sistema es producto de tres funciones

$$\psi(q_1, q_2) = \phi(r_1, r_2)\chi(1,2)\xi(1,2)$$

y ψ debe ser totalmente antisimétrica bajo intercambio de los dos nucleones 1 y 2. La función de ondas de isospín ξ es simétrica si el isospín del sistema es $I = 1$ (triplete).

16.5 Simetrías $\mathcal{P}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{T}$

Al contrario que los desplazamientos y rotaciones vistas más arriba, que son transformaciones continuas del espacio-tiempo, las

transformaciones que se presentan aquí son transformaciones discretas. Se trata de tres simetrías discretas: la *paridad*, $\mathcal{P}$, la *conjugación de carga*, $\mathcal{C}$ y la *inversión temporal*, $\mathcal{T}$. Las dos primeras tienen asociados números cuánticos multiplicativos. Lo más importante será identificar si estas simetrías se conservan ante cada tipo de interacción.

Las simetrías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$ están asociadas a propiedades del espacio-tiempo; son propiedades externas a las partículas, mientras que la simetría $\mathcal{C}$ se refiere al espacio interno de las propiedades de las partículas.

Los grupos de transformaciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$ son grupos finitos de dos elementos, la identidad e y un elemento g que cumple $g^2 = e$. La invariancia bajo la transformación g implica que está representada por un operador $U(g)$ unitario, que conmuta con el hamiltoniano

$$[U, H] = 0$$

Los vectores propios $|p\rangle$ cumplen $U^2|p\rangle = p^2|p\rangle = |p\rangle$, es decir, los valores propios son $p = \pm 1$. La conservación del número cuántico p implica que las transiciones sólo pueden tener lugar entre estados con el mismo valor propio de p. Por el contrario, el operador $\mathcal{T}$ es antiunitario y no da lugar a valores propios; sin embargo es una simetría que se cumple en las interacciones fuertes y electromagnéticas.

16.5.1 La paridad $\mathcal{P}$

La paridad es una operación que transforma un estado en su imagen espacial, es decir:

$$\mathcal{P}|\Psi(\vec{r})\rangle = P_a|\Psi(-\vec{r})\rangle \qquad (16.64)$$

siendo P_a una fase constante. En principio se suponía que todas las interacciones de la naturaleza obedecían a esta simetría. En efecto, la paridad transforma un sistema de coordenadas dextrógiro en levógiro.

Las leyes físicas no dependen del tipo de sistema utilizado. Sin embargo, una de ellas, la interacción débil, no es invariante bajo la paridad. Una nueva aplicación del operador paridad da:

$$\mathcal{P}^2|\Psi(\vec{r})\rangle = P_a^2|\Psi(\vec{r})\rangle$$

o sea, los valores posibles de P_a = ±1. Si se considera una función propia del operador momento:

$$\Psi_p(\vec{r},t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$$

entonces

$$\mathcal{P}\Psi_p(\vec{r}) = P_a\Psi_p(-\vec{r}) = P_a\Psi_{-p}(\vec{r})$$

luego, una partícula en reposo (p = 0) es un estado propio del operador paridad con valor propio P_a. Es lo que se llama *paridad intńnseca* de la partícula *a*. Se abrevia diciendo que P_a es la paridad de la partícula, entendiendo que está en reposo. Además de su paridad intrínseca, si una partícula se mueve en un campo con un momento angular orbital ℓ tiene también un valor propio de la paridad asociado a dicho valor de ℓ, por ejemplo, si una partícula tiene una función de ondas dada por:

$$\Psi(\vec{r}) = R_{n\ell}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

entonces, la paridad de esta función de ondas viene definida por el valor del momento angular orbital: $\mathcal{P} = (-1)^{\ell}$. Ello es debido a las propiedades de los armónicos esféricos: $\mathcal{P}Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^{\ell}Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ ya que $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ equivale a $\theta \rightarrow \pi - \theta$ y $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$. En definitiva, se tendrá que

$$\mathcal{P}\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = P_a\Psi_{n,\ell,m}(-\vec{r}) = P_a(-1)^{\ell}\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$$

luego, $\Psi_{n,\ell,m}(\vec{r})$ es una función propia de la paridad con valor propio

$P_a(-1)^\ell$.

Todos los constituyentes elementales (excepto los neutrinos) tienen una paridad intrínseca bien definida. Ello es necesario para que pueda aplicarse la conservación del número cuántico multiplicativo.

Por convenio, a los quarks u, d, c, s, t, b y a los leptones cargados e^-, μ^-, τ^- se les asigna paridad $P = +1$. Los neutrinos no tienen paridad. Se cumple además que:

$$\begin{aligned} P(\text{antifermión}) &= -P(\text{fermión}) \\ P(\text{antibosón}) &= P(\text{bosón}) \end{aligned} \qquad (16.65)$$

Que los antifermiones tengan paridad opuesta a los fermiones es consecuencia de la teoría de Dirac. De hecho, como se postula que P(quarks) = +1 se tendrá que P(antiquarks) = −1; luego, por ejemplo, de acuerdo con el modelo de quarks que dice que un mesón es un estado $q\overline{q}$, la paridad de un mesón M será:

$$P_M = P_q P_{\overline{q}}(-1)^L = (-1)^{L+1} \qquad (16.66)$$

ya que $P_q P_{\overline{q}} = -1$, puesto que se trata de un par quark-antiquark. En general, para un sistema cualquiera compuesto por un fermión f y un antifermión $\overline{f}$, se tiene,

$$P(f\overline{f}) = (-1)^{L+1} \qquad (16.67)$$

La paridad de los bariones:

$$P_B = P_1 P_2 P_3 (-1)^{L_{12}} (-1)^{L_3} = (-1)^{L_{12}+L_3} \qquad (16.68)$$

en donde L_{12}es el momento angular orbital de los quarks 1 y 2 y L_3 es el momento angular orbital del quark 3 respecto al centro de masas del sistema 1−2 (véase figura 16.6). Por supuesto que la paridad de un antibarión es $P_{\overline{B}} = -P_B$.

Es bien sabido que un pión es un mesón pseudoescalar, o sea $J^{\mathcal{P}} = 0^-$. Ello viene del hecho que su función de ondas se transforma como un escalar bajo las rotaciones (espín = 0) pero bajo las reflexiones espaciales cambia de signo, contrariamente a un escalar. Esto puede deducirse directamente del modelo de quarks, ya que un pión es un sistema $q\overline{q}$ cuyo momento angular orbital es $\ell = 0$. Un mesón escalar tiene espín-paridad $J^{\mathcal{P}} = 0^+$, mientras que un mesón con $J^{\mathcal{P}} = 1^-$ es un mesón vectorial y si tiene $J^{\mathcal{P}} = 1^+$ es un vector axial.

Si el hamiltoniano de una interacción es invariante bajo la transformación de paridad, entonces $[\hat{P}, H] = 0$ y la paridad es un número cuántico que se conserva; esto implica que en las interacciones o desintegraciones entre partículas se cumple que la paridad del estado inicial y la del final son iguales: $P_i = P_f$.

La paridad es un buen número cuántico para la interacción fuerte. Los estados físicos que intervienen en estos procesos tienen paridad bien definida. Un buen ejemplo es el experimento que estudió la reacción de captura de un π^- en reposo (el momento angular en la captura es $\ell = 0$) por el deuterio, es decir, la reacción π^- d $\rightarrow$ nn que por antisimetría del estado nn sólo puede ser un estado $^3P_1$ y cumple todas las leyes de conservación (I, J, $\mathcal{P}$). Precisamente, la paridad del pión fue inicialmente determinada, gracias a esta reacción, mucho antes de que se introdujera el modelo de quarks. No se ha detectado[5] la reacción π^- d $\rightarrow$ nnπ^0, que no conserva la paridad.

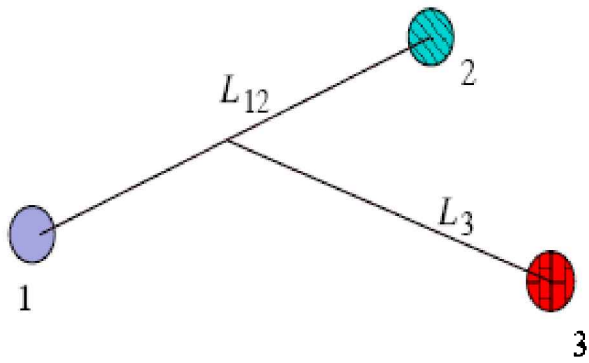


Figura 16.6: Definición de los momentos angulares L_{12} y L_3 utilizados para calcular la paridad de un barión formado por tres quarks.

La paridad es también una buena simetría en el caso de las interacciones electromagnéticas. Se puede deducir la paridad del fotón:

$$P_\gamma = -1 \tag{16.69}$$

recurriendo al principio de correspondencia. En efecto, según la mecánica cuántica, la función de ondas de un fotón libre con momento $\vec{p}$ viene dada por el potencial vector $\vec{A}(\vec{r},t) = N\vec{\epsilon}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)/\hbar}$, siendo N una constante de normalización y $\vec{\epsilon}$ el vector polarización del fotón. La paridad del fotón viene dada por $\mathcal{P}\vec{A}(\vec{r}) = P_\gamma \vec{A}(\vec{r})$ que coincide con la misma ecuación para el campo eléctrico $\mathcal{P}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = P_\gamma \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ debido a que $\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ y como $\mathcal{E}$ cumple la ecuación de Poisson: $\vec{\nabla}\cdot\mathcal{E}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)/\epsilon_0$, el campo eléctrico cambia de signo bajo la paridad.

Los fotones reales se desplazan a la velocidad de la luz y por lo tanto tienen masa nula. Se llaman fotones *transversales* porque los campos asociados $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ son perpendiculares al vector momento $\vec{p}$.

Es importante recordar ahora que la polarización de espín de las partículas, tomando como eje su momento, se denomina helicidad:

$$\lambda = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\sigma||p|} \tag{16.70}$$

siendo σ el espín y $\vec{p}$ el momento, ya que la helicidad es un buen número cuántico para todas las interacciones. Está bien definida para las partículas de masa nula, para las que es un invariante Lorentz. Como la interacción electro-magnética conserva la paridad, ello implica que la helicidad neta de los fotones es 0, porque λ cambia de signo bajo

paridad. A los fotones con $\lambda = +1, -1,0$ se les llama dextrógiros, levógiros y *escalares*. Los fotones reales son transver-sales.[6] Por ello, fotón transversal significa dextrógiro y levógiro en igual proporción.

La conservación de la paridad en la interacción electromagnética se observa, por ejemplo, en la aniquilación del para–positronio (estado $^1S_0$):

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \qquad (16.71)$$

que, por tratarse de una aniquilación en onda *S*, se tiene $P_{e^+}P_{e^-} = (-1)^{\ell_\gamma}$, siendo ℓ_γ el momento angular orbital del estado final. Este resultado se verifica experimentalmente midiendo la polarización de los fotones en el estado final. Esto, además, confirma la predicción vista en (16.65).

La violación de la paridad fue inicialmente descubierta en la desintegración β nuclear (en el experimento de desintegración del ^{60}Co, realizado por Mme. Wu y colaboradores). Aunque se viole la paridad en los procesos débiles, pueden extraerse conclusiones de la conservación de la helicidad. El modelo estándar supone que los neutrinos tienen $m_\nu = 0$ y helicidad $\lambda = -1$. Por ejemplo, se ha comprobado experimentalmente en la desintegración débil del pión:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad \text{seguida de} \qquad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu \qquad (16.72)$$

que el μ^+ sólo se produce con helicidad $\lambda = -1$, es decir, es levógiro. Esto implica que el ν_μ es también levógiro. Análogamente sólo existe el $\overline{\nu}_\mu$ dextrógiro (con helicidad $\lambda = +1$). La prueba puede verse en la figura 16.7. En efecto, el espectro de energías del positrón muestra que se emiten principalmente en torno del valor máximo (unos 50 MeV), lo que sólo se puede entender gracias a la figura 18.5 por las consecuencias cinemáticas del alineamiento de la helicidad, que explican que el e^+ es emitido con la máxima energía (en dirección opuesta a los dos neutrinos). Esta propiedad la tienen los otros neutrinos.

Si la paridad fuese una buena simetría para la interacción débil, la

imagen especular del neutrino, existiría. La violación de la paridad es, pues, compatible con la no existencia de un neutrino dextrógiro.

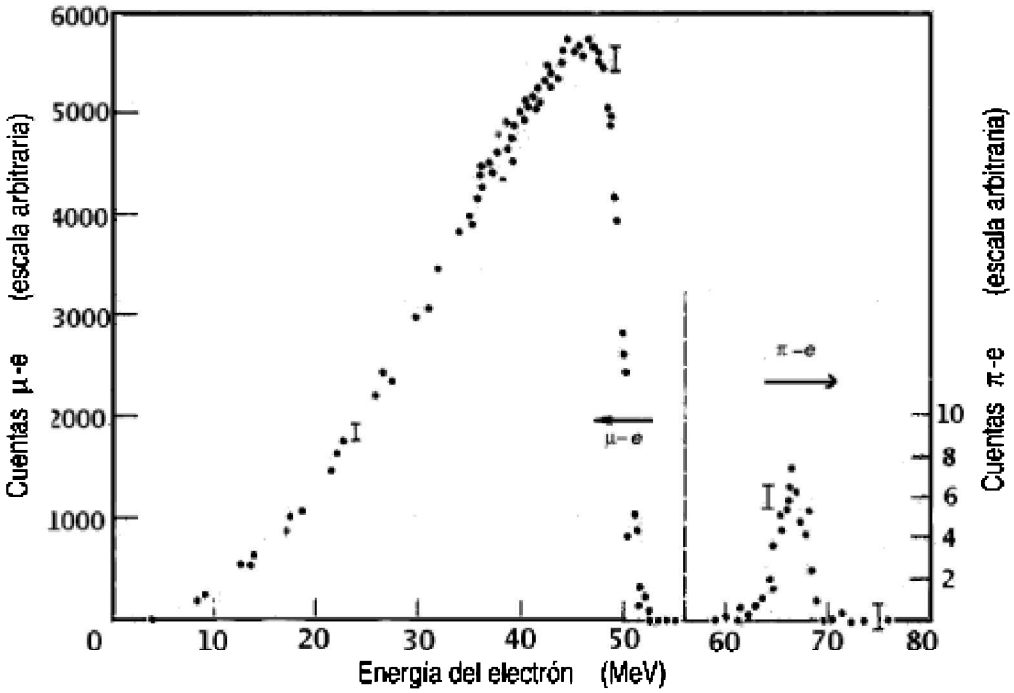


Figura 16.7: Espectro de momentos del positrón en la desintegración $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$ (izquierda) y en la desintegración $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ (derecha), que demuestra que el neutrino es levógiro (helicidad = −1).

16.5.2 La conjugación de carga $\mathcal{C}$

Es un hecho comprobado experimentalmente que materia y antimateria cumplen las mismas leyes físicas; de hecho, comparten la misma ecuación relativista de Dirac. Por ello, esútil introducir la operación de conjugación de carga, que es una simetría discreta y transforma una partícula en su antipartícula, dejando su momento $\vec{p}$ y suespín $\vec{\sigma}$ inalterados:

$$\mathcal{C} \mid A, \vec{p}, \vec{\sigma}\rangle = C_a \mid \overline{A}, \vec{p}, \vec{\sigma}\rangle \qquad (16.73)$$

Los números cuánticos contenidos en A son las cargas y sabores de las partículas, que permiten distinguir entre partículas y antipartículas. Así pues, el opera-dor $\mathcal{C}$ cambia el signo de las cargas $Q, \mathcal{B}, \mathcal{L}$ (números cuánticos aditivos) de las partículas y de los números cuánticos de sabor I_3, S, C, T, B, pero no cambia el signo del momento ni del momento angular.

De nuevo, al igual que en el caso de la paridad, se cumplirá que $C_a^2 = 1$ y, por lo tanto, los valores propios de este operador serán $C_a = \pm 1$; pero los estados propios sólo pueden ser los de partículas neutras, o sea, con $Q = \mathcal{B} = \mathcal{L} = 0$ y además $I_3 = S = C = T = B = 0$. Ejemplos de estados propios de la conjugación de carga son los bosones neutros: γ, $\pi^0(135)$, $\eta^0(547)$, $\eta'(958)$, $\rho^0(770)$, $\omega^0(782)$, $\varphi(1020)$, $J/\psi(3097)$, $\Upsilon(9460)$. Todas estas partículas son idénticas a sus antipartículas.

No existe ningún barión ni ningún leptón que sea un estado propio de la conjugación de carga. Sólo serán propios de $\mathcal{C}$, los bosones neutros y con todos los números cuánticos de sabor igual a cero.

También es buen número cuántico para sistemas físicos, compuestos por más de una partícula, siempre que la carga total sea nula. Ejemplos del valor de la conjugación de carga para sistemas de dos partículas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|\pi^+\pi^-, L\rangle &= (-1)^L|\pi^+\pi^-, L\rangle \\ \mathcal{C}|f\overline{f}; J, L, S\rangle &= (-1)^{L+S}|f\overline{f}; J, L, S\rangle \end{aligned} \qquad (16.74)$$

siendo L y S el momento angular orbital y el espín total del sistema. Ello se entiende al permutar las dos partículas, teniendo en cuenta la simetría del estado. Para el caso del sistema fermión-antifermión, el factor $(-1)^{L+S}$ es en realidad el resultado de tres factores $-(-1)^L(-1)^{S+1}$, debidos respectivamente al intercambio de fermiones (entre el doblete de fermiones y antifermiones hay un cambio de signo), al factor del armónico esférico y a la simetría de la función de ondas de espín.

El sistema barión-antibarión cumplirá pues,

$$C(B\overline{B}) = (-1)^{L+S} \tag{16.75}$$

La conjugación de carga es una buena simetría para las interacciones fuertes y electromagnéticas. En la interacción fuerte, por ejemplo, permite predecir que las distribuciones angulares de los piones cargados en la reacción $p\overline{p} \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ son simétricas ($d\sigma/d\theta_+ = d\sigma/d\theta_-$). En la interacción electromagnética, un ejemplo de conservación de $\mathcal{C}$ se da en el fotón, cuanto del campo electromagnético, cuyo espín es $S_\gamma = 1$ y cuyo valor propio de la conjugación de carga es $\mathcal{C}(\gamma) = -1$, ya que el campo eléctrico $\mathcal{E}$, cambia de signo bajo $\mathcal{C}$,[7] por lo tanto la desintegración $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ está permitida (y es la que tiene lugar de manera dominante), puesto que la conjugación de carga del π^0 es $\mathcal{C}(\pi^0) = +1$. Por el contrario la desintegración $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ está prohibida por la conservación de $\mathcal{C}$. Experimentalmente se verifica:

$$\frac{\pi^0 \rightarrow 3\gamma}{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} < 3 \times 10^{-8} \tag{16.76}$$

Otro ejemplo es la desintegración del positronio (e^+e^-), sistema $f\overline{f}$ cuya conjugación de carga es $(-1)^{L+S}$. Por lo tanto, el estado para–positronio, $^1S_0$, se desintegraráen 2γ y el estado orto–positronio, $^3S_1$, en 3γ, que es lo que se observa, ya que experimentalmente $\Gamma(^1S_0 \rightarrow 3\gamma)/\Gamma(^3S_1 \rightarrow 2\gamma) < 1 \times 10^{-5}$, como cabía esperar.

La conjugación de carga no es una buena simetría para la interacción débil. El transformado por $\mathcal{C}$ del neutrino no existe (el neutrino es levógiro y el anti-neutrino, dextrógiro).

La paridad *G*

Esútil definir una generalización de la conjugación de carga que pueda aplicarse a los piones cargados. Por ello se introduce el operador paridad *G*, que se aplica también a estados compuestos por *n* piones. Se define como el producto de la conjugación de carga por el operador rotación de

180 grados de isospín:

$$G = \mathcal{C} e^{-i\tau_2 \pi} \tag{16.77}$$

siendo τ_2 la matriz de rotación según el eje *y* en el espacio de isospín. Así, para un estado definido por $|I, I_3\rangle$, el resultado de la rotación de 180 grados es:

$$e^{-i\tau_2 \pi} \mid I, I_3\rangle = (-1)^{I-I_3} \mid I, -I_3\rangle \tag{16.78}$$

Si se aplica sobre el estado neutro del pión, que tiene conjugación de carga $C(\pi^0) = +1$, conduce unívocamente a:

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \tag{16.79}$$

y se elige este valor también para los piones cargados. Estos no son propios del operador $\mathcal{C}$, perose eligela faseunívocamente:

$$\mathcal{C}|\pi^{\pm}\rangle = (-1)|\pi^{\mp}\rangle$$

de forma que la paridad *G* resulte la misma para el triplete, o sea, además de (16.79) se cumple:

$$G|\pi^{\pm}\rangle = -|\pi^{\pm}\rangle \tag{16.80}$$

Para un sistema de *n* piones, $G = (-1)^n$. Con esta definición se puede verificar que la paridad *G* está bien definida para un sistema $N - \overline{N}$ neutro:

$$G(N\overline{N}) = (-1)^{I+L+S} \tag{16.81}$$

en donde *I, L, S* son los números cuánticos del sistema.

Todos estos valores permiten obtener reglas de selección en los procesos en los que interviene la fuerza fuerte (reacciones o

desintegraciones de partículas).

16.5.3 La inversión temporal $\mathcal{T}$

El operador inversión temporal $\mathcal{T}$, transforma un estado $|\Psi(t)\rangle$ en otro $|\Psi'(t)\rangle = \mathcal{T} \mid \Psi(t)\rangle = \eta_T \mid \Psi(-t)\rangle$; es decir, invierte el signo de t. No existen estados propios del operador inversión temporal y, por consiguiente, tampoco existen números cuánticos asociados a esta simetría, ya que $\mathcal{T}$ es un operador antiunitario. En efecto, la ecuación de Schrödinger $H\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\dfrac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}$ se transforma bajo $\mathcal{T}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{T}(H\Psi(\vec{r},t)) = i\hbar\frac{\partial(\mathcal{T}\Psi(\vec{r},t))}{\partial(-t)}$$

que conduce a que la función que cumple la transformada por $\mathcal{T}$ es la conjugada compleja:

$$H\Psi^*(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi^*(\vec{r},t)}{\partial t}$$

La conservación de $\mathcal{T}$ se manifiesta por la igualdad $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = |\Psi(\vec{r},-t)|^2$. Su consecuencia es el principio de microrreversibilidad de las colisiones. La verificación experimental de la conservación de la simetría $\mathcal{T}$ en las interacciones fuertes se ha llevado a cabo a través del principio de balance detallado aplicado a los procesos:

$$\mathrm{p} + {}^{27}\mathrm{Al} \longleftrightarrow \alpha + {}^{24}\mathrm{Mg} \qquad (16.82)$$

cuyas secciones eficaces son idénticas para el mismo valor de la energía en centro de masas de las reacciones (véase la figura 16.8).

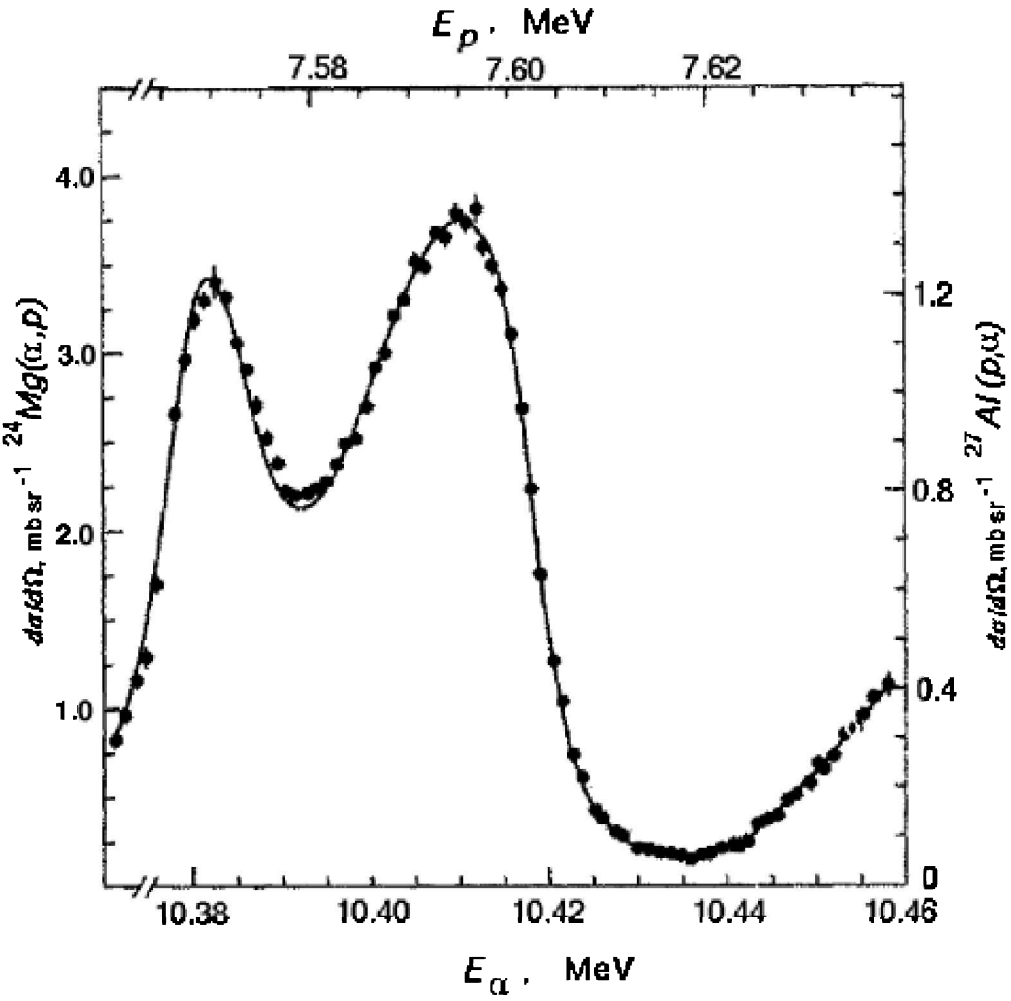


Figura 16.8: Medidas de las secciones eficaces diferenciales, para θ_{cms} = 177,77°, de los procesos p + ^{27}Al → α + ^{24}Mg y α + ^{24}Mg → p + ^{27} Al demostrando que la simetría $\mathcal{T}$ se verifica en las interacciones fuertes.

Un ejemplo de aplicación del principio del balance detallado, que tuvo gran repercusión histórica, es el de la primera determinación del espín del π^+. Se basa en la medida de la sección eficaz, que depende de los grados de libertad de espín. Se estudiaron las reacciones relacionadas por reversibilidad:

1) π^+ + d → p + p, de absorción de un π^+

2) p + p → π^+ + d, de producción de un π^+

a la misma energía en centro de masas. La sección eficaz diferencial de una reacción a dos cuerpos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(a+b\to c+d)\propto\frac{p_f}{p_i}\frac{1}{g_a g_b}\sum_{f,i}|\mathcal{M}_{f,i}|^2$$

depende del elemento de matriz de interacción $M_{f,\,i}$. El sumatorio se entiende que es sobre los estados de espín de los estados inicial y final. Aplicado a las reacciones de absorción y producción del π^+ se cumple que $p_i = p_\pi$ y $p_f = p_\mathrm{p}$ en el primer caso y $p_f = p_\pi$ y $p_i = p_\mathrm{p}$ en el segundo. El principio de balance detallado establece que $\sum_{f,i}|\mathcal{M}_{f,i}|^2=\sum_{f,i}|\mathcal{M}_{i,f}|^2$. El factor $g = 2s +1$, da la multiplicidad de espín. Se sabía que $s_\mathrm{p} = 1/2$ y $s_d = 1$, con lo que el cociente

$$\frac{\sigma(\pi^+\mathrm{d})}{\sigma(\mathrm{pp})}=\frac{2}{3(2s_\pi+1)}\frac{p_\mathrm{p}^2}{p_\pi^2}$$

En la reacción de absorción hay que multiplicar por 1/2 la sección eficaz diferencial debido a que hay dos protones idénticos en el estado final. Utilizando los resultados de los experimentos llevados a cabo por Durbin *et al.,* en 1951 con T_π = 24 MeV y Cartwright *et al.,* en 1953 a una energía T_p = 341 MeV (lo que asegura la igualdad de las energías en cdm) se obtuvo $2s_\pi + 1 = 0{,}97 \pm 0{,}31$; es decir, se concluyó que $s_\pi = 0$.

Una de las consecuencias más notables de la invariancia bajo $\mathcal{T}$ es que las partículas tienen momento dipolar eléctrico nulo. En efecto, la existencia de un momento dipolar eléctrico no nulo implicaría la violación de $\mathcal{T}$ y de $\mathcal{P}$ en la interacción electromagnética (véase por ejemplo la tabla 16.2).

Tabla 16.2: tabla de transformaciones de magnitudes físicas clásicas bajo los operadores paridad $\mathcal{P}$ e inversión temporal $\mathcal{T}$. Recuérdese, por ejemplo, que $\mathcal{E} = -\partial V/\partial r$.

cantidad	$\mathcal{T}$	$\mathcal{P}$	
$\vec{r}$	$\vec{r}$	$-\vec{r}$	
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$	vector polar
$\vec{\sigma}$	$-\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$	vector axial
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$-\mathcal{E}$	campo eléctrico
$\mathcal{B}$	$-\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$	campo magnético
$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	$-\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	$-\vec{\sigma}\cdot\mathcal{E}$	momento dipolar eléctrico
$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	$\vec{\sigma}\cdot\mathcal{B}$	id. dipolar magnético
$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$	polarización longitudinal
$\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	$-\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	$\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_1\times\vec{p}_2)$	polarización transversal

Para comprobarlo recuérdese que la interacción de un dipolo (magnético y eléctrico) en un campo electromagnético tiene una interacción descrita por

$$H' = \mu_m \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{B}} + \mu_e \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{E}}$$

y el producto $\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{B}}$ no cambia de signo bajo $\mathcal{P}$ ni Image, mientras que el producto Image sí que cambia, luego se violarían $\mathcal{P}$ y Image. Un buen ejemplo es el neutrón, para el que se ha medido el momento dipolar eléctrico, cuyo resultado es:

image

Todas las interacciones se suponen invariantes bajo la transformación Image, y también bajo la simetría Image, puesto que ambas están conectadas a través del teorema Image. Sin embargo se descubrió violación de Image en el caso muy concreto de la desintegración del mesón K^0, lo que implica que debe haber violación de Image.

16.5.4 El teorema Image

El teorema Image es un teorema fundamental que se demuestra por

prime-ros principios en la teoría cuántica de campos. Este teorema dice que todas las interacciones son invariantes bajo la aplicación consecutiva y en cualquier orden de las operaciones Image . Si el hamiltoniano de un sistema, *H*, es invariante Lorentz (invariante bajo las transformaciones relativistas de Lorentz) entonces se cumple que el producto Image conmuta con el hamiltoniano:

image

con lo que el producto de las tres simetrías debe conservarse. Este teorema es válido para todas las interacciones.

Las consecuencias prácticas más importantes del teorema Image relacionan propiedades de partículas y antipartículas. Por ejemplo, debe existir igualdad de masas y de vidas medias entre partículas y sus antipartículas; sus cargas eléctricas y momentos dipolares magnéticos deben ser iguales y de signo cambiado. Así por ejemplo para el protón y el antiprotón se debe cumplir:

Image

Ha sido verificado experimentalmente con suma precisión; las masas del K^0 y Image medidas en los estados de vida media corta y larga, Image , se ha encontrado que su diferencia es menor que 6 partes en 10^{15}. También se ha verificado midiendo Image y también[8]

Image

lo que, además, se convirtió en un test muy preciso de la relatividad especial (dilatación temporal). En la sección anterior se comentó que una eventual violación de la simetría Image implica violación de la simetría Image ya que el teorema Image conecta dichas simetrías.

Reacciones y simetrías Image

Como ilustración del efecto de las simetrías en el caso de reacciones entre partículas, se aplica a continuación a la reacción:

Image

en donde se especifican los momentos y las terceras componentes de espín de las partículas participantes, salvo para los piones que son mesones pseudoescalares (espín = 0). La siguiente tabla muestra el efecto de cada simetría sobre cada partícula y su momento y proyección de espín:

Image

16.5.5 El sistema Image

El sistema Image tiene unas propiedades cuánticas muy singulares. Existen dos dobletes[9] de kaones; el doblete ($K^+(494)$, $K^0(498)$) conextra˜neza $S = +1$, y el de sus antipartículas Image, $K^-(494)$) con $S = -1$, estados propios del hamiltoniano de la interacción fuerte; es decir, se producen gracias a la inter-acción fuerte, que conserva la extra˜neza, por ejemplo a través de las reacciones:

image

con extra˜neza bien definida: $S(K^0) = +1$ y Image $= -1$. Por otra parte, los kaones son los mesones extra˜nos más ligeros. Al desintegrarse (vía desintegración débil) no conservan la extra˜neza. Las interacciones débiles conservan, en principio, la simetría Image, por lo tanto los estados que se desintegran serán propios de Image. Se tiene:

Image

siendo η y η' fases que se pueden elegir libremente igual a 1. Está claro que ninguno de los dos es propio de Image, luego habrá que buscar otros estados si se quiere identificar a las partículas que se desintegran.

Pueden construirse dos estados cuánticos propios de Image, como una combinación lineal de K^0 y Image:

image

Los kaones pueden desintegrarse a un estado final con dos o tres piones;

image

En efecto,

Image

y

Image

Si bien Image no conservan la extra˜neza *S*, puesto que no son los estados que se producen, sí que son los estados que se desintegran. Experimentalmente se han detectado dos desintegraciones diferentes; una de vida media muy corta y otra de vida media larga:

image

que, en principio, pueden asociarse a los estados K_1 y K_2, que son las combinaciones lineales de las que se producen. Se desintegran según Image $\rightarrow 2\pi$ y Image $\rightarrow 3\pi$, respectivamente. El espacio fásico y el valor *Q* de la reacción para las desintegraciones a 2π y 3π (218 y 70

MeV respectivamente) dan lugar a dos probabilidades de desintegración diferentes; o sea, dos vidas medias distintas.

Las dos partículas Image y Image son sus propias antipartículas. Ladevidamedia corta se suele denominar el K^0 corto, y la de vida media larga, K^0 largo. Es razonable que Image sea más rápido en desintegrarse pues tiene un espacio fásico mucho mayor.

La conclusión de este sutil sistema es que a veces la noción de partícula se debe aplicar al par Image y a veces al Image .

Oscilaciones de extra ˜neza

El fenómeno de oscilación entre K^0 y Image es debido precisamente a la naturaleza de los estados que se desintegran. En efecto, se cumple:

image

Por el hecho de que K^0 y Image se desintegran a los mismos estados finales, pueden transformarse uno en otro a través de un estado de piones *virtuales*, que se puede visualizar:

Image

En términos de quarks, existen dos diagramas de Feynman tipo caja (*box diagram*) de segundo orden (véase figura 16.9) que contienen la posibilidad del fenómeno de la transición $K^0 \leftrightarrow$ Image , que se denomina oscilación de extra˜neza.

image

Figura 16.9: Oscilaciones de extra˜neza en el sistema Image . Diagramas de Feynman de segundo orden; en cada uno de ellos hay tres intercambios de quark posibles: u, c y t.

El fenómeno de oscilación entre K^0 y Image es función del tiempo. En principio, los estados Image tienen masas $m_i (i = S, L)$ y vidas medias τ_i distintas y bien definidas. Al ser estados inestables, su evolución temporal seguirá la ley general de desintegración:

image

en donde el estado tiene una vida media $\tau = \hbar/\Gamma$. Suponiendo que los estados vistos en (16.89), evolucionan con el tiempo según estaúltima ley (16.90), el estado K^0 será:

image

siendo Image. La intensidad de K^0 en función del tiempo, que vale Image, será:

image

en donde $\Delta m = m_L - m_S$. La misma expresión se obtiene para image, perocon el signo del término del coseno cambiado. Se encuentra pues que las intensidades de image oscilan con el tiempo con una frecuencia Δm (véase la figura 16.10).

En conclusión, las oscilaciones image u oscilaciones de extra˜neza son debidas a que este sistema está acoplado a través de sus modos de desintegración a 2π y 3π. La diferencia de masas entre el image y el image determina la tasa de oscilación del image y el mecanismo viene ilustrado por el diagrama de Feynman (interacción débil de segundo orden con cambio de extra˜neza $\Delta S = 2$) de la figura 16.9. El mecanismo de la oscilación es idéntico para los sistemas formados por mesones K, D, B y B_s neutros, aunque la fenomenología es algo diferente.

Se ha medido experimentalmente $|\Delta m|\tau_S = 0{,}474 \pm 0{,}002$, encontrándose que $m_L > m_S$, es decir, una diferencia de masas

excepcionalmente peque˜na:

image

image

Figura 16.10: Oscilaciones de extra˜neza en el sistema image . Se observa la evolución de la intensidad de partículas presentes en un haz, cuando se parte a $t = 0$ de un haz puro de K^0.

La regeneración de K^0

Experimentalmente es posible producir un haz puro de K^0, eligiendo convenientemente la energía umbral del haz de piones en las reacciones (16.85); la energía umbral para la reacción con π^+ es de 1,5 GeV mientras que para la reacción con π^- es de 0,91 GeV. De estaúltima, por ejemplo, se puede obtener un haz de K^0puro. Como se acaba de ver, si en el instante $t = 0$ se dispone de un haz puro de K^0, evolucionará con el tiempo de forma que transcurrido un tiempo t, existirá una superposición de image . Si este haz, recorre en el vacío el equivalente a unas 100 vidas medias del image , sólo quedarán al final image . Si este haz se hace interaccionar con un blanco material, las partículas que van a sentir la interacción fuerte son image , estados propios de la extra˜neza con $S = 1$ y $S = -1$, ya que:

image

Se conoce como fenómeno de la *regeneración* a esta característica de los K^0 por la que después de largos recorridos vuelven a aparecer image al interaccionar un haz de K^0 con la materia. En efecto, la partícula que interacciona con la materia es el K^0o el image , y cada uno de ellos con una probabilidad image , respectivamente. El image tiene mayor

probabilidad de interaccionar con la materia ya que, al tener extra˜neza $S = -1$, puede producir hiperones (por ejemplo: image), además de las reacciones de intercambio de carga que las tienen los dos kaones neutros por igual. Sea image la fracción de K^0(image) que permanece después de atravesar el bloque de materia, entonces el contenido de extra˜neza cambia de image a:

image

es decir, aparece en el estado final el image, luego se regeneran los *K cortos*, ya que image.

Es una consecuencia del principio de superposición y de la cuantización.

16.5.6 Violación de *CP* en el sistema image

La violación de la paridad es una consecuencia de que el mundo no es simétrico derecha-izquierda. Como se ha visto, en la desintegración débil $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, la paridad no se conserva; el ν_μ es sólo levógiro y image no existe. Lo mismo sucede con la conjugación de carga. Aplicada en la desintegración anterior, daría lugar a un image levógiro que tampoco existe. Sin embargo, la operación *CP* restablece la simetría. Si la simetría *CP* fuese exacta, las leyes de la física serían las mismas para la materia y la antimateria. Pero, la simetría *CP* no es perfecta. Cronin y Fitch[10] (1964) midieron el cociente de amplitudes $A = \pi\pi|H|\mathrm{K}\rangle$ de desintegración (la anchura es $\Gamma = |A|^2$). Los valores actuales de estos cocientes son:

image

con lo que el sistema K^0image viola la simetría *CP* en un 2,3 image.

Las intensidades de los estados $\pi^0\pi^0$ y $\pi^+\pi^-$ vistos en (16.95) varían con el tiempo de la misma manera que sucedía con las oscilaciones (16.91),

image

pero esta vez, las fases son φ_{+-} y φ_{00} respectivamente, que han sido también medidas:

image

Así pues, la violación de *CP* implica a su vez que la partícula que se desintegra image no es un estado puro de *CP* como se había supuesto sino una mezcla, ysi es un parámetro que representa el grado de mezcla se tendrá:

image

Esta violación de la simetría *CP*, puesta de manifiesto a través de la aparición de la desintegración image $\rightarrow 2\pi$, también se ha observado en las desintegraciones semileptónicas del image y permite distinguir la materia de la antimateria a través de la distinción entre carga positiva y carga negativa en las desintegraciones:

image

en donde ℓ representa electrón o muón, dando experimentalmente un valor medio igual a δ_L = (0,332 ±0,006) %. Si *CP* fuese una buena simetría para el image, el numerador anterior se anularía ya que los dos procesos del numerador están relacionados por la operación *CP*.

Históricamente la violación de *CP* en el sistema K^0image se ha descrito introduciendo el parámetro ε, visto más arriba, que representa la violación *indirecta* de *CP* y el parámetro ε', que mide la violación *directa*

de *CP*. Esta última es debida a que aparecen dos amplitudes de desintegración para el estado 2π; una, A_0, de isospín 0 y otra, A_2, de isospín 2, cuyas fases δ_0 y δ_2 no son idénticas. Se cumplen las siguientes relaciones con las amplitudes anteriores:

image

siendo:

image

El valor experimental del parámetro ε' se encuentra a través de la medida de:

image

lo que confirma la violación directa de *CP*.

La violación de *CP* podría ser la explicación de la asimetría materiaantimateria observada en el universo.

16.6 La invariancia *gauge*

Este es uno de los conceptos más profundos que han permitido comprender el origen de la conservación de las cargas, así como propiedades fundamentales de las fuerzas de la naturaleza.

Se denominan teorías *gauge* a las que cumplen la simetría llamada invariancia *gauge*; entre ellas se encuentran las conocidas teorías QED y QCD.

La transformación de *gauge* es una transformación de fase:

image

En este caso, se llama transformación de *gauge* local porque la

transformación depende del punto del espacio tiempo (image , t). Si la fase (f(image , t) = φ = constante) es la misma para todo el espacio, entonces se llama transformación de *gauge* global. En electromagnetismo clásico, el valor absoluto del potencial es arbitrario; con ello la carga eléctrica debe conservarse. La invariancia *gauge* global, que cumple la teoría de la electrodinámica cuántica QED, conduce a la conservación de la carga eléctrica.

Si se exige, además, que el sistema sea invariante bajo la transformación de *gauge* local aparecen nuevos términos en el lagrangiano del sistema que se interpretan como nuevas interacciones. Por ejemplo, partiendo de la ecuación de Dirac para un electrón libre, la invariancia *gauge* genera los términos que explican la interacción de una carga con un campo electromagnético. Matemáticamente, la invariancia del lagrangiano de Dirac image bajo la transformación (16.99) exige la introducción de un campo vectorial A_μ (campo *gauge*, que representa al fotón), de largo alcance que se acopla a la partícula de Dirac (con carga eléctrica $-e$), dando lugar a image .

Es pues posible introducir funciones de onda con fases arbitrariamente elegidas en diferentes puntos del espacio y del tiempo para las partículas y ello no cambiará los resultados físicos, siempre que las cargas se acoplen a un campo de largo alcance (como el electromagnético) y se conserve la carga. Las teorías que presentan invariancia *gauge* local, tienen marcadas propiedades de simetría. Además son renormalizables, lo que quiere decir que las magnitudes físicas son todas calculables y finitas.

Como q, en (16.99) es una fase escalar, se dice que la teoría es invariante *gauge* local bajo el grupo U(1). Si el escalar q, se reemplaza por un operador matricial 3x3, T_a, la invariancia que se exige tiene una forma:

image

siendo U una matriz arbitraria 3x3, unitaria, con lo que se podría imponer invariancia local bajo SU(3). Si se tratase del lagrangiano de *QCD*(los estados $\Psi(x)$ representarían entonces a los quarks), aparecería el acoplamiento de los quarks coloreados con los gluones. Como las matrices T_a, generadores del grupo, no conmutan, se dice que la teoría invariante *gauge* es no abeliana (que es lo mismo que decir que es una teoría Yang-Mills).

Lo mismo sucede con la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam, pero que es invariante bajo el grupo SU(2)⊗ U(1). De aquí proviene el esquema del modelo estándar que dice que es una teoría invariante *gauge* basada en el grupo:

image

queriendo decir con ello que las transformaciones *gauge*, de cada interacción forman un grupo de Lie: el primer grupo, SU(3), representa a la teoría de la interacción fuerte QCD; el subíndice C recuerda el color de los bosones *gauge* de QCD, que se acoplan a los quarks. El producto $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ representa a la interacción electrodébil. Significa que es invariante bajo rotaciones del grupo SU(2) de isospín débil: es decir, la interacción no distingue entre leptones de dobletes levógiros (subíndice L). La simetría U(1) tiene que ver con singletes de hipercarga débil (subíndice Y). Después de la rotura espontánea de la simetría, tres de los cuatro bosones gauge de la teoría electrodébil adquieren masa (bosones $W^{\pm}$ y Z) y el cuarto (el fotón de QED) continúa sin masa.

16.7 Leyes de conservación en las interacciones fundamentales

Con todo lo visto, puede construirse la tabla 16.3 en la que se resumen las propiedades de simetría de cada una de las interacciones y las leyes de conservación que cumplen.

Se observa que todas las interacciones respetan los grandes principios de conservación de la energía, momento lineal y momento angular. También se observa que las cargas eléctrica, bariónica y leptónica, son conservadas por todas las interacciones. Conviene recordar que el origen de la conservación de la carga eléctrica es debido a la invariancia gauge global de la interacción electromagnética. Sin embargo, no puede relacionarse la conservación del número bariónico y del número leptónico con ninguna propiedad de simetría que lo justifique. Experimentalmente se han verificado los límites de la conservación de estas cargas midiendo vidas medias; por ejemplo, para la carga eléctrica se ha medido la desintegración del neutrón (violando la carga eléctrica) y se obtiene:

image

Tabla 16.3: Leyes de conservación en las interacciones entre partículas elementales.
(*) pero se cumplen reglas como image ;
(**) 2 por mil violado en la desintegración del image .

image

La desintegración del protón es una de las consecuencias de las teorías de gran unificación, que evidenciaría la violación del número bariónico a través de desintegraciones tales como $p \rightarrow e^{+}\pi^{0}$. Además no hay una explicación convincente todavíaalaasimetría materia-antimateria en el universo; parece ser que no existe antimateria. Es lógico suponer que tras la síntesis barónica del big-bang el número de bariones y de antibariones eran iguales. Si hoy existen $N_B = 10^{79}$ bariones en el universo, ha debido existir en algún momento un proceso que violó el número bariónico. El límite experimental actual sobre la conservación del número bariónico es significativamente mayor que el límite de conservación de la carga eléctrica:

image

Esteúltimo proceso también viola el número leptónico. Pero existen límites experimentales menos severos que se han obtenido estudiando la desintegración doble beta sin neutrinos. Un proceso que, como se ha visto, podría tener lugar si los neutrinos fueran de tipo Majorana en vez de tipo Dirac. Se ha medido, por ejemplo, la desintegración sin neutrinos:

$$\pi(^{76}\mathrm{Ge} \rightarrow {}^{76}\mathrm{Se} + e^- + e^-) > 10^{26}\ \text{a˜nos}$$

Es de destacar que todas las simetrías son buenas para la interacción fuerte y todas, excepto el isospín, son también buenas simetrías para la interacción electromagnética. La interacción débil no cumple la conservación de los números cuánticos internos. De hecho, la interacción débil es la responsable del cambio de sabor de los quarks. Más sorprendente es que tampoco cumpla la conservación de la paridad ni la de la conjugación de carga. En un principio se suponía que la interacción débil conservaría el producto *CP*, pero también se ha puesto de manifiesto (en la desintegración del image) que se trata de una simetría violada en un $2^0/_{00}$.

16.8 Problemas

16.1 Producción de antiprotones.

Se consideran las siguientes colisiones protón-protón con producción de un anti-protón:

image

a) Indicar cuáles están permitidas y cuáles no.

b) Para aquellas que estén permitidas, calcular la energía umbral del protón incidente en los sistemas del laboratorio y del centro

de masas.

16.2 Reacciones de neutrinos.

Se consideran las siguientes colisiones de neutrinos contra la materia:

image

siendo ν un neutrino o bien un antineutrino y N un protón o bien un neutrón.

a) Indicar cuáles están permitidas y cuáles no en función del sabor del neutrino incidente y de la naturaleza del nucleón N.

b) Para aquellas que estén permitidas, calcular la energía umbral del neutrino incidente en el sistema del laboratorio.

16.3 Desintegración a dos cuerpos.

Se considera la desintegración de una partícula de masa M en dos partículas de masas m_1 y m_2.

a) Calcular la energía y el momento de las partículas resultantes de la desintegración.

b) Efectuar la aplicación numérica para las desintegraciones $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ y $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$.

16.4 Desintegración a tres cuerpos y diagrama de Dalitz.

Se considera la desintegración de una partícula de masa M en tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3.

a) Demostrar que las energías E_1, E_2 y E_3 se pueden expresar en función de las masas invariantes de los pares de partículas image , respectivamente, y que, por tanto, es equivalente utilizar las energías o las masas invariantes.

b) Demostrar que image y que existen límites similares para E_2 y E_3. Demostrar que para un valor de E_1 dado, dentro los límites anteriores, los valores máximo y mínimo de E_2satisfacen las ecuaciones

image

donde el signo + corresponde al valor máximo de E_2 y el signo − al valor mínimo.

c) Dibujar el diagrama de Dalitz para la desintegración $K \rightarrow \pi\pi\pi$.

d) Dibujar la zona cinemáticamente accesible en el plano $E_1 - E_2$ (diagrama de Dalitz) para el caso en que todas las masas sean nulas.

16.5 Desintegración del π^0.

a) Deducir la expresión de la energía de los fotones producidos en la desintegración $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, en función de la energía E_π en el sistema del laboratorio y del ángulo θ^* entre la dirección del π^0 y la del fotón emitido, en el sistema propio del π^0.

b) Al ser nulo el espín del π^0, la distribución angular es isótropa en el sistema propio del π^0. Deducir que la distribución de energía de los fotones emitidos es constante en el sistema del laboratorio y calcular las energías máxima y mínima de los fotones emitidos.

16.6 Desintegración del τ.

Se consideran los leptones τ producidos en el anillo de colisiones LEP según la reacción $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ a una energía en centro de masas de image .

a) Calcular la longitud media recorrida por los leptones τ antes de desintegrarse.

b) Se considera la desintegración $\tau \rightarrow \pi\nu$. calcular la energía en el laboratorio de los piones producidos, en función delángulo θ^* entre la dirección del τ y la del pión, en el sistema propio del τ.

c) Calcular el parámetro de impacto de los piones y su valor asintótico para $\beta_\tau \rightarrow 1$. Calcular el valor medio de este valor asintótico suponiendo que los leptones τ no están polarizados.

16.7 Cinemática de las colisiones de neutrinos.

Se considera una colisión de tipo corriente cargada entre un neutrino y un núcleo con emisión de un muón. La dirección del haz de neutrinos es conocida, pero no su energía.

a) Demostrar que la energía del neutrino incidente puede deducirse a partir del momento y delángulo del muón emitido.

b) Demostrar que a partir de las dos variables anteriores puede igualmente deducirse la energía y la dirección del sistema hadrónico producido por el retroceso del núcleo.

c) Aplicación numérica: calcular E_ν, E_h y $cos\theta_h$ suponiendo E_μ = 1,96 GeV y $\theta_\mu = 45^\circ$.

16.8 Leyes de conservación en diversas reacciones.

Indicar cuáles de los siguientes procesos están permitidos y cuáles están prohibidas, indicando en cada caso las leyes de conservación que sean aplicables.

image

16.9 Estudio de la desintegración de Ξ^{*-}.

La desintegración completa de la resonancia Ξ^{*-} se produce mediante la siguiente secuencia:

image

Sabiendo que el contenido en quarks de los distintos hadrones es image image clasificar los diversos procesos según el tipo de interacción (fuerte, electromagnética o débil).

16.10Estudio de la desintegración de η^0.

El mesón $\eta^0(549)$ tiene los siguientes modos de desintegración, con sus correspondientes cocientes:

image

a) Demostrar que la desintegración en 3 π es electromagnética.

b) Demostrar que la desintegración en 2 π está prohibida.

16.11 Leyes de conservación en la interacción débil.

Indicar cúales de los siguientes procesos están permitidos según las leyes de conservación aplicables a la interacción débil:

a) $\nu_\mu p \to \mu^+ n$

b) $\nu_e p \to e^- \pi^+ p$

c) image

d) $K^+ \to \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$

16.12 Paridad intrínseca del π^-.

Determinar la paridad intrínseca del π^- a partir de la reacción de captura por deuterio $\pi^- d \to nn$, sabiendo que los números cuánticos del deuterio son $J^P = 1^+$ y que la captura se efectúa en onda S.

16.13 Estudio de la aniquilación image .

Se considera el proceso de aniquilación image $\to \pi^+ \pi^-$.

a) Determinar los valores posibles de paridad P y conjuagación de carga C para los sistemas inicial y final.

b) Determinar los valores posibles del momento angular utilizando la conservación de paridad.

c) Razonar si la conservación de C permite limitar los valores obtenidos en el apartado anterior.

d) Estudiar qué ocurre en el proceso image $\to \pi^0 \pi^0$.

16.14 Estudio de las colisiones πp.

a) Utilizando la conservación del isospín en la interacción fuerte, determinar el valor de las secciones eficaces de los tres procesos $\pi^+ p \to \pi^+ p$, $\pi^- p \to \pi^- p$ y $\pi^- p \to \pi^0 n$, en función deúnicamente las dos amplitudes de isospín total.

b) Deducir el cociente de las secciones eficaces para image GeV, en cuyo caso la colisión está dominada por la presencia de las resonancias Δ.

c) Determinar el cociente relativo de los modos de desintegración $\Delta^0 \to \pi^- p$ y $\Delta^0 \to \pi^0 n$. ¿Qué ocurriría si Δ^0

tuviera un isospín igual a 1/2?

16.15Estudio de las colisiones *Kp*.

Expresar las secciones eficaces de los procesos image en términos de dos amplitudes con isospín total definido.

---

[1]Se utilizan frecuentemente, en este tema, las unidades naturales, $\hbar = c = 1$, para simplificar la notación.

[2]Véase por ejemplo la publicación *Review of Physics* del *Particle Data Group*: J. Beringer *et al.*, *Phys. Rev.*, **D86**, 010001 (2012).

[3]El operador de Casimir es una función no lineal de los generadores del grupo, que conmuta con todos ellos.

[4]Esta definición se generaliza, sumando las otras cargas de los quarks (encanto, belleza y verdad).

[5]W. Chinowski, J. Steinberger, *Phys. Rev.*, **95** (1954) 1561.

[6]Un fotón virtual es escalar y además tiene masa $\neq 0$.

[7]En este caso el cambio de signo proviene del hecho de que la densidad de carga Image cambia de signo bajo la conjugación de carga Image .

[8]D. S. Ayres *et al.*, *Phys. Rev.*, **D3** (1971) 1051.

[9]Son estados Image , con q = u, d que forman un doblete de isospín.

[10]J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.*,13 (1964) 138.

17. Espectroscopía de hadrones

En la década de los a˜nos 1960 se detectaron y estudiaron un gran número de hadrones (por entonces conocidos por el nombre de partículas *elementales*) que se fueron descubriendo gracias a la puesta en marcha de los grandes aceleradores de partículas y los correspondientes detectores.

La espectroscopía de partículas consiste en determinar todos los números cuánticos de las mismas.Ésta es una tarea muy lenta y compleja, que ocupó numerosos equipos de investigadores de todo el mundo.

Pero la aparente complejidad en cuanto al elevado número y propiedades de los hadrones quedórápidamente superada al ser propuesto el primer modelo de quarks constituyentes de Gell-Mann, Neeman y Zweig, objeto de estudio en este tema. La consistencia general que existe entre los números cuánticos de los hadrones descubiertos y las predicciones de los modelos basados en quarks constituyentes, aportaron razones muy sólidas para creer en los quarks. Sin embargo, tras varios a˜nos de búsquedas infructuosas de los quarks en estado libre realizados en la radiación cósmica, en los aceleradores e incluso en meteoritos, mantuvieron cierto grado de desconfianza en la idea de quarks constituyentes que fue rehabilitada tras los experimentos de difusión profundamente inelástica de leptones sobre nucleones en los que se probó que el nucleón está compuesto por *partones*, constituyentes puntuales, casi libres y muy ligeros que fue fácil identificar con los quarks.

17.1 El modelo de quarks de los hadrones

Fruto de los trabajos teóricos de M. Gell-Mann,[1] y. Neeman[2] yG. Zweig[3] se elabora un primer modelo de los hadrones basado en la simetría unitaria SU(3), y que postula la existencia de tres constituyentes básicos, que el propio Gell-Mann bautiza con el nombre de *quarks*. Estos tres quarks se distinguen por su *sabor* y se denominan u, d, s (iniciales de *up, down* y *strange*).

Esta simetría es consecuencia de la conservación del isospín y la extra˜neza en las interacciones fuertes entre hadrones. La simetría debe ser de la forma $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$. El doblete fundamental de $SU(2)_I$ lo forman los quarks u, d y el singlete de la extra˜neza, que representa $U(1)_Y$ es el quark *s*. La simetría que se supone es SU(3) porque es la más sencilla que contiene a esas dos simetrías subyacentes.

Según el modelo de quarks constituyentes, los hadrones son estados ligados de quarks, cuyas estructuras más elementales son:

- los bariones, estados de tres quarks *qqq*,
- los mesones, estados quark-antiquark $q\bar{q}$.

Además, se suelen denominar mesones o bariones exóticos, a todos aquellos hadrones que no cumplen la anterior prescripción mínima. Una manera de descubrir mesones exóticos es buscar partículas cuyos números cuánticos no puedan explicarse por estados $q\bar{q}$. Otra categoría de exóticos está representada por hadrones compuestos por 4ó 5 quarks (bariones del tipo $qqqq\bar{q}$ o mesones $q\bar{q}q\bar{q}$). Todas estas búsquedas han resultado, hoy por hoy, infructuosas.

A los tres primeros quarks se les asignan los números cuánticos de la tabla 17.1; todos ellos son fermiones (espín $\frac{1}{2}$) y tienen número bariónico $ß = \frac{1}{3}$, de forma que los bariones tienen número bariónico $ß = 1$ y los mesones tienen número bariónico $ß = 0$. Existen también los tres

antiquarks de cada uno de los quarks dados en la tabla 17.1. Los antiquarks tienen número bariónico ß = $-\frac{1}{3}$, así como todas las otras *cargas*, cambiadas de signo. De esta manera, el modelo se generaliza a todas las antipartículas y supone que los antibariones están compuestos por tres antiquarks $\overline{q}_1\overline{q}_2\overline{q}_3$ y los mesones $q_1\overline{q}_2$ tendrán antimesones $\overline{q}_1 q_2$, con lo que podrán existir mesones que son su propia antipartícula (por ejemplo el π^0 ó el ρ^0).

Tabla 17.1: Los tres primeros quarks introducidos por Gell-Mann, que componen la representación fundamental del modelo SU(3) de sabor. A todos ellos, por convenio, se les asigna paridad = +.

QUARKS $S = 1/2\ B = 1/3$	M (GeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0
d	0,39	-1/3	1/2	-1/2	0	0	0	0
s	0,51	-1/3	0	0	0	−1	0	0

Así pues, los quarks tienen carga eléctrica fraccionaria. Pero hay que insistir en el hecho experimental de que todavía no se ha descubierto ninguna partícula en estado libre (es decir, cuya trayectoria sea medible en un campo electromagnético) que tenga carga eléctrica igual a una fracción de la del electrón. Los quarks existenúnicamente confinados en el interior de los hadrones y todavía no ha sido posible detectarlos en estado libre. Esta es la idea de confinamiento, consecuencia de la interacción fuerte entre quarks debida al *color*; todos los quarks poseen tres colores: rojo, verde y azul, que son tres tipos de *carga fuerte*, a diferencia de los dos tipos de carga eléctrica: (+, −). Por comodidad se introduce la llamada hipercarga,[4] $Y = B + S$, suma del número bariónico y de la extra˜neza. Con ello la relación entre la hipercarga y la carga eléctrica viene dada por:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{17.1}$$

que es la fórmula de Gell-Mann-Nishijima. En esta expresión Q es un número entero, sin dimensiones; si se desea calcular la carga, habrá que multiplicar por la unidad de carga eléctrica *e*, que es, en valor absoluto, igual a la carga del electrón.

17.2 Números cuánticos de los hadrones

El objetivo de la espectroscopía de hadrones es determinar los números cuánticos de todos los hadrones encontrados en los experimentos de física de altas energías. Los más representativos son: Masa (*M*), espín-paridad y conjugación de carga (notación: J^{PC}) y las cargas *Q, ß, S, C, B, T*. Así, por ejemplo, la prescripción mínima del modelo de quarks conduce a las cargas posibles para los hadrones que pueden contemplarse en la tabla 17.2.

Tabla 17.2: Valores de la carga y del isospín posibles, según el valor de la extra˜neza para bariones y mesones en el modelo de quarks.

Barión			Mesón		
S	Q	I	S	Q	I
0	$2, 1, 0, -1$	3/2,1/2	1	1,0	1/2
-1	$1, 0, -1$	$1, 0$	0	$1, 0, -1$	$1, 0$
-2	$0, -1$	1/2	-1	$0, -1$	1/2
-3	-1	0			

La interacción fuerte, conserva todos los números cuánticos de los

hadrones; es decir, los que aparecen en la tabla 17.1 que muestra las propiedades de los quarks constituyentes. Así, fijados los números cuánticos de los bariones p(938) y n(940) y de los mesones $K^-(494)$, $D^-(1869)$, $B^-(5279)$ con $S = -1$, $C = -1$ y $B = -1$, respectivamente, se pueden deducir los números cuánticos *S, C, B*, de los mesones ($B = 0$) π^0, π^+, K^+ y del hiperón ($B = 1$) Λ^0, a partir de las reacciones:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow p + n + \pi^+ \\ p + p &\rightarrow p + p + \pi^0 \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n \\ \pi^- + p &\rightarrow K^+ + \pi^- + \Lambda^0 \\ K^- + p &\rightarrow \pi^0 + \Lambda^0 \end{aligned} \qquad (17.2)$$

17.2.1 Isospín en el modelo de quarks

De particular importancia es la simetría de isospín, consecuencia de la igualdad de la fuerza fuerte para los quarks u y d. En efecto, Heisenberg (1932) introdujo el isospín para caracterizar al nucleón, que tiene dos estados de carga: p, n, que se comportan de manera idéntica en las interacciones fuertes (simetría de carga e independencia de carga de las interacciones fuertes; propiedades de los núcleos espejo, etc.). La conservación del módulo de *I* es consecuencia de la invariancia del hamiltoniano fuerte bajo las rotaciones en el espacio de isospín.

Los quarks (u, d) forman un doblete de isospín ($I = \frac{1}{2}$). Los demás son singletes de isospín ($I = 0$). Habrá una serie de valores posibles del isospín para cada extra˜neza (véase la tabla 17.2).

17.2.2 Diferencias de masa en multipletes de isospín

Si la simetría $SU(2)_I$ de isospín fuese exacta, las partículas de un multiplete de isospín (por ejemplo el doblete (p, n), el triplete ($\pi^-\pi^0\pi^+$),

etc.) deberían tener la misma masa. Sin embargo, puede suponerse que la diferencia entre las masas de hadrones de un mismo multiplete es debida a la interacción eléctrica entre los quarks constituyentes.

Tómese el caso de los hiperones Σ. Su producción es posible en interacciones del tipo:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^- + \mathrm{p} &\rightarrow \pi^- + \Sigma^+ \\ &\rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 \\ &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \end{aligned} \qquad (17.3)$$

El Σ^+ se desintegra por medio de la interacción débil: $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + \mathrm{n}$ o $\Sigma^+ \rightarrow \pi^0 + \mathrm{p}$, con una vida media $\tau_\Sigma = 0{,}8 \times 10^{-10}$ seg, característica de la interacción débil. El Σ^0 se desintegra vía interacción electromagnética $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, ya que el $\Lambda^0(1116)$, con los mismos números cuánticos, es más ligero. Porúltimo, el $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \mathrm{n}$.

La estructura de quarks que se deduce de los principios de conservación es la siguiente:

$$\Sigma^+(1189) = \mathrm{uus} \qquad \Sigma^0(1193) = \mathrm{uds} \qquad \Sigma^-(1197) = \mathrm{dds}$$

en donde entre paréntesis se da la masa de cada hiperón.

Si las diferencias entre sus masas se supone que vienen de la interacción eléctrica entre pares de quarks, con carga eléctrica $z_\mathrm{u} = 2/3$ y $z_\mathrm{d} = z_\mathrm{s} = -1/3$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} M(\Sigma^+) &= M_0 + m_\mathrm{s} + 2m_\mathrm{u} + \delta \cdot (z_\mathrm{u}^2 + z_\mathrm{u} z_\mathrm{s} + z_\mathrm{u} z_\mathrm{s}) \\ &= M_0 + m_\mathrm{s} + 2m_\mathrm{u} \\ M(\Sigma^0) &= M_0 + m_\mathrm{s} + m_\mathrm{d} + m_\mathrm{u} + \delta \cdot (z_\mathrm{u} z_\mathrm{d} + z_\mathrm{u} z_\mathrm{s} + z_\mathrm{d} z_\mathrm{s}) \\ &= M_0 + m_\mathrm{s} + m_\mathrm{d} + m_\mathrm{u} - \delta/3 \\ M(\Sigma^-) &= M_0 + m_\mathrm{s} + 2m_\mathrm{d} + \delta \cdot (z_\mathrm{d}^2 + z_\mathrm{d} z_\mathrm{s} + z_\mathrm{d} z_\mathrm{s}) \\ &= M_0 + m_\mathrm{s} + 2m_\mathrm{d} + \delta/3 \end{aligned} \qquad (17.4)$$

siendo M_0 la masa del triplete, idéntica, ya que la interacción fuerte es la

misma para los tres quarks; z_i son las cargas de los quarks y δ una constante

$$\delta = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{e^2}{r}$$

que representa la interacción eléctrica. De la anterior relación de masas se puede inferir:

$$m_{\mathrm{d}} - m_{\mathrm{u}} = \frac{1}{3}\left[M(\Sigma^-) + M(\Sigma^0) - 2M(\Sigma^+)\right] = 3{,}7\ \mathrm{MeV/c^2} \qquad (17.5)$$

lo que confirma la similitud entre las masas de los quarks del doblete de isospín (*u*, *d*).

17.3 La simetría SU(3)

La simetría SU(3) de sabor de quarks introducida por Gell-Mann es una generalización de la invariancia de las interacciones fuertes bajo SU(2), el grupo que describe el isospín. Según esta simetría, los hadrones se agruparán en multipletes; todos los hadrones de un multiplete tendrán el mismo valor de los números cuánticos espín-paridad $J^{\mathcal{P}}$. Esto es consecuencia de la invariancia Lorentz (el hamiltoniano de SU(3) es invariante relativista). Los números cuánticos, aditivos, que se conservan y que caracterizan cada multiplete son el isospín *I* y la hipercarga *Y*.

Después del descubrimiento de los hadrones extra˜nos, se comprueba inmediatamente que las interacciones fuertes conservan el número cuántico *S*, extra˜neza, o lo que es lo mismo la hipercarga *Y*, que es como una carga y cuyo grupo de simetría es $U(1)_Y$. De aquí, fue fácil extender la simetría inmediatamente superior que engloba el isospín y la extra˜neza. En efecto SU(3) contiene al producto $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$.

La figura 17.1 muestra la representación gráfica de los tres quarks de la representación fundamental del grupo SU(3) de sabor de quarks. En

ella se pueden observar los números cuánticos de interés para este modelo: la tercera componente del isospín I_3 y la extra˜neza, S, que es equivalente a la hipercarga. Se observa el doblete de isospín $\frac{1}{2}$ formado por los quarks u y d y el singlete de isospín, el quark s que tiene extra˜neza $S = -1$.

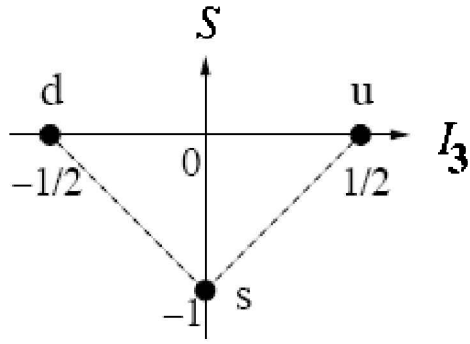


Figura 17.1: Los tres quarks que forman la representación fundamental del modelo SU(3) de sabor.

También existe un multiplete fundamental de anti-quarks, en el que los tres antiquarks
Paqu, $\overline{\mathrm{d}}$, $\overline{\mathrm{s}}$ tienen los signos cambiados de S y de I_3 así como el de las otras cargas *ß* y Q.

Hay que tener presente que eléxito del concepto de quark constituyente es consecuencia del descubrimiento de los hadrones y de la determinación de sus números cuánticos. Para ello, la interacción fuerte, que conserva todos los números cuánticos estudiados, ha sido la que ha proporcionado el método más eficaz, como ya ha podido comprobarse más arriba.

17.3.1 Representación matricial del grupo SU(3)

Procediendo de la misma manera que en el caso del grupo del SU(2) de espín o de isospín, se pueden encontrar las representaciones

matriciales del grupo SU(3) de sabor de los quarks.

Ahora, la representación fundamental de SU(3) es la $\underline{3}$ (o sea la dimensionalidad es 3). La representación de los antiquarks 3 es la llamada representación conjugada. El triplete fundamental que representa a cada uno de los quarks u, d, s vendrá caracterizado por uno de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17.6}$$

todos ellos vectores propios del par de números cuánticos (I_3, Y), con los valores propios $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $(0, -\frac{2}{3})$ respectivamente. Más abajo se verálarepresentación matricial de los operadores I_3, Y.

Si en SU(2) hay 3 generadores (las 3 matrices 2×2 de Pauli), en SU(3) habrá 8 generadores (las 8 matrices 3×3 de Gell-Mann). En efecto, en un grupo de dimensionalidad n, hay $(n^2 - 1)$ generadores.

Una transformación bajo el grupo SU(3) de uno de los estados ϕ de SU(3), combinación lineal de los vectores base vistos en (17.6), viene dada por $\phi = U\,\phi$, siendo U el operador unitario:

$$\boxed{U(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\theta\hat{n}\cdot\hat{\lambda}}} \tag{17.7}$$

La representación matricial de los 8 generadores $F_j = \frac{1}{2}\lambda_j$ del grupo SU(3) se obtienen a partir de:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (17.8)$$

y cumplen las relaciones (llamadasálgebra del grupo):

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \qquad (17.9)$$

siendo f_{ijk}, los elementos de un tensor totalmente antisimétrico que son las constantes de estructura del grupo y que valen, $f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los restantes no nulos toman el valor $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$.

Los operadores que conmutan son F_3 y F_8 y están relacionados con los números cuánticos de SU(3):

$$\begin{aligned} I_3 &= F_3 \\ Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \end{aligned} \qquad (17.10)$$

con lo que los estados quedan caracterizados por $|I, I_3, Y$.

La simetría SU(3) incluye tres posibles subgrupos con simetría SU(2) como la de isospín, que quedan definidos a partir de los operadores subida/bajada:

$$\begin{aligned} I\text{-espín} \quad & I_\pm = F_1 \pm i F_2 \\ V\text{-espín} \quad & V_\pm = F_4 \pm i F_5 \\ U\text{-espín} \quad & U_\pm = F_6 \pm i F_7 \end{aligned}$$

17.4 Multipletes de bariones y mesones

La forma de generar los multipletes de los hadrones está basada en los productos de la representación fundamental siguiendo la prescripción mínima (qqq o qq) vista más arriba. Un método gráfico de suma de pesos[5] (véase la figura 17.2) de la representación, permite obtener fácilmente las representaciones irreducibles.

17.4.1 Representaciones irreducibles de SU(3)

La importancia del grupo SU(3) de sabor para la física de partículas radica en que se postula que los hadrones son los estados de las representaciones irreducibles del grupo SU(3), que poseen el mismo espín-paridad J^P. Evidentemente todos los hadrones que pertenezcan a un mismo multiplete deben tener las mismas propiedades espacio-temporales, o sea el mismo espín y paridad, ya que SU(3) conmuta con el grupo de las transformaciones de Lorentz. Por otra parte, como el hamiltoniano es invariante bajo las transformaciones SU(3) todos los hadrones de un mismo multiplete tendrán la misma interacción fuerte.

Para obtener una representación irreducible de SU(3) deben tenerse en cuenta los siguientes criterios. Hay que construir el diagrama de pesos en el plano I_3, Y, simplemente sumando los pesos de las representaciones que se componen; ejemplo $3 \otimes 3$. A continuación, se tienen en cuenta las siguientes reglas:

1. Las representaciones obtenidas tienen simetría hexagonal; a veces triangular.
2. Hay al menos un estado para cada representación.
3. La multiplicidad de los estados de la capa externa es 1 y va aumentando de uno en uno a medida que la capa es más interna. Cuando se llega a una capa triangular, la multiplicidad ya no aumenta más. El centro debe tener multiplicidad 2 como máximo, para ser una representación irreducible.

La prescripción mínima del modelo da lugar a los casos más interesantes:

- los bariones son estados de tres quarks *qqq*; por lo tanto, su representación se obtendrá calculando en primer lugar el producto directo:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}$$

con lo que

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{M_S} \oplus 8_{M_A} \oplus 1_A \qquad (17.11)$$

Los subíndices *S* y *A* significan que los multipletes son totalmente simétricos y antisimétricos bajo intercambio. Los dos octetes que aparecen no son idénticos; se distinguen por la simetría de intercambio de los dos primeros quarks; los subíndices M_S y M_A indican simetría y antisimetría bajo intercambio de los dos primeros quarks.

- los mesones son estados quark-antiquark $q\overline{q}$ y su representación se obtendrá como resultado del producto directo

$$3 \otimes \overline{3} = 1 \oplus 8 \qquad (17.12)$$

En conclusión, para los estados de menor energía de los bariones se tendrá un decuplete, dos octetes (cada uno con distinta simetría bajo intercambio) y un singlete. Para los mesones, se predice un octete y un singlete, que globalmente se les suele denominar nonete.

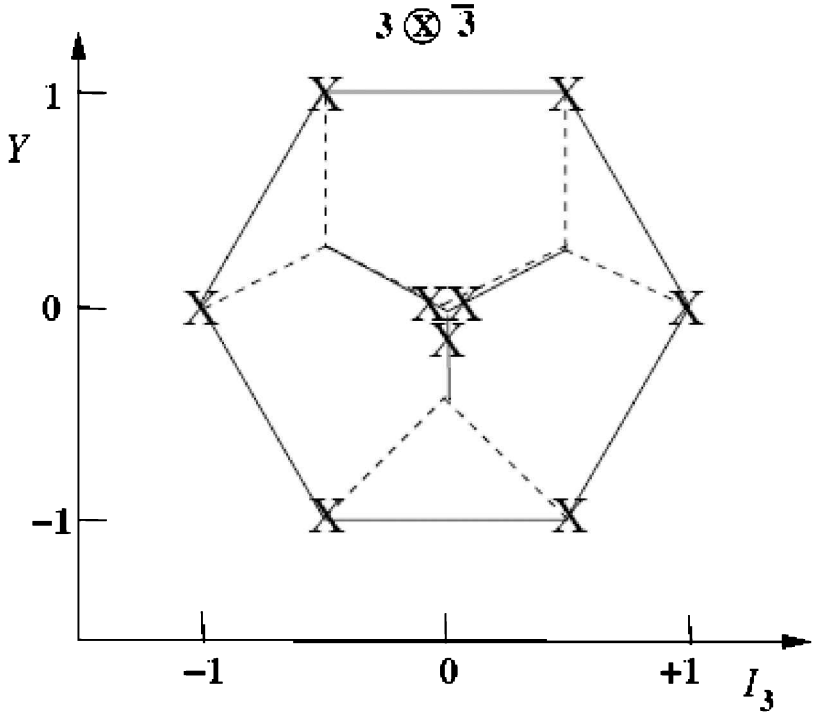


Figura 17.2: Técnica gráfica que ilustra la reducción del producto $3 \otimes \overline{3}$.

17.4.2 Multipletes de bariones

Es lógico pensar que los estados de menor energía de los bariones se formarán con tres quarks con momento angular orbital relativo $\ell = \ell' = 0$, siendo ℓ el momento angular orbital entre el quark q_1 y el q_2, mientras que ℓ' es el momento angular orbital del quark q_3 con la linea de vuelo entre q_1 y q_2. La paridad será $\mathcal{P} = (-1)^{\ell+\ell'} = +1$. Existen dos multipletes de bariones que cumplen esta condición; el octete con $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$, entre los que se encuentran el protón y el neutrón como puede verse en la figura 17.3 **(a)**, y el decuplete de bariones con $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$, mostrado en la figura 17.3 **(b)** entre los que se encuentra el multiplete de isospín $I = \frac{3}{2}$ de la resonancia $\Delta(1232)$ descubierta por Fermi.

La asociación $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^{+} \Longrightarrow$ decuplete y $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^{+} \Longrightarrow$ octete está contenida en el grupo SU(6) de quarks con espín. En efecto, los seis estados básicos de SU(6) son los quarks con espín: u $\uparrow$, u $\downarrow$, d $\uparrow$, d $\downarrow$, s $\uparrow$, s $\downarrow$; al componer tres quarks con espín se obtiene: $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_{S} \oplus 70_{M_S} \oplus 70_{M_A} \oplus \mathbf{20}_{A}$, y laúnica representación totalmente simétrica es la representación 56, resultado de la composición:[6]

$$56 = (10,4) \oplus (8,2)$$

puesto que para los multipletes de espín se tiene:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = 4_S \oplus 2_{M_S} \oplus 2_{M_A} \qquad (17.13)$$

Esto implica que los estados del decuplete son totalmente simétricos bajo SU(3) e incluso bajo SU(6).

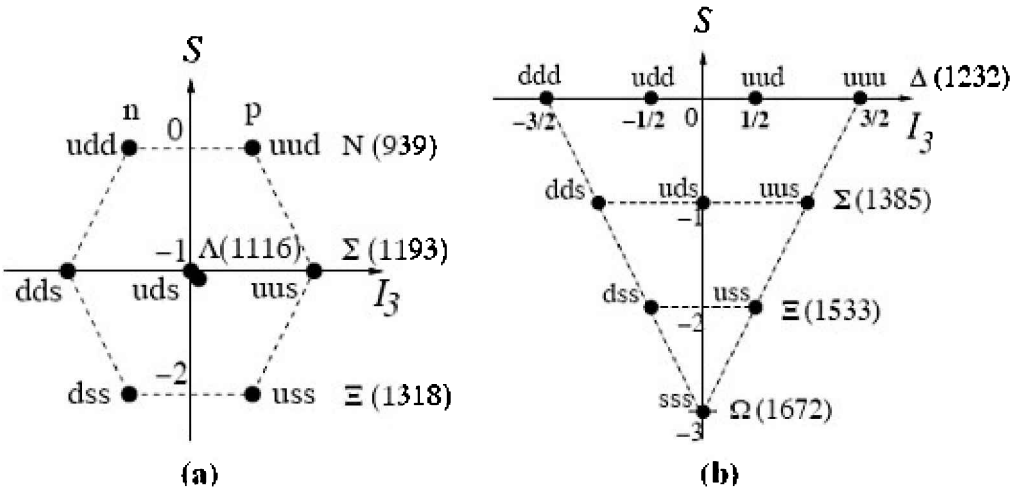


Figura 17.3: **(a)** Octete de SU(3) con los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^{+}$. **(b)** Decuplete de SU(3) con los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^{+}$.

El hecho más atractivo del modelo es la clasificación de los bariones $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^{+}$, que se ajustan a los estados del decuplete de la figura 17.3

(b). En el momento en el que el modelo fue propuesto, no se conocía todavía el hiperón $\Omega^-(1672)$. Este fue un granéxito del modelo ya que se propuso la búsqueda de esta partícula en un experimento de producción,[7]

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0 \qquad (17.14)$$

y efectivamente fue encontrada[8] poco después en el laboratorio de Brookhaven (BNL, EEUU) en un experimento que utilizó un haz de K^- de 5 GeV/c y como detector, la cámara de burbujas (cuyo tama˜no era de 80 pulgadas) llena de hidrógeno líquido en la que se pudo detectar los fotones de la desintegración de los mesones π^0 gracias a la materialización en pares: $\gamma \rightarrow e^+e^-$, fenómenos bien conocidos y estudiados ya por entonces. En efecto, $\Omega^- \rightarrow \Xi^0\pi^-$ y $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\pi^0$, y por otra parte, $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$, con lo que hay que tener buena eficiencia para detectar las desintegraciones del $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (véase figura 17.4). El valor $c\tau$ = 2,458 cm del Ω^- confirma que su traza en la cámara debe ser muy corta, como así sucede (~ 1,5 cm). Sin embargo esteéxito vino seguido de una gran disputa debida a la simetría por intercambio de las funciones de onda de los bariones, como se discute a continuación.

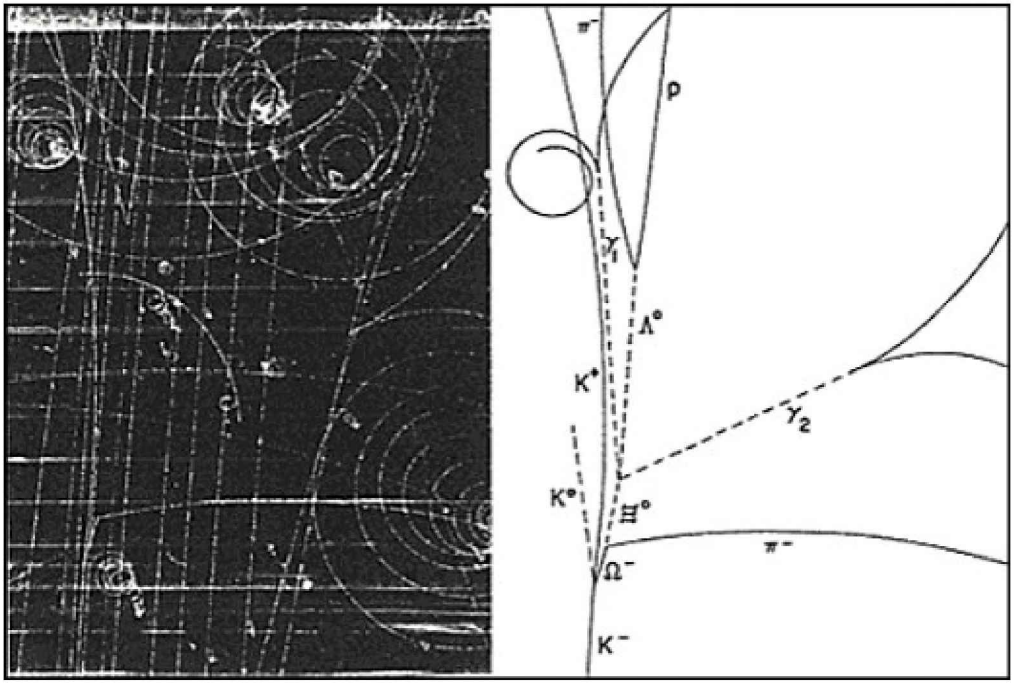


Figura 17.4: Fotografía del suceso de la cámara de burbujas que descubrió el hiperón Ω^- (1672). A la derecha, esquema con el nombre de las partículas de cada trayectoria. Fue la confirmación de la propuesta del modelo de quarks constituyentes.

Simetría de las funciones de onda bariónicas: el color

Otra de las consecuencias importantes del decuplete fue la controversia sobre la antisimetría de la función de ondas del Δ^{++}. Como este barión es un estado de tres quarks idénticos (fermiones), su función de ondas debe ser totalmente antisimétrica; es decir, cambia de signo bajo el intercambio de cualquier par de quarks. En el marco de SU(3) las propiedades de simetría bajo el intercambio son:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10_S} \oplus \mathbf{8_{M_S}} \oplus \mathbf{8_{M_A}} \oplus \mathbf{1_A} \qquad (17.15)$$

en donde los subíndices $\mathbf{M}_S$ y $\mathbf{M}_A$ indican simetría o antisimetría bajo intercambio de los dos primeros quarks.

Octete de bariones

Para describir la estructura en quarks de uno de los bariones del octete habrá que superponer los estados simétricos (8_{M_S}, 2_{M_S})+(8_{M_A}, 2_{M_A}). Ahora las funciones de onda se escribirán simbólicamente como una suma:

$$\psi^{8}_{q_1 q_2 q_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ [8_{M_S}, 2_{M_S}] \oplus [8_{M_A}, 2_{M_A}] \right\}$$

Las funciones de espín para los dobletes 2_{M_S} y 2_{M_A} serán:

$$\chi_{M_A}(\uparrow) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)\uparrow\right] \qquad \chi_{M_A}(\downarrow) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)\downarrow\right]$$

$$\chi_{M_S}(\uparrow) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow\right] \quad \chi_{M_S}(\downarrow) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right)\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow\right]$$

en donde como siempre $\uparrow$ representa el estado $|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle$ y $\downarrow$ el estado $|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$.

Los estados del cuadruplete simétrico serían de la forma:

$$\chi_S(\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\right) \qquad (17.16)$$

pero no intervienen en el octete.

Esquemáticamente, las funciones de onda de los nucleones pueden escribirse:

$$|p^{\uparrow}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow}\rangle \qquad |n^{\uparrow}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\downarrow}\rangle$$

pero la forma exacta de las funciones de onda debe expresarse según la mezcla vista más arriba. Sea el caso del estado del protón con componente de espín $m_J = +\frac{1}{2}$. Para que la función de ondas sea totalmente simétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks, se

forma:

$$\chi_{\mathrm{p}}(J=\tfrac{1}{2}, m_{\mathrm{J}}=\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}[p_{M_{\mathrm{S}}}\chi_{M_{\mathrm{S}}} + p_{M_{\mathrm{A}}}\chi_{M_{\mathrm{A}}}]$$

donde p_{M_S}, p_{M_A} son funciones de onda de sabor del octete de SU(3), que tienen la misma forma que la de las funciones de espín χ_{M^S}, χ_{M_A} vistas más arriba, simplemente haciendo el cambio u $\rightarrow\uparrow$ y d $\rightarrow\downarrow$, quedando:

$$|\mathrm{p}^{\uparrow}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}[(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow]\tfrac{1}{\sqrt{2}}[(\mathrm{ud}-\mathrm{du})u] + \sqrt{\tfrac{1}{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow)]\sqrt{\tfrac{1}{6}}[(\mathrm{ud}+\mathrm{du})\mathrm{u} - 2\mathrm{uud})]\right\}$$

Tras esto, se llega finalmente a la función de ondas del protón con tercera componente de espín $m_{\mathrm{J}} = +\frac{1}{2}$:

$$|\mathrm{p}^{\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\left\{\begin{array}{l} 2\left(|\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\downarrow}\rangle + |\mathrm{d}^{\downarrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\rangle + |\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\downarrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\rangle\right) \\ -\left(|\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\downarrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\rangle + |\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\downarrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\rangle + |\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\downarrow}\rangle\right) \\ -\left(|\mathrm{u}^{\downarrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\rangle + |\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\downarrow}\rangle + |\mathrm{u}^{\downarrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\rangle\right)\end{array}\right\} \qquad (17.17)$$

yanálogamente se procede para el protón con proyección de espín $m_{\mathrm{J}} = -\frac{1}{2}$, o sea, el estado $|\mathrm{p}^{\downarrow}\rangle$.

Los otros miembros del octete tendrán las siguientes combinaciones de quarks:

$$|\Sigma^{+\uparrow}\rangle = |\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{s}^{\downarrow}\rangle$$

$$|\Sigma^{0\uparrow}\rangle = |\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{s}^{\downarrow}\rangle \quad |\Lambda^{0\uparrow}\rangle = |\mathrm{u}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\downarrow}\mathrm{s}^{\uparrow}\rangle \qquad (17.18)$$

$$|\Sigma^{-\uparrow}\rangle = |\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{d}^{\uparrow}\mathrm{s}^{\downarrow}\rangle$$

y porúltimo, queda el doblete de bariones con dos quarks extra˜nos:

$$|\Xi^{0\uparrow}\rangle = |u^{\downarrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \qquad |\Xi^{-\uparrow}\rangle = |d^{\downarrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \tag{17.19}$$

Obsérvese que el Σ^0 y el Λ^0 tienen los mismos quarks, pero el par u − d se acopla de manera distinta; en el primero, forma un triplete de espín e isospín y, en el segundo, un singlete.

Decuplete de bariones

Los bariones del decuplete de sabor 10_S, tienen espín 3/2, luego según (17.13) se trata del cuadruplete simétrico 4_S; por lo tanto tienen la forma totalmente simétrica: $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$. Como las funciones de onda de sabor son $|q_1q_2q_3\rangle$ los estados del decuplete quedarán identificados con la notación:

$$\psi^{10}_{q_1\,q_2\,q_3} = |q_1{}^{\uparrow}q_2{}^{\uparrow}q_3{}^{\uparrow}\rangle$$

Esquemáticamente, las funciones de onda de los bariones del decuplete, se escribirán:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{+}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{0}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle \quad |\Delta^{-}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle = |u^{\uparrow}u^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Sigma^{*0}\rangle = |u^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Sigma^{*-}\rangle = |d^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Xi^{*0}\rangle = |u^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle \quad |\Xi^{*-}\rangle = |d^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

$$|\Omega^{-}\rangle = |s^{\uparrow}s^{\uparrow}s^{\uparrow}\rangle$$

teniendo en cuenta que si el barión no tiene los tres quarks idénticos, entonces hay que simetrizar, por ejemplo:

$$|\Delta^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow}\rangle + |u^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle + |d^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}\rangle\right\}$$

El color de los quarks

No se entendía que la función de ondas del Δ^{++} fuese totalmente simétrica. En efecto, según (17.15), el decuplete es simétrico en sabor y el Δ^{++} es simétrico en coordenadas espaciales, en espínyenisospín, separadamente, puesto que son tres quarks idénticos. De aquí surgió la idea de que los quarks poseen otra propiedad: el color. Existen tres colores posibles para un quark: *r, v, a*;unnúmero cuántico que tiene tres grados de libertad (estos no tienen nada que ver con los colores del espectro visible). Con ello, se pudo restablecer la conexión espínestadística: los bariones, compuestos de fermiones idénticos, tienen que tener una función de ondas totalmente antisimétrica bajo el intercambio de cualquier par de quarks constituyentes.

Sea Ψ la función de ondas de un barión:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3) = \phi_{\text{espacio}}(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3})\chi_J(1,2,3)\xi_I(1,2,3)\psi_{\text{color}}(1,2,3) \quad (17.20)$$

en donde χ_J es la función de ondas de espín y ξ_I la de isospín. Afortunadamente, la función de ondas $\psi_{\text{color}}(1,2,3)$ es un singlete (función antisimétrica), de la forma:

$$\psi_{\text{color}}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|\text{rva}\rangle + |\text{var}\rangle + |\text{arv}\rangle - |\text{vra}\rangle - |\text{avr}\rangle - |\text{rav}\rangle\right\} \quad (17.21)$$

puesto que los hadrones son singletes de color. Así pues, la introducción del color como número cuántico de los quarks, restablece la antisimetría de las funciones de onda de los bariones.

De todas formas, el color es un número cuántico oculto, en el sentido que todas las partículas reales (hadrones) son singletes de color; es decir, no aparecen con ninguno de los números cuánticos de color de los quarks. Ello es debido a que los constituyentes cancelan el color: en los bariones porque los tres colores se compensan dando lugar al singlete de color visto en (17.21) y en los mesones, porque se trata de estados $q\overline{q}$, o sea:

$$\psi_{\text{color}}(1,\overline{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|\text{r}\overline{\text{r}}\rangle + |\text{v}\overline{\text{v}}\rangle + |\text{a}\overline{\text{a}}\rangle\right\} \qquad (17.22)$$

Existen pruebas experimentales de que efectivamente los quarks tienen tres colores posibles (tres grados de libertad de color). Sea N_c el número de colores. Al calcular la probabilidad de desintegración del π^0, el diagrama de Feynman visible en la figura 17.5 muestra que es triangular con un quark u o d en sus lados; si hay 3 colores, los tres diagramas se sumarán de manera coherente y se obtiene:

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7{,}73\left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \text{eV}$$

con la constante de desintegración del pión f_π = 130,7 MeV que se obtiene a partir de las desintegraciones de $\pi^\pm$. La medida experimental Γ_{exp} = 7,8 ± 0,6 eV y de aquí se obtiene que N_c = 3,01 ±0,12, lo que es una gran evidencia independiente en favor del concepto de color. También aparece N_c en el valor de la sección eficaz de aniquilación $\sigma(e^+ + e^- \to q + q)$, cuyo valor experimental confirma que N_c = 3.

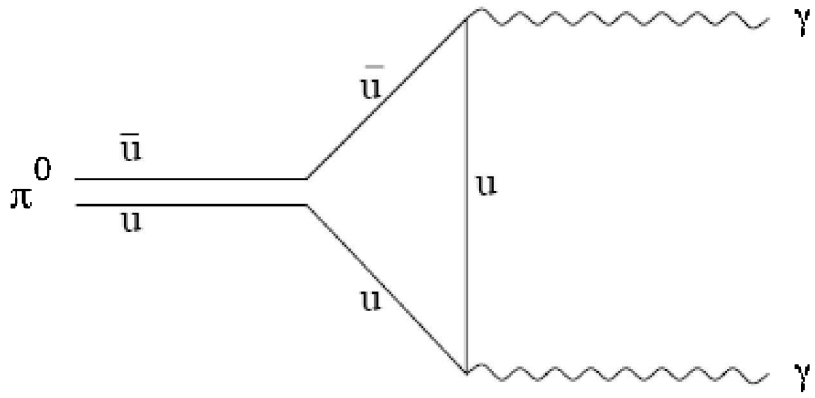


Figura 17.5: Diagrama de Feynman de la desintegración del π^0. El triángulo puede ser recorrido por un quark u o por un quark d, ya que el mesón π^0 es una mezcla de $u\overline{u}$ y $d\overline{d}$.

Más adelante, cuando se estudie la aniquilación e^+e^-, se verá otra de las pruebas experimentales del valor $N_c = 3$, es decir, de la verificación que efectivamente existen tres colores de quarks.

17.4.3 Multipletes de mesones

Los mesones están formados por un par $q\,\overline{q}$. Si se toman los de menor masa, corresponderán a estados ligados con momento angular orbital $\ell = 0$. Como la paridad $\mathcal{P} = (-1)^{\ell+1}$, tendrán $\mathcal{P} = -1$. Pero como se trata de dos fermiones podrán acoplarse con espín total S igual a 0ó 1, luego se tendrán dos nonetes (véase la expresión (17.12)) con $J^{\mathcal{P}} = 0^-$, 1^-, respectivamente. Existe un octete que contiene todos los mesones pseudoescalares, o sea con $J^{\mathcal{P}} = 0^-$. Escalar porque así se transforman bajo las rotaciones y *pseudo* porque cambian de signo bajo la reflexión espacial.

Los mesones asociados al nonete de pseudoescalares (véase figura 17.6) son los siguientes:

- en el octete se encuentra un triplete de isospín (el pión), dos dobletes de isospín (los kaones) y el singlete $\eta(547)$, que tiene una anchura $\Gamma_\eta = 1{,}18$ keV.

- en el singlete de SU(3) sólo existe un singlete de isospín, el $\eta'(958)$, con una anchura $\Gamma_{\eta'} = 8{,}43$ MeV.

Los modos dominantes de desintegración de los dos singletes de isospín citados son:

$$\begin{array}{llll} \eta(547) \longrightarrow & 2\gamma & (39\,\%) & \\ & 3\pi^0 & (32\,\%) & \\ & \pi^+\pi^-\pi^0 & (23\,\%) & \\ & \pi^+\pi^-\gamma & (\,5\,\%) & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \eta'(958) \longrightarrow & \pi^+\pi^-\eta & (44\,\%) & \\ & \rho^0\gamma & (30\,\%) & \\ & \pi^0\pi^0\eta & (21\,\%) & \\ & \omega\gamma & (\,3\,\%) & \\ & \gamma\gamma & (\,2\,\%) & \end{array}$$

La simetría de la función de ondas de un mesón no viene determinada por el principio de Pauli ya que ahora se trata de un par $q\overline{q}$. Puede haber estados simétricos y antisimétricos. Por ejemplo, con sólo los quarks u, d y sus antiquarks, cuyos dobletes fundamentales son respectivamente[9]

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix} -\overline{d} \\ \overline{u} \end{pmatrix} \tag{17.23}$$

se puede formar:

- un singlete de isospín ($|I, I_3\rangle = |0,0\rangle$), cuya estructura en quarks es:

$$|0,0\rangle \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\overline{u}> + |d\overline{d}>\right) \tag{17.24}$$

- yuntripletedeisospín (llamado también isotriplete), que se identifica con el pión, que es un mesón sin extra˜neza

$$\begin{cases} |1,+1\rangle \Longrightarrow & -|u\overline{d}> \\ |1,\ 0\rangle \Longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\overline{u}> - |d\overline{d}>\right) \\ |1,-1\rangle \Longrightarrow & |\overline{u}d> \end{cases} \tag{17.25}$$

Puede verificarse, por ejemplo, que el triplete es correcto, utilizando repetidamente el operador bajada de isospín $I_- |-u\overline{d}\rangle$.

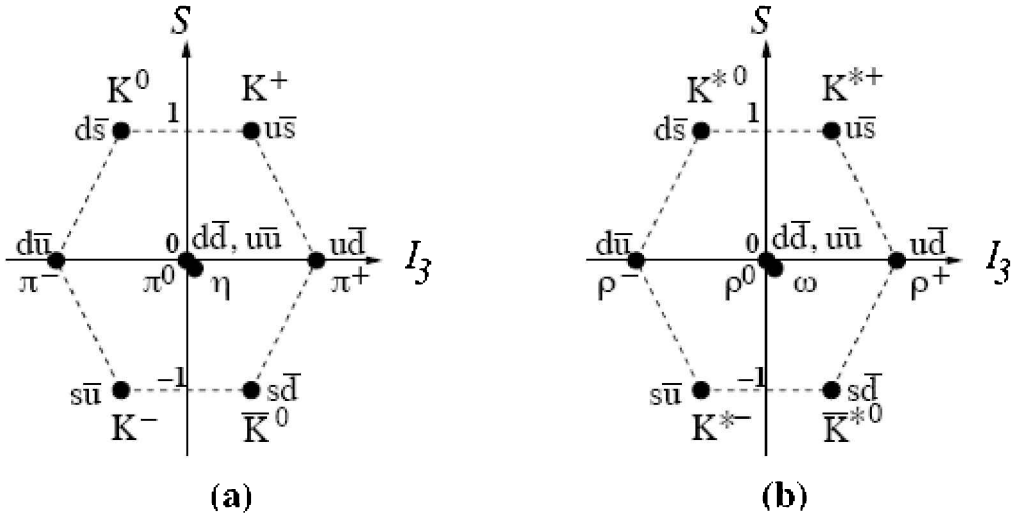


Figura 17.6: Octetes de SU(3) con los mesones **a)** pseudoescalares $J^{\mathcal{P}} = 0^-$ y **b)** vectoriales $J^{\mathcal{P}} = 1^-$. Hay dos estados *A*, *B* con $I_3 = S = 0$, cuyas configuraciones son: $A \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ y $B \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$. Además existe el singlete SU(3), *C*, cuya configuración es: $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$.

Al añadir el quark s aparecen los dos dobletes de isospín de los kaones. Pero, además, aparecen dos estados mesónicos de carga 0, que son singletes. Utilizando la notación $\{n_3, |I, I_3\}$, en donde n_3 representa la dimensión del multiplete de SU(3) e *I* el isospín, los nuevos singletes de isospín son:

- el singlete de SU(3), que se denomina η_1 y que contiene todos los quarks con el mismo peso:

$$\eta_1 = \{1, |0,0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|u\bar{u}> + |d\bar{d}> + |s\bar{s}\rangle\right) \qquad (17.26)$$

- el isosinglete del octete de SU(3), que se denomina η_8,

$$\eta_8 = \{8, |0,0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\bar{u}> + |d\bar{d}> - 2|s\bar{s}\rangle\right) \qquad (17.27)$$

y que es ortogonal a los otros dos estados con $I_3 = Y = 0$ (véase la figura

Lo curioso es que los dos mesones, el del octete y el del singlete, tienen los mismos números cuánticos y, por lo tanto, cuánticamente, como pueden mezclarse, se mezclan. En efecto, la simetría SU(3) de sabor no es exacta. La rotura de la simetría es la que produce la mezcla que se observa en los mesones. De hecho, existen dos mesones pseudoescalares con carga eléctrica $Q = 0$, que ya se han visto anteriormente, el $\eta(547)$ y el $\eta'(958)$, y aunque parezca lógico asignar uno al estado η_8 yotroal η_1, se verá más adelante que los estados físicos (reales) η y η son mezcla de los estados teóricos de SU(3), η_1 y η_8 y se puede determinar experimentalmente el valor delángulo de mezcla.

Los mesones conocidos se pueden asociar perfectamente a espectros de octetes. La tabla 17.3 resume los mesones más conocidos de menor masa. Los mesones pseudoescalares, $J^{\mathcal{P}} = 0^-$, y los mesones vectoriales, $J^{\mathcal{P}} = 1^-$, (véase también la figura 17.6) son estados singlete y triplete de espín del sistema $q\bar{q}$ con momento angular orbital relativo $L = 0$, mientras que el octete de los mesones tensoriales ($J^{\mathcal{P}} = 2^+$) corresponde a un estado ligado triplete de espín ($S = 1$)con $L = 1$.

La conjugación de carga es un buen número cuántico para los mesones neutros y vale $C = (-1)^{L+S}$, o sea, $C = +1$ para los mesones pseudoescalares y $C = -1$, para los vectoriales, neutros.

Tabla 17.3: Los hadrones de seis nonetes de mesones de menor masa. Las masas de los mesones pseudoescalares son: $M_{\pi^\pm}$ = 139,6, M_{π^0} = 135,0, $M_{K^\pm}$ = 493,7, M_{K^0} = 497,7 y M_η = 547,5 MeV. Losángulos de mezcla se refieren a la fórmula cuadrática de masas, por eso aparece el subíndice *cuad*. El primer singlete de isospín es el que es más octete. Se han encontrado hadrones pertenecientes a 15 octetes, aunque no todos están completamente llenos.

$^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$I=0$	$I=1$	$I=\frac{1}{2}$	θ_{cuad}
$^1S_0$	0^{-+}	$\eta(547), \eta'(958)$	π	K	-10^o
$^3S_1$	1^{--}	$\phi(1020), \omega(782)$	$\rho(770)$	$K^*(892)$	39^o
$^3P_0$	0^{++}	$f_0'(1710), f_0(1370)$	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	
$^3P_1$	1^{++}	$f_1'(1420), f_1(1285)$	$a_1(1260)$	$K_1^*(1400)$	
$^3P_2$	2^{++}	$f_2'(1525), f_2(1270)$	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	28^o
$^3D_3$	3^{--}	$\phi_3(1850), \omega_3(1670)$	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	29^o

17.5 Masas y momentos magnéticos de los hadrones

17.5.1 Masas de bariones

La primera hipótesis realizada por Gell-Mann en relación con las masas de los hadrones es que el operador M tiene un comportamiento de la forma:

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right] \qquad (17.28)$$

proporcional al operador hipercarga. Es la conocida fórmula de Gell-Mann-Okubo.

A la vista de las masas de los hadrones de un mismo multiplete de SU(3), queda claro queésta no es una simetría exacta. Gell-Mann supuso que el hamiltoniano de la interacción fuerte se podría escribir como:

$$H = H_0 + H'$$

siendo H_0 una interacción muy fuerte y simétrica bajo SU(3), que conmuta con todos los generadores del grupo y H es el responsable de la rotura de simetría. H debería conmutar con Y e I_3, con lo que debería transformarse como el operador F_8, la hipercarga, definido en (17.10).

Esta es la idea contenida en la fórmula de Gell-Mann-Okubo.

Para el decuplete de bariones, como cumplen $Y = 2(I - 1)$, esta fórmula implica que $M = A + BY$; es decir, establece una relación lineal entre la masa y la hipercarga del barión. La observación experimental es que la relación se cumple para el decuplete y, además, permite concluir que las masas de los constituyentes cumplen:

$$m_u \sim m_d$$

y la diferencia entre el quark s y cualquiera de los otros dos vale:

$$m_s - m_{u,d} \sim 150 \text{ MeV/c}^2$$

Eléxito del modelo se consolidó al predecir la existencia del barión con $S = -3$, llamado $\Omega^-(1672)$, que fue encontrado posteriormente.

Para el octete de bariones $J^P = \frac{1}{2}^+$ la fórmula de Gell-Mann-Okubo

$$\boxed{3M_{\Lambda^0} + M_{\Sigma^0} = 2M_n + 2M_{\Xi^0}} \qquad (17.29)$$

que funciona razonablemente bien. Sin embargo, el origen de la fórmula de Gell-Mann-Okubo es toda una incógnita y la cuestión sigue aún abierta.

17.5.2 Masas de mesones

Puede observarse que en el caso de los mesones pseudoescalares, la diferencia de masas entre los dobletes de kaones y el triplete del pión es mucho mayor que la que existe entre los distintos multipletes de isospín del octete de los bariones. La solución empírica al problema la dieron Gell-Mann y Okubo, proponiendo que esta vez la relación tenía lugar entre masas al cuadrado en vez de ser lineal con la masa (intuitivamente, la ecuación de Dirac para fermiones es lineal y la de Klein-Gordon para

espín 0 es cuadrática).

Así, partiendo de:

$$3M_{\eta^0} + M_{\pi^0} = 2M_{\mathrm{K}^0} + 2M_{\overline{\mathrm{K}}^0}$$

ycomo $M_{K^0} = M_{\bar{K}^0}$, la relación cuadrática es:

$$\boxed{3M^2_{\eta^0} + M^2_{\pi^0} = 4M^2_{\mathrm{K}^0}} \qquad (17.30)$$

que se cumple con una precisión del 7 %.

Mezcla de estados octete-singlete de SU(3)

Un hecho curioso es que, en principio, los estados octete y singlete de SU(3) con $I = 0$ no tienen por qué ser estados propios del hamiltoniano. De hecho, la matriz de masas de los mesones pseudoescalares puede escribirse:

$$H \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \qquad (17.31)$$

mientras que H es diagonal en los estados físicos η, η'.

Existe por lo tanto una mezcla, que se define como una rotación entre estados físicos y estados SU(3):

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \qquad (17.32)$$

y lo mismo sucede con los estados equivalentes de los otros octetes: el vectorial, (ϕ, ω) y el tensorial, (f_2', f_2). Se tiene, en particular, para el octete 0^-:

$$m^2_{\eta'} = m^2_1 \cos^2\theta + m^2_8 \sin^2\theta + 2m^2_{18} \sin\theta\cos\theta$$
$$m^2_{\eta} = m^2_8 \cos^2\theta + m^2_1 \sin^2\theta - 2m^2_{18} \sin\theta\cos\theta$$

lo que junto con la condición de ortogonalidad:

$$m^2_{\eta\eta'} = (m^2_8 - m^2_1)\sin\theta\cos\theta + m^2_{18}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

da lugar a:

$$tg^2\theta = \frac{m^2_8 - m^2_\eta}{m^2_{\eta'} - m^2_8} \qquad (17.33)$$

Los resultados obtenidos, utilizando las masas experimentales del mesón η y del η' y sustituyendo para m_8 el valor obtenido mediante la fórmula de Gell-Mann-Okubo vista en (17.30):

$$3m^2_8 = (4M^2_{\rm K} - M^2_\pi)$$

dan para losángulos de mezcla:

$$\theta_P = -10^o \qquad \theta_V = 39^o \qquad \theta_T = 28^o \qquad (17.34)$$

que están en la tabla 17.3 en donde el signo menos implica que $m_8 < m_1$.

Una mezcla ideal se produce para sin $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o sea $\theta = 35{,}3^o$, lo que implica que la estructura de los hadrones es muy limpia desde el punto de vista de los quarks constituyentes ya que entonces,[10] definiendo $\alpha = \theta + 54{,}7^o$, la función de ondas del isoscalar físico de SU(3) toma la forma:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})\cos\alpha - s\bar{s}\sin\alpha$$

y su compañero ortogonal η', la misma expresión pero cambiando α por $\alpha - 90^o$. De esta manera, para el caso de mezcla ideal, en la que $\alpha = 90^o$,

los estados resultan ser:

$$\eta' \approx u\bar{u} + d\bar{d}$$
$$\eta \approx s\bar{s}$$

lo que se cumple, aproximadamente, para los mesones 1^- y 2^+: el $\phi(1020)$ y el $f_2'(1525)$. Este resultado tiene consecuencias dinámicas ya que la mezcla permite entender por qué $B(\phi \to K\bar{K}) \approx 84\,\%$ a pesar de que $B(\phi \to \pi^+\pi^-\pi^0) \approx 15$ % tiene muchísimo más espacio fásico y debería ser más probable. El mesón ϕ tiene una estructura en quarks $s\bar{s}$. La explicación de este resultado la da la regla de OZI, que se presenta más adelante.

17.5.3 Masas de hadrones de distintos multipletes

Otro de los éxitos del modelo de quarks está relacionado con la predicción de masas de hadrones de distintos multipletes. El mesón K(494) tiene menor masa que el K^* (892), a pesar de tener la misma estructura de quarks $u\bar{s}$. Lo mismo sucede si se compara la masa de los bariones p(uud) y Δ^+(uud). La diferencia en ambos casos es el espín.

La idea es suponer que el origen de las masas es una interacción tipo hiperfina (interacción espín-espín). Recuérdese que en física atómica, la interacción hiperfina resulta de la interacción del espín del electrón con el espín del núcleo (de naturaleza electromagnética) y el hamiltoniano de interacción es de la forma $H'_{hf} = \frac{2}{3}\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 |\psi(0)|^2$, o sea,

$$H'_{hf} = \frac{8\pi\alpha}{3}|\psi(0)|^2 \frac{\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p}{m_e m_p} \qquad (17.35)$$

siendo $\alpha = \frac{1}{137}$ la constante de estructura fina (constante de acoplamiento de la interacción electromagnética). Los cálculos de las

correcciones de energía se realizan aplicando la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, es decir:

$$\Delta E_{hf} = \langle \psi | H'_{hf} | \psi \rangle$$

en donde ψ representa la función de ondas del átomo.

Ahora, los quarks tienen interacción fuerte. En QCD, la constante de acoplamiento fuerte es α_s y se demuestra que para mesones y bariones las constantes de acoplamiento vienen modificadas por los factores:

$$\begin{aligned} \textbf{mesón} \quad &\rightarrow \tfrac{4}{3}\alpha_s \quad (q\overline{q}) \\ \textbf{barión} \quad &\rightarrow \tfrac{2}{3}\alpha_s \quad (qq) \end{aligned} \tag{17.36}$$

con lo que una interacción de tipo hiperfina tomaría las formas:

$$H'_{hf}\Big|_{meson} = \frac{32\pi\alpha_s}{9}|\psi(0)|^2 \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2} \tag{17.37}$$

y

$$H'_{hf}\Big|_{barion} = \frac{16\pi\alpha_s}{9}|\psi(0)|^2 \sum_{i<j} \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{m_i m_j} \tag{17.38}$$

Con esto, si se escribe el hamiltoniano de los estados de los hadrones $H = H_0 + H'_{hf}$, el valor esperado de H en el estado fundamental dará las masas, pudiendo parametrizarse:

$$m(q_1\overline{q}_2) = m_1 + m_2 + a\frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2} \tag{17.39}$$

para los mesones y

$$m(q_1q_2q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + a' \sum_{i<j} \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{m_i m_j} \qquad (17.40)$$

para los bariones. Se entiende que el último término de estas dos últimas expresiones debe calcularse utilizando estados de espín bien definido.

En el caso de los mesones se cumple que $\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, con lo que el producto $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ para J = 0,1 respectivamente. Las masas de los dos octetes de mesones se reproducen con extraordinaria corrección, utilizando las masas de los quarks que siguen:

$$\left.\begin{aligned} m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}} &= 310\ \mathrm{MeV/c^2} \\ m_{\mathrm{s}} &= 483\ \mathrm{MeV/c^2} \end{aligned}\right\} \qquad (17.41)$$

y obteniéndose para la constante a:

$$a = \frac{(2m_{\mathrm{u}})^2}{\hbar^2} 160\ \mathrm{MeV/c^2}$$

En el caso de los bariones se cumple que $\vec{J} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ con lo que $J^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3)$, por lo tanto:

$$\sum_{i<j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - \frac{9}{4}\right]$$

lo que es igual a $+\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$ en el caso del decuplete $J = \frac{3}{2}$ (en el del octete, $J = \frac{1}{2}$). Suponiendo $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}}$ se obtiene:

$$m_N = 3m_{\mathrm{u}} - \frac{3}{4}\frac{a'}{m_{\mathrm{u}}^2}$$

El caso de los bariones compuestos por uds requiere una especial atención. En el octete, existe el $\Lambda^0(1116)$ que es un singlete de isospín y el $\Sigma^0(1193)$ que pertenece al triplete de isospín. En el caso del Λ(uds), la simetría de los dos primeros quarks exige que tanto *I* (ud) = 0 como *S* (ud) = 0 (antisimétrica), mientras que en el Σ(uds) se cumple que *I* (ud) = 1 y *S* (ud) = 1, por lo que como $J^2_{ud} = (s_u + s_d)^2 = s_u^2 + s_d^2 + 2s_u s_d$ permite encontrar que $\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d = -\frac{3}{4}$ para el Λ(*uds*) y $s_u s_d = \frac{1}{4}$ para el Σ(*uds*).

Con todo lo anterior se obtiene:

$$m_\Lambda = m_u + m_d + m_s + a' \left[\frac{\vec{s}_u \cdot \vec{s}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{s}_u \cdot \vec{s}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{s}_d \cdot \vec{s}_s}{m_d m_s} \right]$$

y suponiendo $m_u = m_d$, da lugar a:

$$m_\Lambda = 2m_u + m_s - \frac{3}{4}\frac{a'}{m_u^2}$$

puesto que:

$$\vec{s}_u \cdot \vec{s}_s + \vec{s}_d \cdot \vec{s}_s = \sum_{i<j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - \vec{s}_u \cdot \vec{s}_d$$

y de la misma manera:

$$m_\Sigma = 2m_u + m_s + \frac{a'}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right)$$

$$m_\Xi = 2m_s + m_u + \frac{a'}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right)$$

En el decuplete, todos los quarks están alineados dos a dos, con lo que

$\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = 1/4$ y se llega a los siguientes valores de los parámetros:

$$\left.\begin{aligned} m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}} = &\quad 363\ \mathrm{MeV/c^2} \\ m_{\mathrm{s}} = &\quad 538\ \mathrm{MeV/c^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a'}{m_{\mathrm{u}}^2} = 50\ \mathrm{MeV/c^2} \qquad (17.42)$$

Con estos valores se obtiene un impresionante acuerdo con los datos de las masas de los bariones. La peque˜na diferencia de unos 50 MeV/c^2 con respecto a las masas de quarks obtenidas para los mesones (véase (17.41)), tiene su origen en las diferentes energías de ligadura que entran en juego en sistemas a dos o tres quarks.

Hasta ahora se han estado estimando masas de quarks *constituyentes*. Se trata de masas efectivas. No deben confundirse con las masas de quarks que aparecen en el lagrangiano de QCD y que son masas de *corrientes* de quarks. Estos quarks están exentos de los efectos dinámicos que sufren los quarks constituyentes en los hadrones.

En el lagrangiano de la teoría QCD, aparecen las masas de los quarks, como masas de corrientes de quarks. Se tiene:

MeV/c^2	GeV/c^2
m_{u} = 2,3 ±0,7	m_{c} = 1,275 ±0,025
m_{d} = 4,8 ±0,7	m_{b} = 4,18 ±0,03
m_{s} = 95 ±5	m_{t} = 173,5 ±0,6

Precisamente la simetría SU(3) tiene su origen en el hecho de que $m_q << m_{\mathrm{hadrones}}$; o sea si m_{q} es despreciable, la interacción fuerte es independiente de sabor. El origen de la rotura de la simetría SU(3)sabor está precisamente en el hecho de que la masa del quark extra˜no *s* es casi igual al parámetro del modelo estándar Λ_{QCD} = 200 MeV/c^2, que da la escala de masas características que intervienen en la interacción fuerte. Este parámetro es mucho mayor que las masas de los quarks ligeros u, d cuya similitud justifica la simetría de isospín.

17.5.4 Momentos magnéticos de hadrones

Los hadrones con espín $\vec{S} > 0$ (al igual que el electrón, los núcleos, etc.) tienen un momento dipolar magnético:

$$\vec{\mu} = g_s \frac{\mu_N}{\hbar} \vec{S} \qquad (17.43)$$

en donde $g_s$es el factor giromagnético y $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ es el magnetón nuclear.

El momento magnético que predice la teoría de Dirac, para partículas puntuales de espín 1/2, sin estructura, es:

$$\mu_D = \frac{e\hbar}{2M} \qquad (17.44)$$

o sea, que el factor giromagnético vale $g_s = +2$, y así se ha confirmado en el caso del e^- ydel μ^-. De hecho, la gran precisión alcanzada en los experimentos de medida del momento magnético del e^- ydel μ^- han permitido encontrar:

$$\mu_e = 1{,}001159652187 \pm 0{,}000000000004\ \mu_B$$

y

$$\mu_\mu = 1{,}0011659160 \pm 0{,}0000000006\ \mu_D$$

En el caso del e^- la unidad es el magnetón de Bohr y en el caso del μ^-, siguiendo la fórmula (17.44), pero con $M = m_\mu$.. El factor giromagnético de estos leptones fundamentales difiere del valor esperado por la teoría de Dirac ($g_s = 2$) en algo más del uno por mil. Pero esto está bien entendido y se debe a fenómenos previstos en la teoría QED. Por ello se denomina el momento magnético *anómalo* del electrón y del muón.

Si el protón no tuviese estructura y fuese una partícula elemental, se

tendría el mismo valor que antes pero con $M = m_p$, o sea $\mu_p = \mu_N$, el magnetón nuclear; sin embargo, el resultado experimental es $\mu_p = +2{,}79\ \mu_N$. De igual manera, se encuentra que el momento magnético del neutrón vale $\mu_n = -1{,}91\ \mu N$.

Momentos magnéticos en el modelo de quarks

Al igual que en el caso de las masas, la comparación de los momentos dipolares magnéticos de los bariones con los resultados experimentales dan resultados muy satisfactorios.

Considérese el estado fundamental del protón. El momento dipolar se calculará como suma de los momentos dipolares magnéticos de los tres constituyentes del protón:

$$\vec{\mu}_p = \vec{\mu}_u + \vec{\mu}_u + \vec{\mu}_d$$

entendiéndose que hay que calcular el valor esperado del momento magnético:

$$\mu_p = \langle \vec{\mu}_p \rangle = \langle \psi_p | \vec{\mu}_p | \psi_p \rangle$$

y donde la función $\psi_p = |p^{\uparrow}\rangle$ es la obtenida en el octete totalmente simétrico de SU(3), con el protón en el estado de proyección de espín máxima $m_J = +\frac{1}{2}$. La función de ondas ya se ha visto en la ecuación (17.17); aquí se simplificará teniendo en cuenta que sólo interesa la función de espín:

$$\chi_p = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \chi_{uu}(1,1)\, \chi_d(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, \chi_{uu}(1,0)\, \chi_d(\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$

Como los momentos magnéticos de los quarks son $\mu_i = z_i \frac{e\hbar}{2m_i}$, con z_i el número de carga (2/3, −1/3) del quark *i*, es fácil llegar al valor:

$$\mu_{\mathrm{p}} = \frac{2}{3}(\mu_{\mathrm{u}} + \mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}}) + \frac{1}{3}\mu_{\mathrm{d}}$$

De la misma manera se pueden obtener los de los otros bariones del octete $\frac{1}{2}^+$:

$$\mu_{\mathrm{p}} = \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{d}}), \qquad \mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{d}} - \mu_{\mathrm{u}}), \qquad \mu_{\Sigma^+} = \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{u}} - \mu_{\mathrm{s}}) \quad (17.45)$$

Para el Λ^0 es distinto puesto que el par u, d se acopla con espín $S_{ud} = 0$ y por lo tanto no contribuye al momento magnético, obteniéndose:

$$\mu_{\Lambda^0} = \mu_{\mathrm{s}} \qquad (17.46)$$

Si se supone que $m_u = m_d$, entonces, a partir de los valores dados en (17.45) se obtiene la relación:

$$\boxed{\frac{\mu_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{p}}} = -\frac{2}{3}}$$

que está de acuerdo con el valor experimental, −0,685.

Loséxitos del modelo son grandes (véase la tabla 17.4) habida cuenta de su sencillez, puesto que únicamente se ha tenido en cuenta la suma de los momentos magnéticos de los quarks de valencia.

Tabla 17.4: Comparación entre los momentos magnéticos experimentales de los bariones estables (bajo la interacción fuerte) y las predicciones del modelo de quarks constituyentes.

	μ/μ_N (Experimento)		μ/μ_N (Modelo quarks)	
p	$+2,792847351$	$\pm 0,000\,000\,028$	$(4\mu_u - \mu_d)/3$	–
n	$-1,9130427$	$\pm 0,000\,000\,5$	$(4\mu_d - \mu_u)/3$	–
Λ^0	$-0,613$	$\pm 0,004$	μ_s	–
Σ^+	$+2,458$	$\pm 0,010$	$(4\mu_u - \mu_s)/3$	$+2,67$
Σ^0	–	–	$(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)/3$	$+0,79$
Σ^-	$-1,160$	$\pm 0,025$	$(4\mu_d - \mu_s)/3$	$-1,09$
Ξ^0	$-1,250$	$\pm 0,014$	$(4\mu_s - \mu_u)/3$	$-1,43$
Ξ^-	$-0,6507$	$\pm 0,0025$	$(4\mu_s - \mu_d)/3$	$-0,49$
Ω^-	$-2,02$	$\pm 0,05$	$3\mu_s$	$-1,84$

Para calcular valores absolutos de momentos magnéticos, deben conocerse las masas de los quarks. Puede hacerse al revés, a partir de las medidas de los momentos de los bariones n, p y Λ^0, pueden obtenerse los momentos magnéticos de los quarks, que resultan: $\mu_u = +1{,}852\ \mu_N$, $\mu_d = -0{,}792\ \mu_N$ *y* y $\mu_s = -0{,}613\ \mu_N$ .. Las correspondientes masas efectivas de los quarks, pueden calcularse suponiendo que se trata de partículas puntuales de Dirac y entonces $\mu = q\hbar/2m$. Este procedimiento da lugar a los siguientes valores: $m_u = 338$ MeV/c², $m_d = 322$ MeV/c² y $m_s = 510$ MeV/c², observándose que son intermedios entre las masas constituyentes obtenidas a partir de las masas de bariones y mesones.

17.6 Espectroscopía de mesones pesados

En noviembre de 1974, simultáneamente en SLAC,[11] en un experimento dirigido por B. Richter, estudiando colisiones e^+ e^- en el colisionador SPEAR y en Brookhaven,[12] EEUU, (experimento dirigido por S. Ting), utilizando colisiones p+Be a 28 GeV, se descubre el mesón J/ψ (3097) que poco después se identifica como un estado ligado cc de un nuevo quark, el quark *charm* (encanto).[13] Ambos directores de los

experimentos fueron muy pronto (en 1976) premiados con el Nobel de Física. La importancia del descubrimiento radica en el hecho de que se trata de un mesón con una anchura Γ_{tot} = 92,9 keV peque˜nísima para el elevado valor de su masa. También se pone en evidencia el mesón ψ (3685), que es un mesón vectorial con vida media larga para su elevada masa; su anchura total es Γ_{tot} = 304 ±9 keV.

Estos mesones, J/ψ (3097) y ψ (3685) son bosones vectoriales $J^{PC} = 1^{--}$ con $G = -1$ e $I = 0$. Aunque fueron simultáneamente descubiertos en un experimento de blanco fijo utilizando el haz de protones del acelerador AGS de Brookhaven el método más apropiado para producirlos es en experimentos de aniquilación en colisionadores e^+ e^-, ya que tienen los mismos números cuánticos que el fotón. El mecanismo de producción es esquemáticamente el de la figura 17.7.

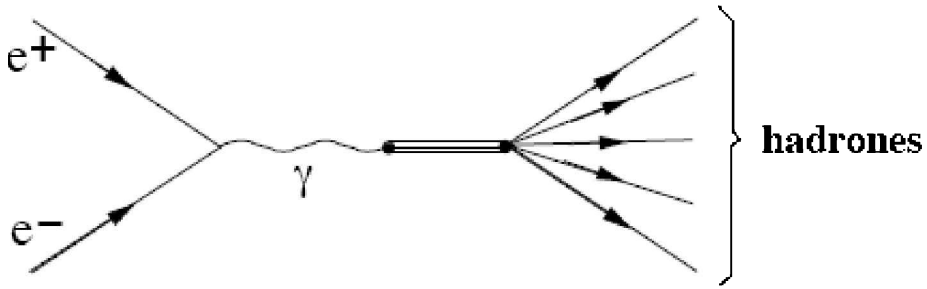


Figura 17.7: Esquema del mecanismo de producción de los mesones vectoriales y su posterior desintegración en hadrones.

Los resultados originales del experimento de SLAC, se muestran en la figura 17.8, donde se aprecia claramente el pico correspondiente a la producción del mesón J /ψ en los tres modos de desintegración e^+ e^-, μ^+ μ^- y hadrones. Si bien la anchura visible en las curvas de producción del mesón J /ψ es de algunos MeV, es inmediato verificar que es consecuencia de la resolución experimental y que la verdadera anchura es mucho más peque˜na. En efecto, la producción del mesón J/ψ (3097), igual que otras resonancias sigue la conocida ley de Breit-Wigner:

$$\sigma(e^+e^- \to J/\psi \to e^+e^-) = \frac{(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\Gamma^2_{e^+e^-}/4}{[(E-M_R)^2+\Gamma^2/4]}$$

donde $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$, y p el momento del e^- en el centro de masas de la colisión, Γ_e+e − la anchura parcial de desintegración en el canal e^+ e^-, Γ la anchura total, M_R el valor central de la masa del J /ψ y (2 J +1) = 3 es la multiplicidad de espín del J/ψ, como corresponde a un mesón vectorial. Los valores $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ representan el espín del e^+ y e^-. Si se calcula la integral de la sección eficaz (con el cambio tan $\theta = 2(E - M_R))/\Gamma$) se obtiene:

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = \frac{3\pi^2}{2}\lambda\!\!\!^{-2}\left(\frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma}\right)^2\Gamma \qquad (17.47)$$

su medida permite determinar la anchura total Γ = 92,9 keV, extraordinariamente peque˜na, a pesar de realizar medidas con una resolución mucho peor (la resolución energética de los haces $\sigma_E << \Gamma$). Puede comprobarse lo dicho en la figura 17.8, donde se aprecian claramente las anchuras de la resonancia en distintos canales. La integral de la curva del canal e^+ e^- en la figura 17.8 vale $\int \sigma(E)\, dE$ = 820 nb MeV; el cociente de desintegración al canal e^+ e^- es 0,06 y $\lambda\!\!\!^{-} = 197/1500 = 0{,}13$ fm. En suma, Γ = 92,9 keV, siendo las anchuras parciales a los modos e^+ e^- y μ^+ μ^- iguales al 6 %. El J /ψ no puede desintegrarse en el par de leptones de mayor masa, $\tau^+ + \tau^-$, por falta de energía, ya que $2m_\tau > m_{J/\psi}$. Se observa que los dos primeros mesones de la tabla tienen anchuras muy peque˜nas (vidas medias muy largas). Este hecho de tener anchuras muy peque˜nas a pesar de tener masas muy grandes llevó a la conclusión de que el mesón J/ψ (1S) y sus excitaciones no pueden por lo tanto ser entendidos como mesones compuestos por quarks ligeros, u, d, s. El programa de búsqueda de estados excitados del mesón J /ψ continuó con gran intensidad y al poco tiempo ya se habían descubierto varios estados de la misma familia. Las masas y anchuras de

los tres primeros estados detectados de la familia del J /ψ pueden verse en la tabla 17.5. En este hecho se fundamenta que durante los días del descubrimiento del J/ψ (1S) se acu˜nase el ya legendario calificativo de *revolución de noviembre*. El tercer mesón de la tabla ya tiene una anchura típica de los mesones que se desintegran por interacción fuerte.

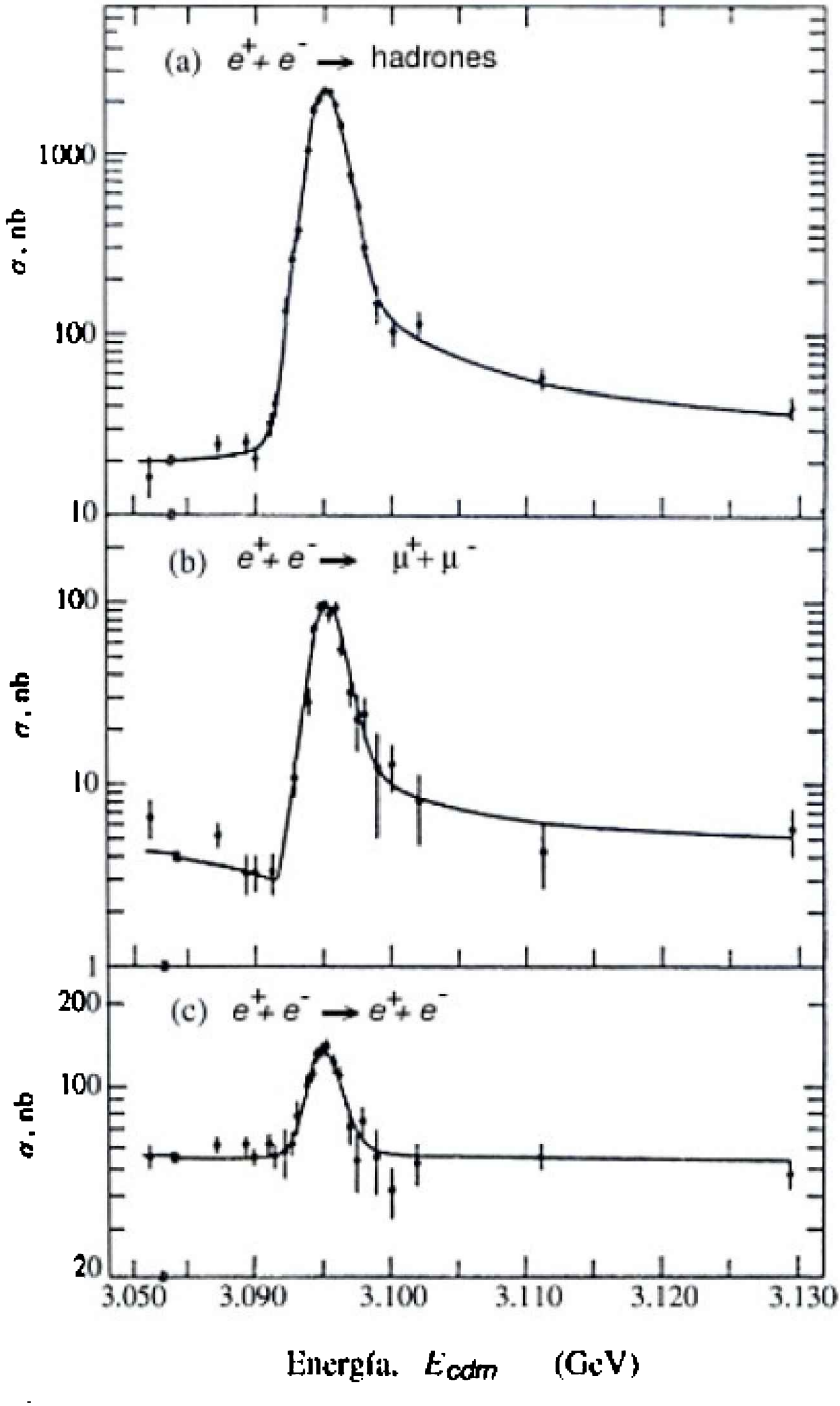


Figura 17.8: Resultados del experimento original que observó la producción del mesón J /ψ en el colisionador SPEAR de SLAC y su desintegración en

los tres canales siguientes: (a) $e^+ e^- \rightarrow$ hadrones; (b) $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ y (c) $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$(tomados de A. M. Boyarski *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 34 (1975) 1357).

A partir de las desintegraciones del ψ (3770) y los de mayor masa, se descubren una serie de hadrones (mesones) con encanto; los de menor masa resultan ser el D^0(1864) y el $D^{\pm}$ (1869), con una masa $m_d > \frac{1}{2} m_{J/\psi}$. Ahora se entiende mejor porquéel J/ψ (1S) tiene una vida media tan larga (una anchura de desintegración Γ_{tot}(J/ψ (1S)) = 92,9 keV tan peque˜na): por que su masa es inferior al umbral de desintegración en mesones encantados; o sea, no puede tener lugar la desintegración J/ψ (1S) $\nrightarrow D\overline{D}$

Tabla 17.5: Los tres primeros estados del charmonio detectados en colisionadores $e^+ e^-$.

Mesón	M (MeV)	$\Gamma_e = \Gamma_\mu$(keV)	Γ_h(keV)	Γ_{tot}(keV)
J/ψ(1S)	3096,9	$5{,}51 \pm 0{,}06$	$81{,}5 \pm 0{,}5$	$92{,}9 \pm 2{,}8$
ψ(2S)	3686,1	$2{,}35 \pm 0{,}04$	$297{,}5 \pm 10$	304 ± 9
ψ(3770)	3773,15	$0{,}26 \pm 0{,}02$	$27{,}2 \pm 1{,}0$ MeV	$27{,}2 \pm 1{,}0$ MeV

Como consecuencia de las desintegraciones de los estados excitados del J/ψ (1S), sobre todo del ψ (3770) y de los de mayor masa, se encuentran una serie de mesones con encanto. Ya se conocen muy bien los de menor masa, que se clasifican en mesones pseudoescalares y vectoriales que se muestran en la tabla 17.6.

Tabla 17.6: Mesones pseudoescalares y vectoriales con encanto, de menor masa.

desintegración	$J^{\mathcal{P}} = 0^-$	$J^{\mathcal{P}} = 1^-$
$c\overline{c} \longrightarrow c\overline{u} + \overline{c}u$	$(D^0 + \overline{D}^0)(1864)$	$(D^{\star 0} + \overline{D}^{\star 0})(2007)$
$\longrightarrow c\overline{d} + \overline{c}d$	$(D^+ + D^-)(1869)$	$(D^{\star +} + D^{\star -})(2010)$
$\longrightarrow c\overline{s} + \overline{c}s$	$(D_s^+ + D_s^-)(1968)$	$(D_s^{\star +} + D_s^{\star -})(2112)$

Poco tiempo después, L. Lederman (Premio Nobel en 1988) y colaboradores[14] en un experimento en Fermilab (Chicago), estudiando la distribución de masas de muones ($\mu^+\mu^-$) producidos en las reacciones de protones de 400 GeV contra núcleos de Be, Cu y Pt (se trataba de un experimento conocido como de tipo *beam dump* porque se lanza un haz muy intenso de protones contra un blanco y sólo interesa medir los pares de μ producidos), descubrieron el mesón $\Upsilon(9460)$, que también se identifica como un estado ligado $(b\overline{b})$ de un nuevo quark, el quark *beauty* (belleza), cuya masa es también inferior al doble de la masa del mesón con belleza más ligero, el $B^{\pm}$ (5279) o el $B^0(5279)$, con lo que también es un estado con una anchura de desintegración peque˜na. Los datos originales del experimento de Lederman mostraban un exceso de sucesos en la distribución de masas $\mu^+\mu^-$, alrededor de 9,5 GeV/c^2 que puede verse en la figura 17.9.

Además del Υ, aparecen varios estados que se encuentran por debajo del umbral de desintegración en $B\overline{B}$, y se conocen como $\Upsilon(nS)$ tal como aparecen en la siguiente tabla:

	$\Upsilon(1S)$	$\Upsilon(2S)$	$\Upsilon(3S)$	$\Upsilon(4S)$
$M(\text{MeV}) =$	9460	10023	10355	10580
$\Gamma_{\text{tot}}(\text{keV}) =$	$54,02 \pm 1,25$	$31,98 \pm 2,63$	$20,32 \pm 1,85$	$(20,5 \pm 2,5$ MeV)

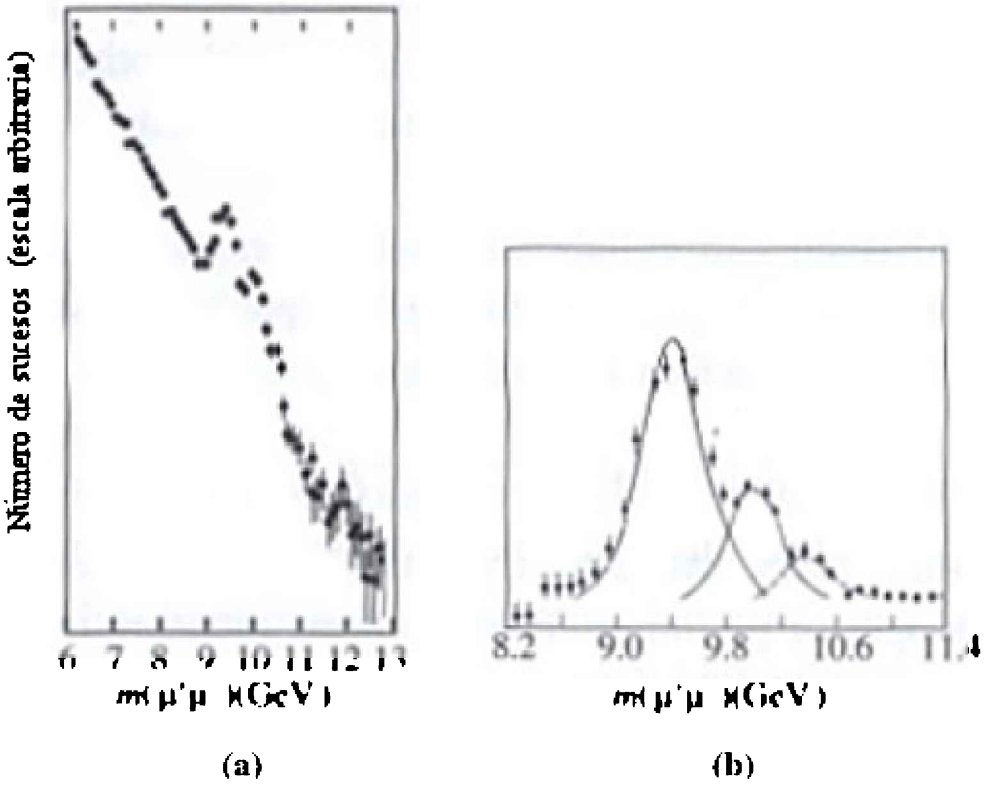


Figura 17.9: Resultados del experimento de L. Lederman y colaboradores que observó la producción del mesón Υ en el Tevatrón de Chicago (a) Espectro de masas $\mu^+ \mu^-$ total; (b) Espectro de masas $\mu^+ \mu^-$ después de sustraer el ruido de fondo (datos tomados de S. W. Herb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 39 (1977) 252.)

Los tres primeros estados de esta tabla, llamados $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ y $\Upsilon(3S)$ han sido medidos con gran precisión, como puede verse por ejemplo en las curvas de la sección eficaz hadrónica medida en el experimento de la colaboración CUSB en el colisionador e^+ e^- CESR instalado en la Universidad de Cornell, en Nueva York (EEUU), que se muestran en la figura 17.10. Simultáneamente fueron también detectados por el experimento CLEO, instalado en el mismo colisionador CESR.

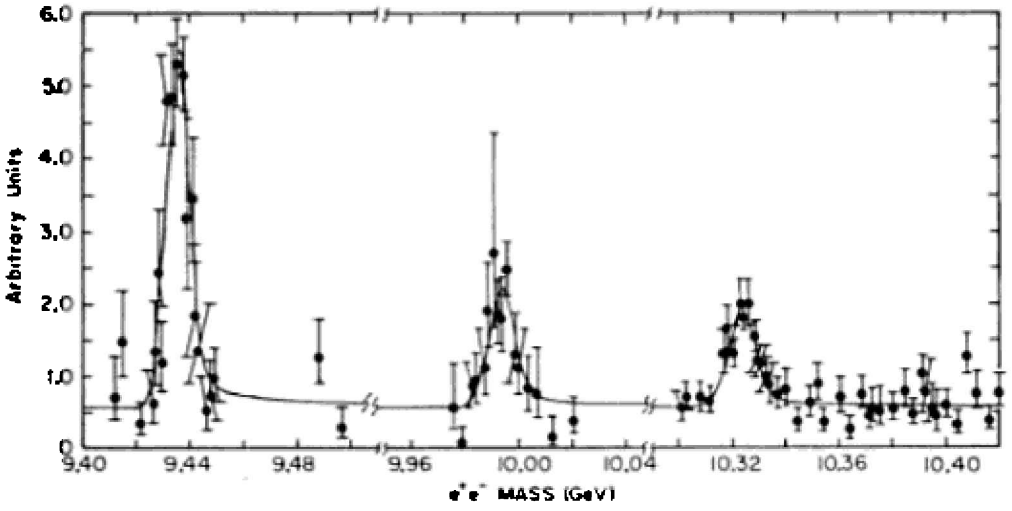


Figura 17.10: Sección eficaz hadrónica obtenida en el experimento de la colaboración CUSB en el colisionador e^+ e^- CESR de Cornell, donde se pueden observar los estados $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ y $\Upsilon(3S)$ (Datos de T. Böhringer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 44 (1980) 1111).

De nuevo, las excitaciones del mesón Υ con masa mayor que 10580 MeV, se desintegran dando pares de mesones con belleza. Los mesones pseudoescalares *bellos*, más ligeros tienen las siguientes propiedades:

desintegración		$J^{\mathcal{P}} = 0^-$
$b\bar{b}$	$\longrightarrow b\bar{u} + \bar{b}u$	$(B^+ + B^-)(5279)$
	$\longrightarrow b\bar{d} + \bar{b}d$	$(\bar{B}^0 + B^0)(5279)$
	$\longrightarrow b\bar{s} + \bar{b}s$	$(\bar{B}_s^0 + B_s^0)(5367)$

(17.48)

habiéndose establecido, de momento, solamente un mesón vectorial con belleza, B^* (5325).

Las masas de los dos mesones vectoriales $J/\psi\,(c\bar{c})$ y $\Upsilon(b\bar{b})$, permiten estimar la masa de los quarks constituyentes respectivos:

$$m_c \approx 1{,}5\ \mathrm{GeV/c^2}$$
$$m_b \approx 5{,}0\ \mathrm{GeV/c^2}$$

El espectro energético de los mesones vectoriales que se muestra en la figura 17.11 ayuda a entender por qué las anchuras de desintegración de los mesones φ, ψ (3S) y Υ(4S) son relativamente peque˜nas; aunque por encima, están muy cerca de los umbrales de producción de hadrones con extra˜neza, encanto y belleza, respectivamente. El espacio fásico disponible es peque˜no. Obsérvese también que los mesones más ligeros con estructura cc y bb, están debajo del umbral respectivo y por ello no pueden desintegrarse en hadrones que tengan encanto y belleza. Esto no sucede en el caso del mesón φ.

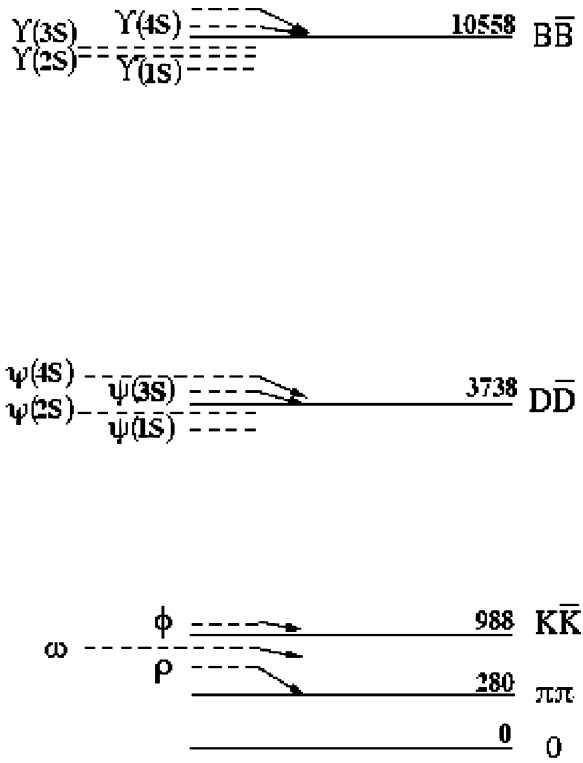


Figura 17.11: Umbrales energéticos (en MeV) de los mesones vectoriales y de la producción asociada de los hadrones de menor masa formados por

quarks s, c, b.

La conclusión sobre estos descubrimientos es doble: por una parte se descubren dos nuevos quarks, el c y el b y por otra, aparece toda una nueva espectroscopía: la de los mesones y bariones con encanto y belleza, aunque de forma más sorpendente nace la espectroscopía de los estados $c\overline{c}$ (*charmonio*) y $(b\overline{b})$ (*bottomonio*), que van a aportar nuevas propiedades de los constituyentes elementales y de sus interacciones. Así por ejemplo, las desintegraciones radiativas de los bosones vectoriales J/ψ (1S) y $\psi'(3685)$ han permitido establecer la existencia de una serie de estados, pertenecientes a la familia del charmonio $c\overline{c}$, que no tienen los números cuánticos del fotón pero que tienen los números cuánticos esperados para un sistema ligado $c\overline{c}$ (muy similar a los estados del positronio). Este espectro del charmonio ha sido determinante a la hora de obtener un potencial que represente las fuerzas entre quarks (potencial de QCD).

17.6.1 La regla de OZI

Ya se ha visto con anterioridad que el mesón φ (1020) tiene una estructura en quarks ss. Se trata de un mesón con una anchura Γ_{tot} = 4,26 ±0,04 MeV. Es anormalmente peque˜na para su masa, pero es mucho mayor que la del J/ψ. Ello se entiende porque la masa del φ (1020) es algo mayor que el umbral $K\overline{K}$, pero con un espaci ofásico muy peque˜no; por ello es un mesón con una anchura muy estrecha. El cociente de desintegración:

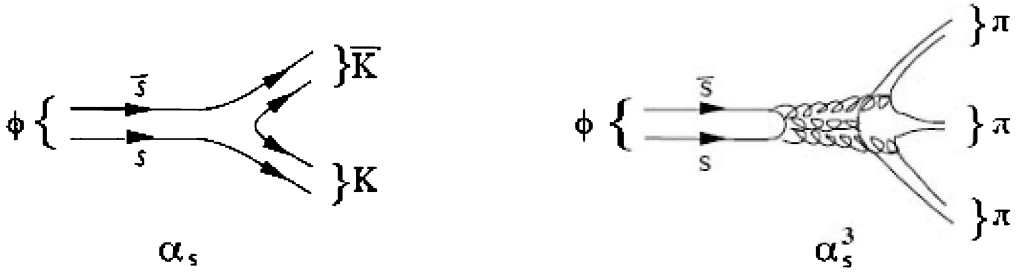
$$\frac{\Gamma(\phi \rightarrow 3\pi)}{\Gamma(\phi \rightarrow K\overline{K})} \approx 0{,}18 \qquad (17.49)$$

a pesar de ser más favorable la desintegración $\varphi \rightarrow 3\ \pi$, por espacio

fásico. La explicación hay que obtenerla a través de la regla de OZI (Okubo, Zweig, Iizuka), que favorece las desintegraciones en las que los quarks del estado inicial y final están conectados. En la figura 17.12 puede observarse la desintegración del mesón $\varphi(1020)$. Se entiende la relación vista en (17.49), puesto que el diagrama con líneas de quarks no conectadas entre el φ y el estado final a tres piones, está suprimido frente al otro, porque es necesario un triple intercambio de gluón (la amplitud serádeorden $\sim \alpha_s^3$). Son necesarios 3 gluones porque para conectar dos singletes de color (estado inicial y final desconectados) son necesarios $\geq$ 2 gluones. Pero como se trata de un mesón vectorial, con conjugación de carga $C = -1$, hace falta un número impar de gluones.

17.6.2 Desintegraciones leptónicas de los mesones vectoriales

Figura 17.12: Explicación de la regla de OZI (Okubo, Zweig, Iizuka), aplicable a las desintegraciones del mesón $\varphi(1020)$.



Una consecuencia directa de las anchuras leptónicas de los mesones vectoriales, como puede verse en la figura 17.13, en donde se observa el acoplamiento al estado final $e^+ e^-$, es que son directamente proporcionales a la carga de los quarks Q_i.. En efecto, la expresión de la anchura leptónica (fórmula de Van Royen-Weisskopf) es:

$$\Gamma_{V \to e^+e^-} = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{m_V^2}|\Psi(0)|^2 \qquad (17.50)$$

$$Q^2 = \left| \sum_i a_i Q_i \right|^2 ,$$

en donde , es la suma ponderada de los cuadrados de las cargas de los quarks constituyentes, siendo $a_i l$ las amplitudes de las funciones de onda; por ejemplo, para los mesones vectoriales ligeros, las vistas en (17.24) y (17.25), y para los pesados la estructura que se acaba de ver, se tiene que las cargas valen:

$$\rho^0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \Longrightarrow Q^2_{\rho^0} = \left| \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tfrac{2}{3} - (-\tfrac{1}{3}) \right\} \right|^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\omega^0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \Longrightarrow Q^2_{\omega^0} = \left| \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} \right\} \right|^2 = \tfrac{1}{18}$$

$$\phi^0 = s\bar{s} \Longrightarrow Q^2_{\phi^0} = \left| \tfrac{1}{3} \right|^2 = \tfrac{1}{9}$$

$$J/\psi = c\bar{c} \Longrightarrow Q^2_{J/\psi} = \left| \tfrac{2}{3} \right|^2 = \tfrac{4}{9}$$

$$\Upsilon(1S) = b\bar{b} \Longrightarrow Q^2_{\Upsilon(1S)} = \left| \tfrac{1}{3} \right|^2 = \tfrac{1}{9}$$

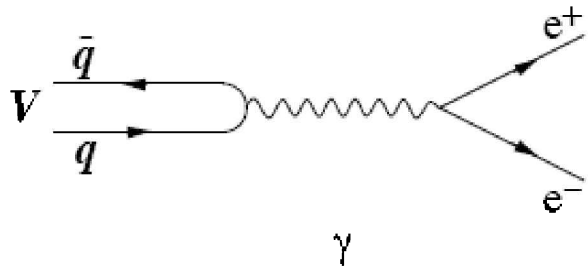


Figura 17.13: Diagrama de la desintegración leptónica $V \rightarrow e^+ e^-$ de un mesón vectorial *V*.

La fórmula de la amplitud de desintegración en $e^+ e^-$ para los mesones vectoriales (17.50) se puede comprobar con la serie ρ, ω, φ dada

anteriormente así como con los mesones J /ψ y Υ, que son estados puros $c\overline{c}$ y $(b\overline{b})$. Con todos ellos se obtiene la siguiente relación entre anchuras leptónicas:

$$\Gamma(\rho^0) \div \Gamma(\omega^0) \div \Gamma(\phi^0) \div \Gamma_{J/\psi} \div \Gamma\Upsilon$$

$$9 \div 1 \div 2 \div 8 \div 2$$

Las medidas experimentales de las anchuras de los mesones vectoriales estudiados se pueden observar en la tabla 17.7, con lo que las relaciones entre ellas (tomando Γ_ω como unidad) es la siguiente:

$$\Gamma_\rho \div \Gamma_\omega \div \Gamma_\phi \div \Gamma_{J/\psi} \div \Gamma_\Upsilon$$

$$11.7 \pm 0.4 \div 1 \pm 0.05 \div 2.10 \pm 0.04 \div 9.2 \pm 0.4 \div 2.2 \pm 0.09$$

lo que es una valiosa comprobación del modelo de quarks constituyentes.

Tabla 17.7: Anchuras de desintegración de los mesones vectoriales.

Mesón	Masa (MeV)	$\Gamma_e = \Gamma_\mu$(keV)	Γ_{tot}	
ρ	$775,8$	$7,04 \pm 0,06$	$149,1 \pm 0,8$	MeV
ω	$782,59$	$0,60 \pm 0,02$	$8,49 \pm 0,08$	MeV
ϕ	$1019,46$	$1,26 \pm 0,02$	$4,26 \pm 0,04$	MeV
J/ψ(1S)	$3096,9$	$5,51 \pm 0,06$	$92,9 \pm 2,8$	keV
Υ(1S)	$9460,30$	$1,29 \pm 0,03$	$54,02 \pm 1,25$	keV

Se observa en particular que $\Gamma_{e^+e^-}/Q^2$ es casi constante. Lo que implica que:

1. Las cargas de los quarks *charm* y *beauty* son $Q_c = \frac{2}{3}e$ y $Q_b = -\frac{1}{3}e$

2. La probabilidad $|\Psi(0)|^2 \sim m_V^2$

En conclusión: por una parte se observa que el espectro de mesones pesados es compatible con la asignación de cargas fraccionarias a los quarks; por otra parte, la dependencia $|\Psi(0)|^2 \sim m_V^2$ permite determinar la forma del potencial de ligadura entre quarks, como se verámás adelante.

17.6.3 Aniquilación e^+ e^- y mesones vectoriales

La aniquilación de pares e^+ e^- ha sido objeto de estudio exhaustivo desde que se pusieron en marcha, allá por los a˜nos 1960, los primeros colisionadores e^+ e^-. Estos, son aceleradores tipo sincrotrón que inicialmente se construyeron para estudiar la producción de mesones vectoriales utilizando haces de energía alrededor de 1 GeV. El CERN, dispuso del mayor colisionador e^+ e^-, el LEP. Enél, se estudió la producción del bosón Z^0 desde 1989 hasta 1995, utilizando haces de e^+ y e^- de energía cercana a 45 GeV. Desde 1995 hasta que fue desmontado en 2000 se fue subiendo la energía hasta llegar cerca de los 200 GeV en el centro de masas (o sea 100 GeV de energía por haz). Los objetivos del LEP pasaron del estudio exhaustivo de los bosones Z^0 y $W^{\pm}$, a la búsqueda de los bosones de Higgs o eventualmente cualquier indicación de nueva física, no contenida en el Modelo Estándar.

La aniquilación e^+ e^- es la manera más fácil y limpia de producir hadrones con quarks pesados. Por ello se abordará a continuación el estudio de la aniquilación e^+ e^- pasando revista inicialmente a los procesos que tienen lugar por debajo de la masa del bosón Z^0(91.1876 GeV).

El mecanismo de aniquilación puede tener lugar a través de un γ virtual como en la figura 17.14 o a través de un Z^0 virtual. Los dos se acoplan a pares de fermiones, pero en el caso del Z^0 pueden producirse, además, pares $\nu_\ell \overline{\nu}_\ell$. El intercambio de Z^0 tiene importancia sobre todo a

energías elevadas.

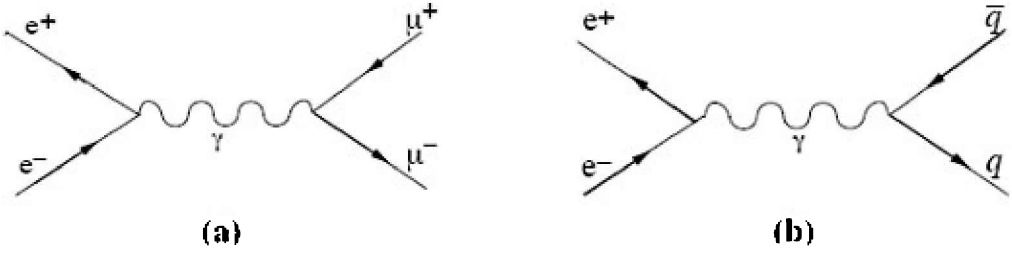


Figura 17.14: (a) Diagrama de Feynman de la aniquilación $e^+ e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, por inter-cambio de γ. (b) Diagrama de Feynman del proceso $e^+ e^- \rightarrow q\,q$ en donde se observa que es prácticamente el mismo esquema.

El proceso $\mathbf{e^+ e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$
La materialización de un par de muones:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \qquad (17.51)$$

puede considerarse como el proceso de aniquilación básico. En este proceso intervienen partículas elementales y puntuales. La sección eficaz diferencial de este proceso (véase la figura 17.14) se calcula utilizando la teoría QED y se obtiene, en el centro de masas de la reacción:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^-\rightarrow\ \mu^+\mu^-}}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{2s}\left(1+\cos^2\theta\right) \qquad (17.52)$$

siendo s la energía total en el centro de masas, al cuadrado:

$$s = (p_{e^-} + p_{e^+})^2 = (2E)^2 \qquad (17.53)$$

que es fácilmente calculable a partir de los dos cuadrimomentos del estado inicial de la colisión. La distribución angular de (17.52), que tiene una forma $(1 + \cos^2\theta)$, es característica de partículas con espín $s = 1/2$. Lo mismo se observa con la sección eficaz de producción de pares $q\overline{q}$, prueba de que también los quarks tienen espín $s = 1/2$. La sección eficaz

de la reacción de aniquilación (17.51) se obtiene integrando la expresión (17.52) para todos losángulos, quedando:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}(\hbar c)^2 \qquad (17.54)$$

Se puede decir que el fotón virtual producido en la aniquilación $e^+ e^-$ se mate-rializa en un par $\mu^+\mu^-$, y el acoplamiento es el de la carga eléctrica en ambos vértices del proceso. El proceso $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ es muy fácil de medir experimentalmente ya que la vida media del μ es larga; tiene un gran recorrido en la materia y ello hace que su medida sea posible. Una prueba del excelente acuerdo que existe con los resultados experimentales de la medida de la sección eficaz $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ puede observarse en la figura 17.15.

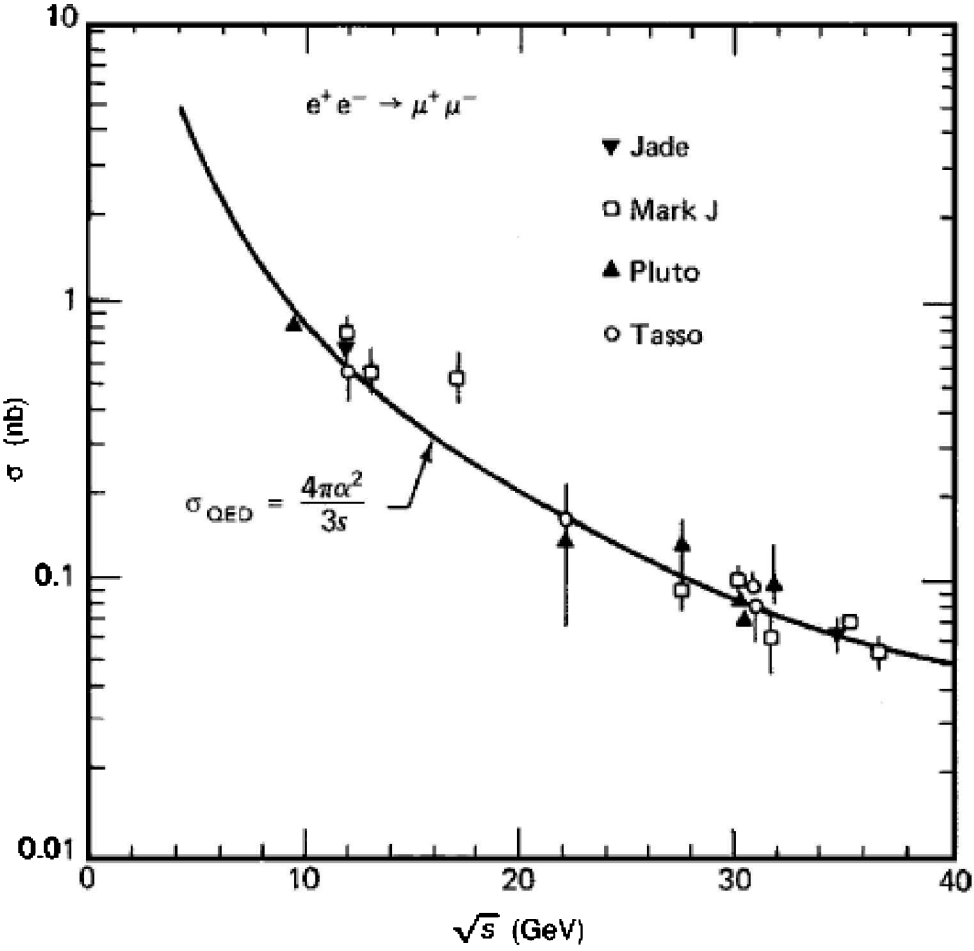


Figura 17.15: Resultados de la medida de la sección eficaz $e^+ e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, obtenidos en los cuatro experimentos instalados en el colisionador PETRA de DESY(Hamburgo). Numéricamente, la sección eficaz vale $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{21{,}7 \text{ nb}}{E^2}$, con *E*, energía del haz, en GeV.

$e^+ e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$

El proceso $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$ tiene las mismas características teóricas que el $e^+ e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, salvo el hecho que el leptón τ tiene una masa mucho mayor. Pero también tiene una vida media mucho más corta ($\tau_\tau \sim 0{,}3 \times 10^{-12}$ seg.) por lo que su recorrido es insignificante, incluso a gran

energía. Como el τ siempre se desintegra emitiendo, al menos, un neutrino, la se˜nal experimental se complica. Es más difícil de identificar. Además dado que más del 50 % de sus desintegraciones van a través de hadrones, es también un canal cuya identificación estámás contaminada de otros procesos hadrónicos, es decir los procesos $e^+ e^- \to q\bar{q}$.

La sección eficaz $e^+ e^- \to \tau^+ \tau^-$ es idéntica a la $e^+ e^- \to \mu^+\mu^-$, dadala universalidad de los acoplamientos débiles de los leptones:

$$\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}(\hbar c)^2 \qquad (17.55)$$

Laúnica diferencia es el umbral de producción, debido a la mayor masa de los leptones τ. Experimentalmente se ha comprobado que la sección eficaz, sigue exactamente la curva de la producción de $\mu^+\mu^-$.

$e^+ e^- \to$ mesones vectoriales.

El fotón virtual puede acoplarse a los mesones vectoriales, ρ (770), ω (782), φ (1020), J/ψ (1S), Υ(9460), cuando la energía de la colisión sea muy próxima a la masa del mesón correspondiente. En estos casos, dado que la energía es mucho menor que la masa del bosón Z^0, puede ignorarse el mecanismo de intercambio del Z^0.

Se trata entonces de la producción de resonancias. Si el estado final es también $e^+ e^-$, se dice que el proceso es elástico y la sección eficaz sigue la ley de Breit-Wigner:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi\lambda\!\!\!^{-2}(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)}\frac{\Gamma_e^2/4}{(E-M_R)^2+\Gamma_{tot}^2/4} \qquad (17.56)$$

en donde $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p}$, siendo p el momento en el centro de masas de la colisión $e^+ e^- \to e^+ e^-$; E es la energía en el centro de masas y M_R *l* la masa (valor en el pico) de la resonancia. Γ_e es la anchura parcial de desintegración de la resonancia en el canal $e^+ e^-$ y Γ_{tot} es la anchura total

de la resonancia, de espín J, mientras que s_1 y $s_2$son los espines de las partículas que interaccionan (en este caso el e^+ yel e^-).

Si la desintegración se produce dando un estado final diferente a e^+ e^-, entonces la ley es la que corresponde al canal inelástico, representado por f, cuya anchura parcial es Γ_f en la siguiente expresión:

$$\sigma_f(E) = \frac{3\pi\lambda^2}{4} \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{(E - M_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4} \qquad (17.57)$$

Este es el método que se ha empleado para medir las anchuras Γ_e y Γ_{tot} de los bosones vectoriales ρ (770), ω (782), φ (1020), J/ψ (1S), Υ (9460), que están directamente relacionadas con las cargas de los quarks constituyentes, y que se han visto en los parágrafos precedentes.

Un proceso similar, pero por intercambio de Z^0 tiene lugar si la energía de la colisión e^+ e^- es cercana a la masa del propio bosón Z^0. Entonces se produce el Z^0 real, siguiendo la misma ley de Breit-Wigner que en los casos anteriores. En la figura 17.16 puede observarse el valor de las secciones eficaces de producción de hadrones en función de la energía centro de masas $\sqrt{s}$ de la reacción e^+ e^-. Aparecen los picos de los mesones vectoriales y es evidente que no hay más quarks después del quark b hasta masas del orden de la masa del Z.

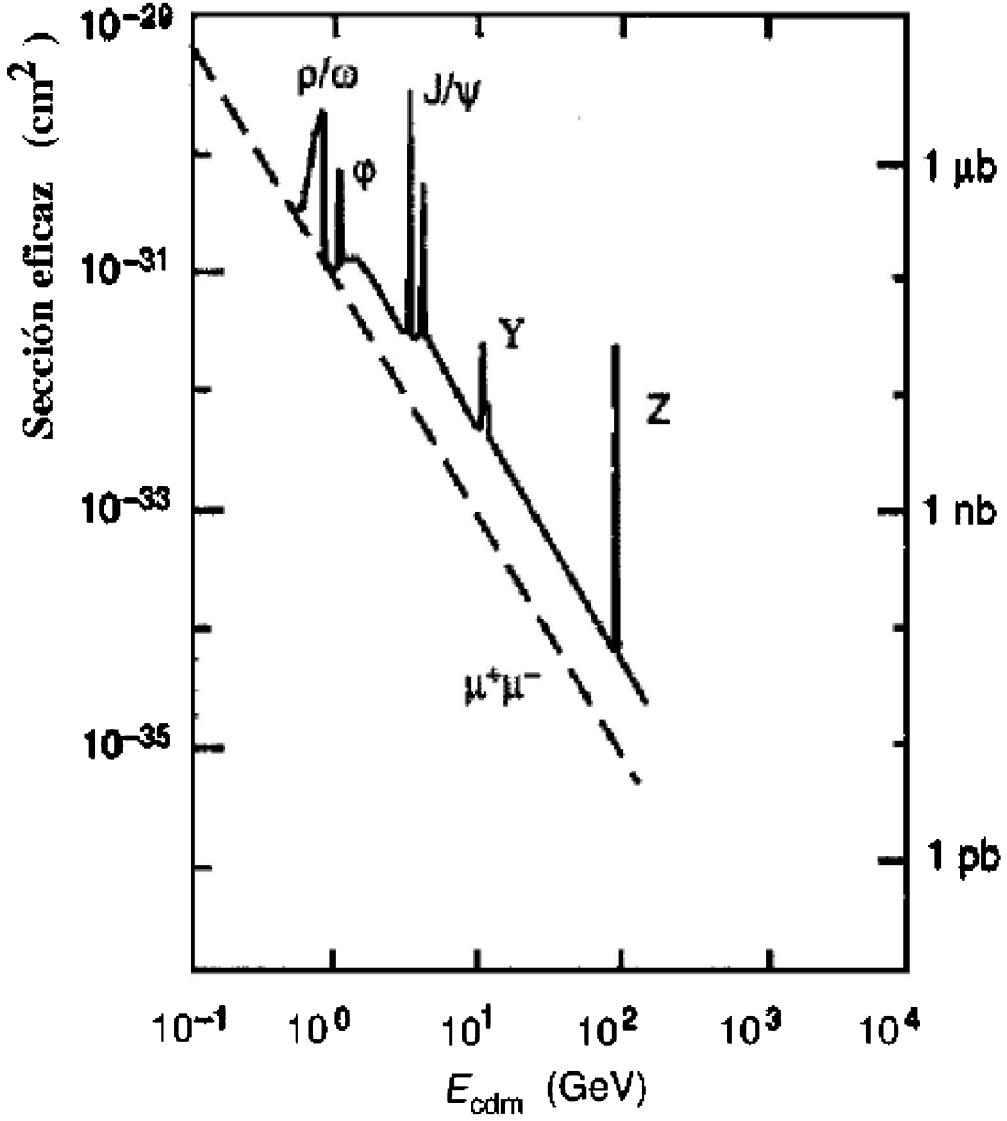


Figura 17.16: Resultados de la medida de la sección eficaz de producción de hadrones, donde se observan los picos correspondientes a la producción de mesones vectoriales en la aniquilación e^+ e^-. Lacurva a trazos muestra la producción directa de pares $\mu^+\mu^-$.

$e^+ e^- \rightarrow q\,q$

En el parágrafo anterior se ha estudiado la producción de resonancias en la aniquilación e^+ e^-. Ahora se estudia el canal de producción de

quarks, que puede ser considerado como el caso de la producción no resonante de hadrones.

El fotón puede acoplarse a los quarks, ya queéstos tienen carga eléctrica. La materialización de los quarks seguirá el mismo mecanismo que el de la materialización de un par muón-antimuón. Sin embargo ahora:

$$\boxed{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \rightarrow\ q\overline{q}) = \frac{4\pi}{3}\frac{(\alpha\hbar c)^2}{s} z_q^2 N_c} \qquad (17.58)$$

en donde

- z_q es la carga del quark q (tomando como unidad la carga del protón) del estado final; en el caso del μ^- visto más arriba, $z_q = -1$; para los quarks habrá que introducir su carga correspondiente;

- N_c es un factor de color que en el caso de μ no existe (equivaldría a $N_c = 1$), y por ello no aparece en la expresión de la sección eficaz (17.54) vista más arriba.

Por consiguiente, los valores de z_q dependerán del quark que aparece en la reacción; por ejemplo si se toma el quark u:

$$\sigma(\mathrm{e^+e^-} \rightarrow\ \mathrm{u\overline{u}}) = \frac{16\pi}{9}\frac{\alpha^2}{s}(\hbar c)^2 \qquad (17.59)$$

porque la carga del quark u es z_q = +2/3. El factor N c = 3 ya que existen tres colores.

La medida del cociente:

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \rightarrow\ \mathrm{hadrones})}{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \rightarrow\ \mu^+\mu^-)} \qquad (17.60)$$

puede verse en la figura 17.17. La sección eficaz $\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ es la vista en (17.52). Los picos en la curva de *R*, informan claramente de la existencia de los bosones vectoriales. Aparecen dos picos muy estrechos en las energías del $J/\psi(1S)$ y $\psi(3685)$ seguidos de otros picos anchos y más bajos que corresponden al umbral ($\gg$3730 MeV) de producción de mesones con encanto. Pero sin lugar a dudas, lo más importante de la medida del cociente *R* es que su valor

$$\mathcal{R} = N_c \sum_i z_{q_i}^2$$

informa por una parte, de la carga eléctrica de los quarks y por otra, del número de colores N_c.. De esta manera puede comprobarse en la figura 17.17 cómo va aumentando el cociente *R* cada vez que se franquea el umbral de un nuevo quark, ya que entonces, la suma de los valores de z^2_{qi} va aumentando de forma escalonada. Esta es otra comprobación experimental de la carga de los quarks.

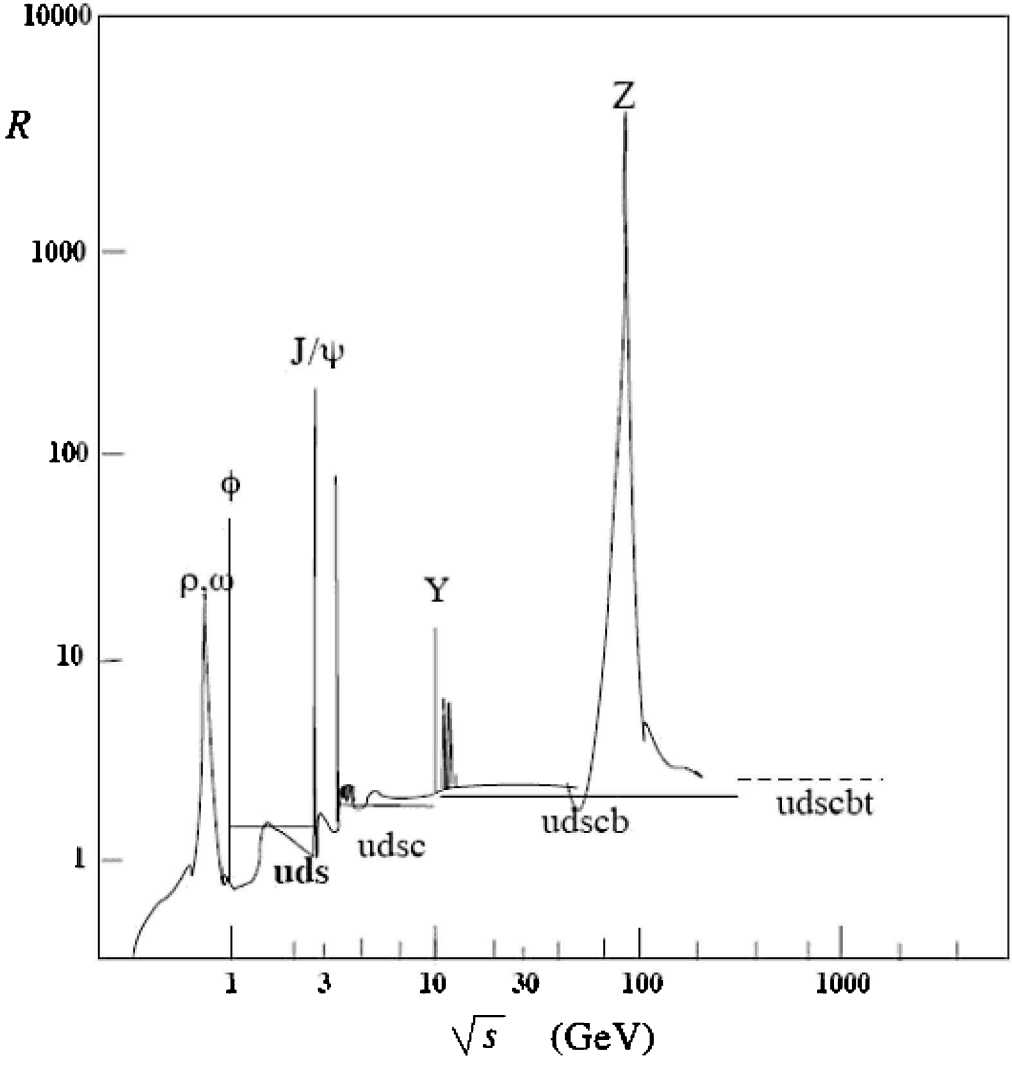


Figura 17.17: Resultados de la medida del cociente *R* entre la sección eficaz $e^+e^- \rightarrow$ hadrones y $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

17.6.4 Los mesones vectoriales en el colisionador LHC

A finales de 2010, después del primer a˜no de funcionamiento del LHC, los grandes experimentos de propósito general ATLAS y CMS registraron una luminosidad integrada, aproximadamente igual a Ldt = 40 pb^{-1}. Con esos datos verificaron de nuevo las predicciones del

Modelo Estándar; así, la figura 17.18, muestra los bosones vectoriales y el bosón Z medidos en el canal de desintegración $\mu^+\mu^-$.

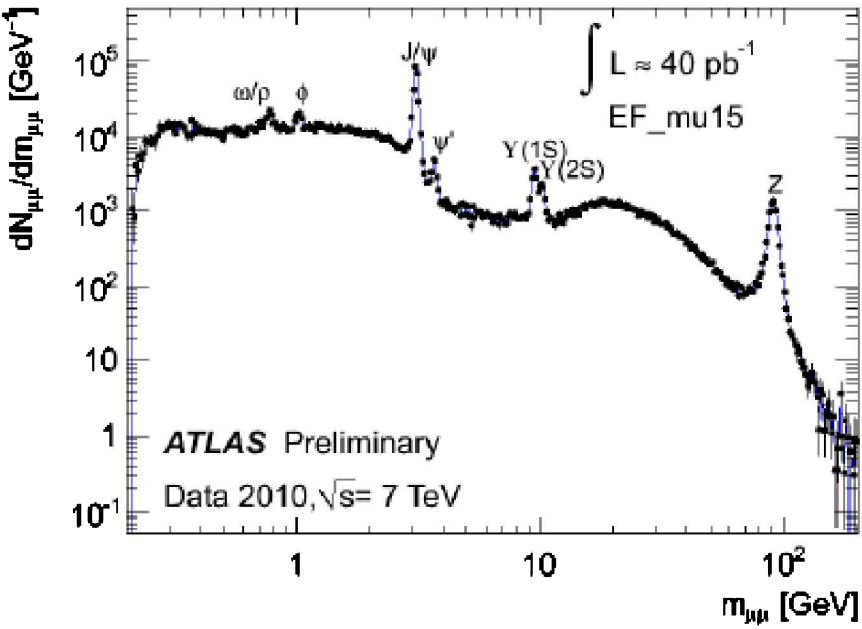


Figura 17.18: Espectro de masas $\mu^+\mu^-$, donde se observan los bosones vectoriales ρ, ω, ϕ, J /ψ,Υ y el bosón intermediario Z en el experimento ATLAS del LHC después del primer a˜no de funcionamiento.

17.6.5 El cuarto y quinto quark: simetrías SU(4) y SU(5)

La aparición del cuarto quark (el encanto, c), con un número cuántico que se conserva en las interacciones fuertes, obliga a introducir una nueva dimensión al grupo SU(3), dando lugar a la simetría SU(4) de sabor. La representación fundamental de SU(4) quedará definida por los 4 quarks u, d, s, c; la figura 17.19 muestra las coordenadas (pesos) de los cuatro quarks en los tres ejes (I_3, S, C), después de a˜nadir el nuevo eje C.

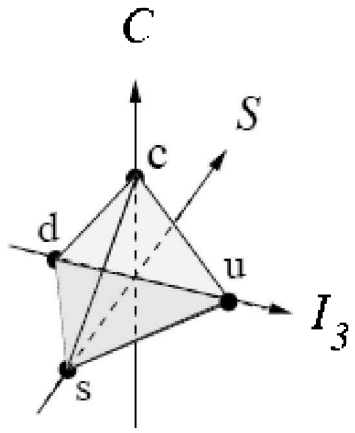


Figura 17.19: Los cuatro quarks u, d, s, c de la representación fundamental de SU(4).

Los multipletes de los mesones se obtendrán al componer $\mathbf{4} \otimes \bar{\mathbf{4}} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{1}$; por lo tanto los mesones pseudoescalares y vectoriales se representarán según el esquema de la figura 17.20 (a) y (b). El $\eta_c(2980)$ es el mesón pseudoescalar y el $J/\psi(3097)$ el vectorial; ambos singletes de isospín. Los otros estados se clasifican en un triplete de mesones con encanto y otro triplete con los antimesones correspondientes. Se encuentra pues que los mesones con los quarks u, d, s, c se disponen en un 15-plete y un singlete. Todos los mesones que aparecen en estas figuras han sido descubiertos y tienen los números cuánticos esperados.

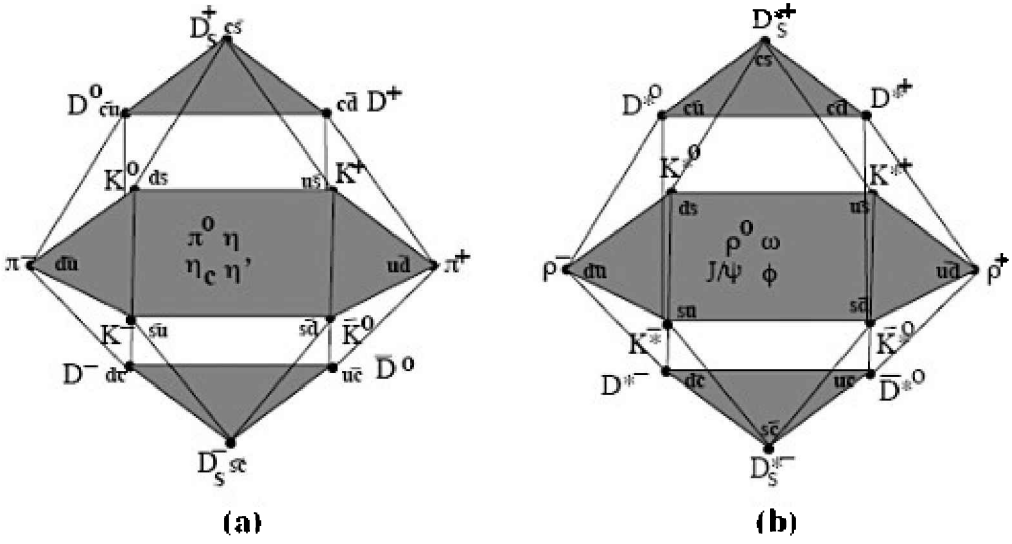


Figura 17.20: (a) Multiplete de mesones pseudoescalares en SU(4), una vez introducido el quark c. (b) Multiplete de mesones vectoriales en SU(4).

Para obtener los multipletes de bariones, la composición de representaciones en SU(4) es ahora:

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 20_S \oplus 20_{M_S} \oplus 20_{M_A} \oplus \overline{4}_A \qquad (17.61)$$

y se estructuran según la figura 17.21, en la que se observan los dos 20-pletes, uno con el octete y otro con el decuplete de SU(3).

Todos los mesones y bariones encantados descritos en los anteriores multipletes han sido encontrados.

El quinto quark (con belleza, b), introduce un nuevo número cuántico que se conserva en las interacciones fuertes y con ello otra dimensión al grupo SU(4), dando lugar a la simetría SU(5) de sabor. Ahora son necesarios cuatro ejes para identificar los quarks de la representación fundamental, lo que es imposible de dibujar. Mucho más complicado es la representación de los multipletes de mesones y bariones con belleza.

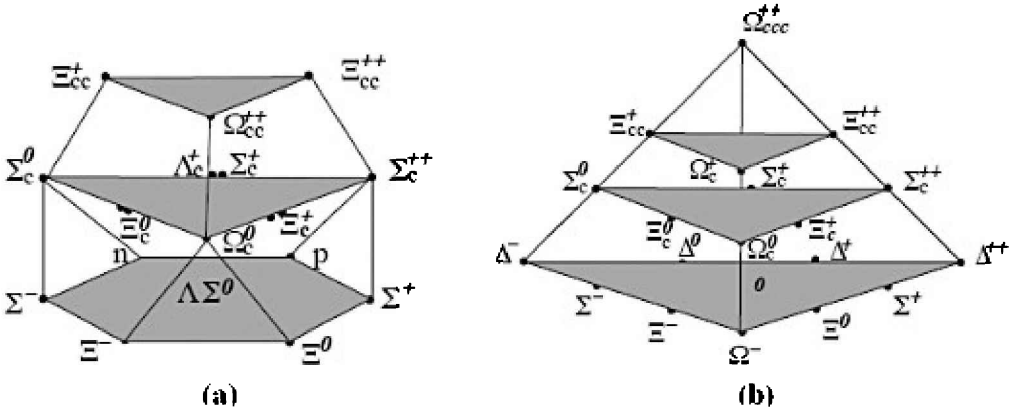


Figura 17.21: Multipletes de bariones con quarks u, d, s y c en SU(4). (a) 20-plete de bariones que contiene el octete de SU(3). (b) 20-plete de bariones con el decuplete de SU(3).

17.6.6 Mesones exóticos: *glueballs*

Hasta ahora se ha presentado la espectroscopía de hadrones compuestos por quarks, siguiendo la más sencilla de las prescripciones: que los mesones son estados $q_1\bar{q}_2$ y que los bariones son entes compuestos por tres quarks: $q_1q_2q_3$. Estos hadrones deben tener números cuánticos acordes con su composición.

Históricamente se ha definido como mesón exótico, a cualquier mesón que tuviese números cuánticos inexplicables por el modelo de quarks; por ejemplo, no pueden existir bosones vectoriales con $J^{PC} = 1^{-+}$ ya que según el modelo de quarks, la conjugación de carga para un estado $q\bar{q}$ debe ser $C = (-1)^{(L+S)} =$

-1 y debe cumplirse que $J = L + S = 1$.

Sin embargo, es importante se˜nalar que la teoría QCD predice la existencia de mesones isoscalares que están compuestos sólo por gluones, y se les denomina *glueballs*. Se predice que el estado fundamental de los mesones *glueball* tiene espín-paridad 0^{++} y el primer estado excitado 2^{++}. Las masas que predice la teoría tienen un gran error: 1,60 ±0,16 GeV/c^2 y 2,4 ±0,16 GeV/c^{2}para los *glueball*0^{++} y 2^{++},

respectivamente. La situación experimental no es contundentemente clara, aunque se suele pensar que hay un buen candidato a *glueball*:elmesón $f_0(1500)$.

17.7 Los *Quarkonia* y el potencial de QCD

Otro de loséxitos del modelo de quarks constituyentes se deriva del estudio de los sistemas ligados conocidos por el nombre de *quarkonia*, es decir, sistemas ligados $q\,\overline{q}$ similares al positronio, el estado ligado e^+e^-.

17.7.1 El positronio y su desintegración

El positronio (véase la figura 17.22(a)) es un sistema (e^+e^-) ligado por un potencial culombiano $V(r) \sim -\frac{\alpha}{r}$, con números cuánticos bien conocidos: $J = L + S$, $\mathcal{P} = (-1)^{L+1}$ y $\mathcal{C} = (-1)^{L+S}$. Al igual que en elátomo de hidrógeno, los estados ligados del sistema se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger

$H\Psi(r) = E\Psi(r)$ con $H =$ –

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \qquad \text{con} \qquad H = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{\alpha\hbar c}{r}\right)$$

Los niveles energéticos son $E_n = -\frac{\alpha^2\mu c^2}{2n^2}$, con μ la masa reducida, lo que en el caso delátomo de H es $\mu \approx m_e$, pero en el positronio $\mu = m_e/2$. Laenergía de estos niveles queda determinada por el número cuántico n, llamado número cuántico radial (o principal), que siempre es mayor que el momento angular orbital; por ejemplo, para el estado fundamental ($n = 1$), el momento angular orbital sólo puede tomar el valor $L = 0$. Los estados con distintos valores de $n>1$ se denominan excitaciones radiales del positronio.

El radio de Bohr $r_0 = \frac{\hbar}{\mu\alpha c}$, es por lo tanto dos veces mayor en el positronio que en el hidrógeno, para el que vale r_0 = 0,53Å.

La conocida estructura fina en elátomo de hidrógeno es debida a la inter-acción espín-órbita $(\vec{s}_e \cdot \vec{L})$ y produce correcciones a los niveles energéticos de orden α^2. Da lugar a estados con momento angular orbital L diferentes (identificados como onda S, P, …); la estructura hiperfina es debida a la interacción espín-espín $(\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p)$. Estaúltima desdobla los estados en singletes ($^1S_0$) y tripletes de espín15 ($^3S_1$) y las correcciones a los niveles energéticos son aún más peque˜nas, del orden de $\alpha^2\mu_p/\mu_e$.

El positronio no es estable y se desintegra por aniquilación en rayos γ ylo hace desde dos estados que tienen vidas medias diferentes. El estado de menor energía es el pseudoescalar $^1S_0$, estado singlete de espín y con momento angular orbital L = 0. Es estado propio de la conjugación de carga $C = (-1)^{L+S} = +1$, por lo que se desintegra dando 2 fotones, puesto que la conjugación de carga de un sistema de n_γ fotones vale $C = (-1)^{n_\gamma}$. La probabilidad de desintegración es:

$$\Gamma(1^1S_0 \longrightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^3}{m_e^2 c}|\psi(0)|^2 \qquad (17.62)$$

siendo

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3}$$

y a el radio de Bohr $a = \hbar/(\mu\alpha c)$, con lo que se obtiene $\Gamma(1^1S_0 \rightarrow 2\gamma) = \alpha^5 m_e/2$, es decir, una vida media $\tau_{2\gamma}$ = 1,244 $\cdot 10^{-10}$seg, igual al valor experimental.

El estado $^3S_1$, triplete de espín y con momento angular L = 0 tiene conjugación de carga C = −1 por lo que se desintegra dando 3 fotones. Este estado tiene una probabilidad de desintegración

$$\Gamma(1^3S_1 \longrightarrow 3\gamma) = \frac{2}{9\pi}(\pi^2 - 9)\alpha^6 m_e c \qquad (17.63)$$

o sea una vida media más larga $\tau_{3\gamma} = 1{,}386 \cdot 10^{-7}$seg., también compatible con la medida experimental.

La conclusión de este sistema puede verse en la figura 17.22 (a); pudiéndose concluir que el espectro es debido al potencial de Coulomb, que además de su dependencia en $1/r$, sólo depende de la constante de estructura fina, α.

17.7.2 El potencial QCD

Las desintegraciones radiativas de los bosones vectoriales J/ψ(3097) y ψ'(3685) han permitido establecer la existencia de una serie de estados, pertenecientes a la familia del charmonio $c\bar{c}$, que no tienen los números cuánticos del fotón pero que tienen los números cuánticos previstos:

- El estado $L = 0$ (onda S) y singlete de espín, llamado $\eta_c(2980)$ con $\Gamma = 13$ MeV. Es un mesón pseudoescalar.

- Los estados $L = 0$ (onda S) y triplete de espín, que pertenecen a la familia del J/ψ; se trata de mesones vectoriales.

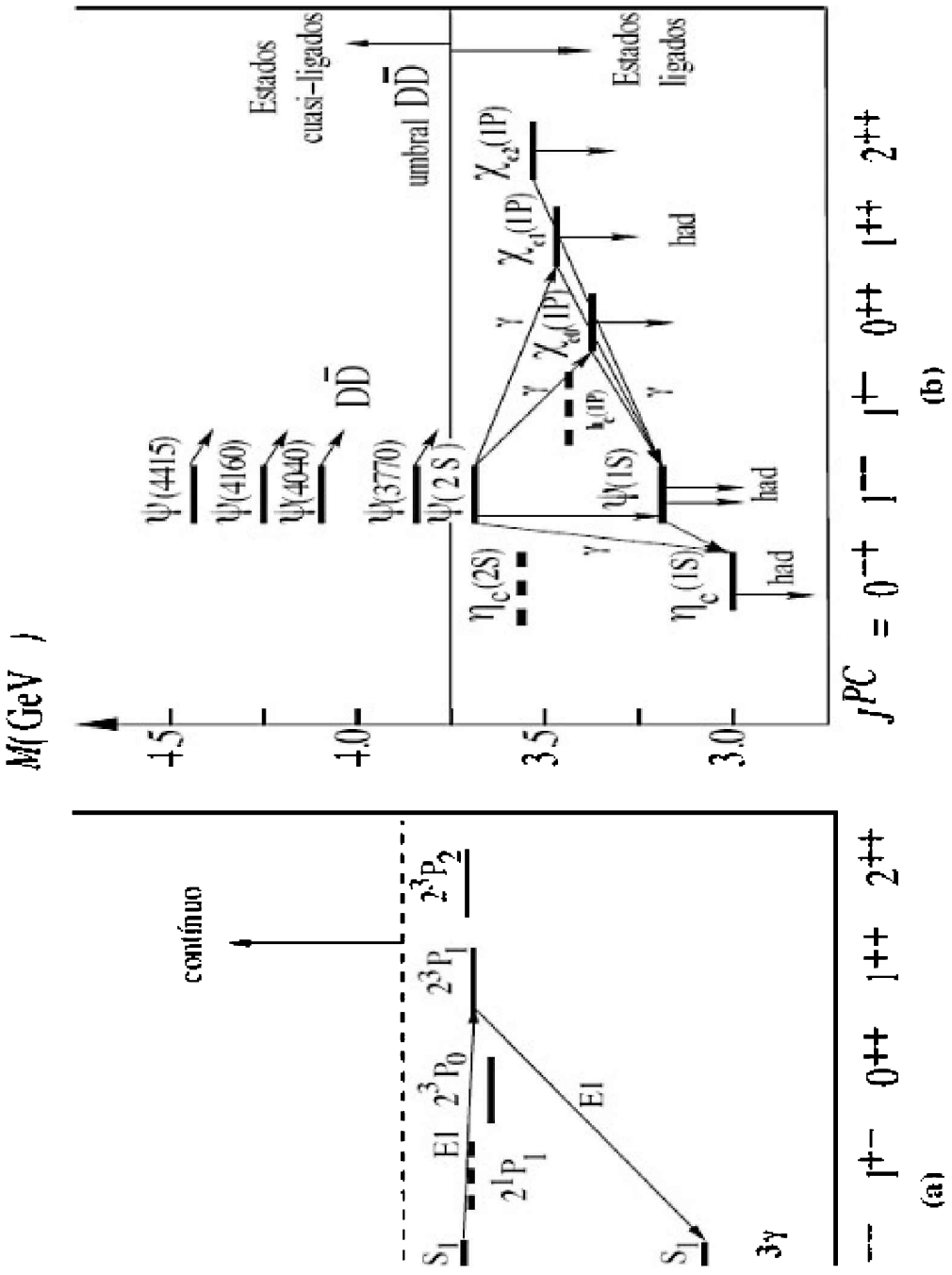
- Los estados $L = 1$ (onda P) y tripletes de espín se les denomina χ; se desintegran parcialmente en J /ψ + γ, y se han encontrado los siguientes estados 1^3P,

denominación:	$\chi_{c0}(3415)$,	$\chi_{c1}(3510)$,	$\chi_{c2}(3556)$
anchura Γ_{tot} **(MeV):**	$10,1 \pm 0,8$	$0{,}91 \pm 0{,}13$	$2{,}11 \pm 0{,}16$
espín-paridad $J^{\mathcal{P}}$**:**	0^{++}	1^{++}	2^{++}

La figura 17.22 (b), ilustra el espectro del charmonio. Obsérvese la similitud con el espectro del positronio.

En el caso del quarkonio, al ser las masas de los quarks muy elevadas

($m_c \approx 1{,}5$ GeV/c^2 y $m_b \approx 5{,}0$ GeV/c^2), el sistema puede ser tratado como un sistema no relativista. En la figura 17.22 (b) se muestran los estados charmonio, es decir, hadrones cuya estructura de quarks es cc. Un espectro muy parecido se observa en el caso del sistema bottomonio.



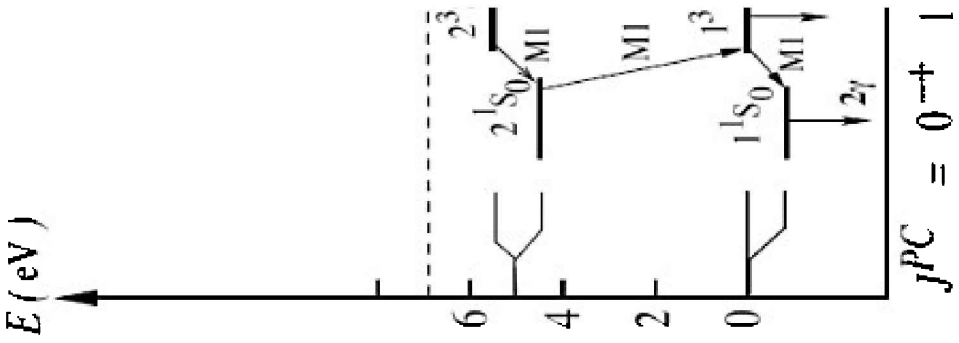


Figura 17.22: (a) Niveles de energ´ıa del positronio, en donde se observa el desdoblamiento de estructura fina e hiperfina de los niveles n = 1 y n = 2 aumentados por un factor 103 y 104 respectivamente. (b) Masas del sistema charmonio. Los estados en trazos todav´ıa no son seguros. Los singletes son ηc(2980) y hc y los tripletes son ψ y χci. Exceptuando la escala energ´etica, la similitud entre el positronio y el charmonio es extraordinaria.

Lo más importante es que el espectro de estos estados, genéricamente llamados quarkonio es casi idéntico al del positronio, pero en el caso del quarkonio, el potencial que mejor se ajusta al espectro experimental es de la forma

$$V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{\hbar c}{r} + kr \qquad (17.64)$$

con $k \approx 1$ GeV fm^{-1}. La forma de este potencial puede verse en la figura 17.23. El primer término da la dependencia en 1 /*r* igual a la del potencial de Coulomb, debido a la interacción entre quarks a peque˜nas distancias. Elúltimo término, lineal con *r*, es el responsable del confinamiento de los quarks. La constante α_s en realidad no es constante, sino que varía con la distancia entre quarks, disminuyendo a medida que la distancia entre quarks disminuye. Esto es una consecuencia directa de la teoría QCD, que se conoce con el nombre de libertad asintótica. La forma del potencial en (17.64) es compatible con la observación vista en las desintegraciones leptónicas de los mesones vectoriales en los que |

$\Psi(0)|^2 \sim m^2_v$.

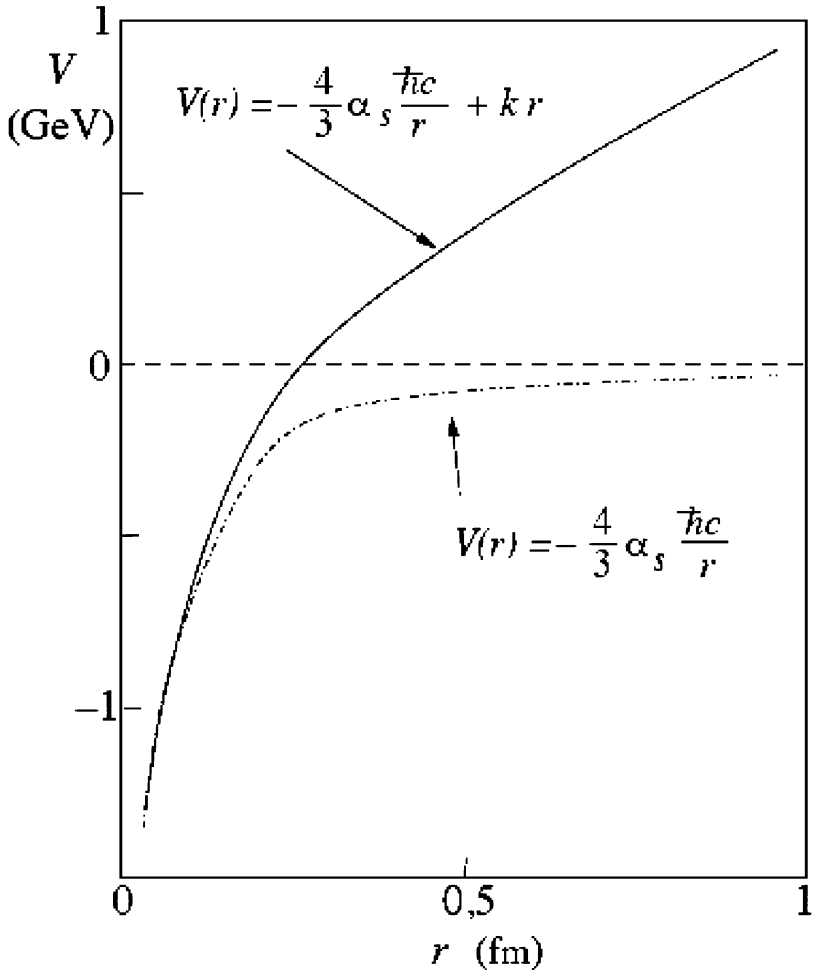


Figura 17.23: La forma del potencial de QCD, $V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{\hbar c}{r} + kr$, con $\alpha_s = 0{,}3$ y $k = 1$ GeV/fm.

17.7.3 Desintegración de los *Quarkonia*

La producción más sencilla del charmonio es en colisionadores e^+e^-. El J /ψ y sus excitaciones radiales $\psi(2^3S_1)$, etc…, se acoplan al fotón puesto que tienen los mismos números cuánticos $J^P = 1^-$. De ahí se accede a los estados $\eta_c(n^1S_0)$ por desintegración radiativa (dipolar

magnética, es decir $\Delta L = 0$, $\Delta S = 1$), o sea corresponden al cambio de espín de uno de los quarks. Los estados χ_{ci}, son accesibles por transiciones dipolares eléctricas de los estados $\psi(n^3S_1)$, con $n \geq 2$.

Sin embargo hay un total de 4 modos de desintegración de los *quarkonia*. A continuación se describen los 4 modos de desintegración del charmonio:

1. Desintegración radiativa, de tipo electromagnético. Ejemplos:

$$J/\psi(1^3S_1) \longrightarrow \eta_c(1^1S_0) + \gamma \qquad \text{y} \qquad \psi(2^3S_1) \longrightarrow \eta_c(1^1S_0) + \gamma$$

2. Aniquilación (véase la figura 17.24):

(*a*) en dos γ o dos gluones, como por ejemplo:

$$\eta_c(1^1S_0) \rightarrow 2\gamma, 2g$$

donde domina la desintegración en hadrones frente a 2 γ (cuya fracción representa $(3 \pm 1) \times 10^{-4}$ de las desintegraciones).

(*b*) en tres gluones como en el caso del

$$J/\psi(1^3S_1) \rightarrow ggg$$

estado final con hadrones (suprimido OZI) y que representa el 87,7 % de sus desintegraciones.

(*c*) a través de un γ virtual dando hadrones (60 %) o leptones (40 %). Este es el caso de las desintegraciones del J/ψ;

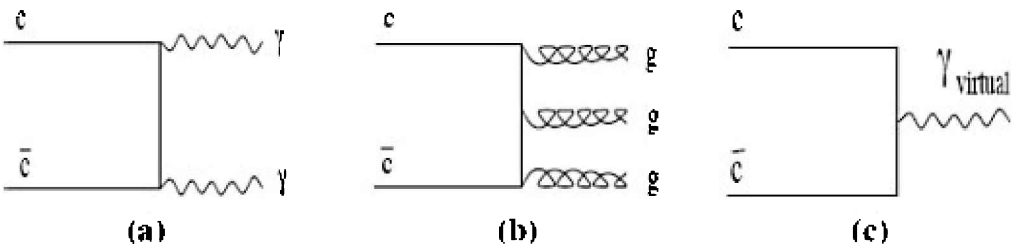


Figura 17.24: Diagramas de aniquilación del charmonio (a) proceso

electromagnético dando dos fotones, (b) proceso fuerte dando tres gluones y (c) aniquilación dando un fotón virtual.

3. Desintegración débil del quark c. Proceso poco importante puesto que se trata de una interacción débil; ejemplo:

$$J/\psi(3097) \longrightarrow D_s^- e^+ \overline{\nu}_e$$

visible en la figura 17.25 (a), y que es muy difícil de detectar experimentalmente.

4. Creación de pares de quarks. Da lugar a los mesones encantados, por ejemplo:

$$\psi(3770) \longrightarrow D^0 \overline{D}^0$$

Para que este proceso pueda tener lugar es necesario evidentemente que $M_\psi \gg 2M_D$, y además es el proceso dominante (figura 17.25 (b)).

Esteúltimo tipo de desintegración es el que ha permitido encontrar todos los mesones encantados a través de la creación de los quarks ligeros, como ya se ha visto anteriormente y lo mismo se aplica a los mesones bellos, visto en (17.48).

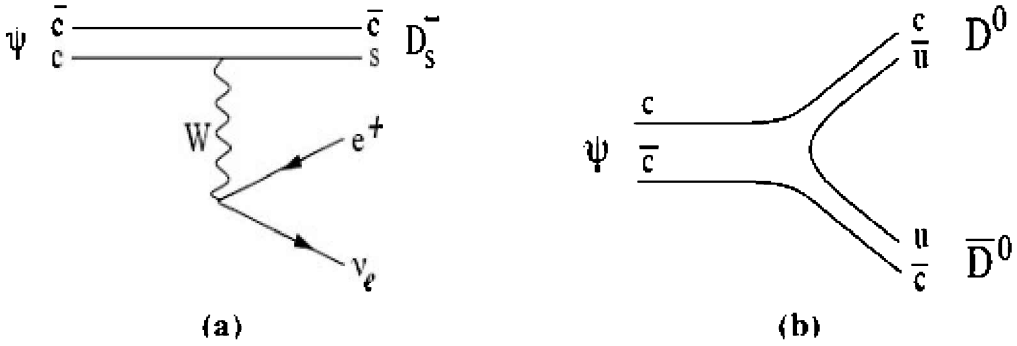


Figura 17.25: Desintegración (a) débil y (b) fuerte (por creación de pares de quarks) del charmonio.

Medida de α_s

Existen muchos métodos experimentales de medida de la constante α_s. Se presentan a continuación dos métodos que han permitido determinar esta constante comparando las desintegraciones:

a) de los mesones pseudoescalares en los sistemas quarkonio (2 γ y 2 gluones) y

b) de los mesones vectoriales (entre ellos el J /ψ y el Υ a 3 γ y 3 gluones). En el caso de los mesones pseudoescalares, se pueden comparar las anchuras de desintegración del $\eta_c(1^1S_0)$, electromagnética (dando 2γ) y la fuerte (dando 2 gluones) para poder realizar un test de QCD, ya que se puede medir α_s, la constante de acoplamiento de quarks y gluones.

En efecto, a primer orden se cumple,

$$\Gamma(1^1S_0 \to 2\gamma) = \frac{3 \cdot 4\pi z_c^4 \alpha^2 \hbar^3}{m_c^2 c} |\Psi(0)|^2 \qquad (17.65)$$

siendo $z_c = \frac{2}{3}$, la fracción de carga del quark *c* y

$$\Gamma(1^1S_0 \to 2g) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha_s^2 \hbar^3}{m_c^2 c} |\Psi(0)|^2 \qquad (17.66)$$

Al calcular el cociente,

$$\boxed{\frac{\Gamma(1^1S_0 \to 2\gamma)}{\Gamma(1^1S_0 \to 2g)} = \frac{8\alpha^2}{9\alpha_s^2}} \qquad (17.67)$$

permite determinar

$$\alpha_s(m_{J/\psi}^2 c^2) \approx 0{,}20 \qquad (17.68)$$

encontrándose por el mismo método aplicado al bottomonio

$$\alpha_s(m_\Upsilon^2 c^2) \approx 0{,}17 \qquad (17.69)$$

En el caso de los mesones vectoriales se recurre a comparar las desintegraciones leptónicas, vistas anteriormente con las desintegraciones a 3 gluones. En efecto, como ya se ha visto en (17.50),

$$\boxed{\Gamma_{V\to e^+e^-} = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{m_V^2}|\Psi(0)|^2}$$

que da directamente la anchura Γ_{ee}. Si se calcula la anchura de las desintegraciones hadrónicas:

$$\boxed{\Gamma_{V\to 3g\to \text{ hadrones}} = \frac{160(\pi^2-9)\alpha_s^3}{81 m_V^2}|\Psi(0)|^2} \qquad (17.70)$$

dando valores para α_s compatible con el anteriormente visto en (17.68). Véase la tabla 17.8, en donde también se encuentra el valor obtenido para el mesón ϕ. Es decir, se prueba que el comportamiento de QED y QCD a peque˜nas distancias es similar, además verifica que las constantes de acoplamiento de las dos teorías son distintas y comprueba la evolución de la constante de acoplamiento α_s con la energía (*running coupling constant*):

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}} \qquad (17.71)$$

donde N_f *e*es el número de sabores de quarks cuya masa al cuadrado está por debajo del valor de Q^2(de momento $N_f^{max} = 6$) y el parámetro *de escala* Λ = 0,2 GeV, habiéndose verificado experimentalmente esta evolución también hasta image, es decir para una energía equivalente a la masa del Z^0, en la que la constante vale

image

También se cumple la llamada libertad asintótica, $\alpha_s \rightarrow 0$ cuando $Q \rightarrow \infty$.

Tabla 17.8: Valores de la constante α_s medidos en función de la energía (q^2del fotón virtual igual a la masa de los mesones vectoriales).

image

17.8 El descubrimiento delúltimo quark (el quark t)

En 1994, gracias al colisionador protón-antiprotón (Tevatrón) de Fermilab, que alcanzó una energía en el centro de masas de la colisión $\sqrt{s}$ = 1,8 TeV, los dos experimentos instalados en el mismo (conocidos por D0 y CDF), obtuvieron la primera evidencia experimental de la producción asociada del quark t através del proceso:

image

p+ p $\longrightarrow$ t+ t+ *X* siendo *X* un sistema de hadrones que conserva todos los números cuánticos. Las distintas topologías estudiadas se encontraron de acuerdo con las predicciones del modelo estándar. Todos estos datos vienen recogidos en la tabla 17.9.

La sección eficaz obtenida es σ(p + p $\longrightarrow$ t+ t+ *X*) ≈ 6,8 pb, mientras que la sección eficaz total de colisión σ(p + p) ≈ 150 mb. Esto informa de la enorme dificultad del descubrimiento. La detección del quark *top*, fue puesta de manifiesto gracias a su desintegración:

image

apareciendo pares de bosones W, junto con *jets*[16] debidos a la fragmentación de los quarks b, b y a otros quarks. La identificación de

los leptones $e^{\pm}$ y $\mu^{\pm}$, producto de las desintegraciones de los bosones $W^{\pm}$, permitieron explicar el origen de los pocos sucesos obtenidos.

Tabla 17.9: Canales que sirvieron para identificar la producción y desintegración del quark *top*, en los experimentos D0 y CDF del Tevatrón de Fermilab.

image

17.9 Problemas

17.1 Reacciones con hadrones.

Indicar en la siguiente lista cuáles son los procesos permitidos y prohibidos, se˜nalando en cada cado el tipo de interacción y el proceso subyacente a nivel de los quarks:

a) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^0 \gamma$

b) $\mu^- p \rightarrow \Lambda^0 \nu_\mu$

c) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 \mu^+ \nu_\mu$

d) $K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$

e) $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$

17.2 Momento magnético de Λ^0.

a) Escribir la función de ondas del Λ^0según el modelo quark, de forma que la tercera componente del espín sea $m_s = +1/2$.

b) Demostrar que el momento magnético del Λ^0es igual al momento magnético intrínseco del quark s.

17.3 Masas los mesones η y η.

a) La mezcla de los estados η_1 y η_8, pertenecientes al nonete de mesones pseudo-escalares, se puede expresar mediante la ecuación matricial

image

siendo θ elángulo de mezcla y η y η los estados físicos. Demostrar que si esta transformación matricial diagonaliza la matriz de masas, entonces se verifica

image

b) Calcular m_8a partir de la fármula de GellMann-Okubo para mesones y deducir el valor delángulo de mezcla.

17.4 Masas de los mesones en el modelo quark.

Las masas de los mesones en el modelo quark se pueden determinar a partir de las masas de los quarks constituyentes y una interacción hiperfina del tipo

image

siendo image los espines de los quarks constituyentes y m_1 y $m_2$sus masas respectivas.

a) Calcular las masas de los mesones pseudo-escalares y vectoriales a partir del modelo anterior.

b) Comparar las masas obtenidas con los valores experimentales.

17.5 Masas de los bariones en el modelo quark.

a) Verificar a partir de los valores medidos de las masas hadrónicas las siguientes relaciones

image

para el octete y el decuplete de bariones, respectivamente.

b) Deducir las relaciones anteriores a partir del modelo de quarks constituyentes.

17.6 Espectro del charmonio.

a) Dibujar el espectro del charmonio clasificando los estados según el valor de J^{PC} e indicar qué estados han sido ya

observados y cuáles no.

b) Utilizando la ley de conservación de la conjugación de carga, indicar todas las transiciones radiativas posibles entre estados del charmonio.

c) El experimento CRYSTAL BALL de SLAC ha observado claramente, en el espectro de fotones emitido por estados del charmonio, las siguientes energías: 130, 175, 269, 459 y 414 MeV. Identificar las transiciones que corresponden a estos fotones.

d) Discutir por qué no se observan transiciones radiativas a los estados η'_c y h_c en

el espectro de fotones del apartado anterior.

17.7 Espectro del bottomonio.

a) Dibujar el espectro del bottomonio clasificando los estados según el valor de J^{PC} e indicar qué estados han sido ya observados y cuáles no.

b) Utilizando la ley de conservación de la conjugación de carga, indicar todas las transiciones radiativas posibles entre estados del bottomonio.

c) Los experimentos CRYSTAL BALL (SLAC), ARGUS (DESY), CUSB y CLEO (Cornell) han observado claramente, en el espectro de fotones emitido por estados del bottomonio, las siguientes energías: 87, 100, 110, 123, 131 y 163 MeV. Identificar las transiciones que corresponden a estos fotones.

d) Discutir quése˜nal habría que buscar para descubrir los estados $\eta_b(1S)$ y $h_b(1S)$.

17.8 Hadrones con quarks pesados.

a) Dibujar el espectro de los hadrones (mesones y bariones) con encanto ($C = 1$), clasificando los estados según el valor de S (extra˜neza). Indicar qué estados han sido ya observados y cual ha sido la proceso que ha permitido dicha identificación.

b) ´ Idem para los hadrones con belleza ($B = 1$).

---

1 M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **125** (1962) 125 y *Phys. Lett.*, **8** (1964) 214.

2 y. Neeman, *Nucl. Phys.*, **26** (1961) 222.

3 G. Zweig, CERN preprint TH401 y CERN preprint TH412 (1964).

4 Esta definición de hipercarga se generaliza cuando se tienen en cuenta todos los quarks, y se define $Y = ß + S + C + B + T$; es decir, incluyendo las cargas internas extra˜neza, encanto, belleza y verdad.

5 Se llama *peso* a las coordenadas en el plano (I_3, Y).

6 La notación aquí empleada utiliza la dimensionalidad de las representaciones (n_3, n_2), primero la del multiplete de SU(3) de sabor y luego la de SU(2) de espín.

7 En los experimentos de producción, el estado buscado se produce como resonancia entre un subgrupo de las partículas del estado final. Los experimentos de formación son sensibles a la forma de la sección eficaz en función de la energía.

8 V. E. Barnes *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **12** (1964) 204.

9 Véase el estudio del isospín del sistema $^{\text{image}}$, en el tema de simetrías, sección 16.4.1.

10 En efecto, véase la formade η_1 y $\eta_8$dadas en (17.26) y (17.27) y sustitúyanse en (17.32).

11 J. E. Augustin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974) 1406.

12 J. J. Aubert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974) 1404.

13 Las consecuencias físicas del descubrimiento del quark *c* fueron de un alcance tal que este descubrimiento fue calificado de *revolución de noviembre*.

14 S. W. Herb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 39 (1977) 252.

15 En el positronio, igual que en el caso delátomo de *H* los estados se suelen denotar como en espectroscopía atómica, $n^{2S+1}L_J$.

16 En física de altas energías se denomina *jet* a un pincel o chorro formado por varias partículas (hadrones) que siguen la dirección del quark, como consecuencia del fenómeno llamado fragmentación; es decir, los quarks se materializan en varios hadrones ya que no pueden existir en estado libre.

18. Interacciones débiles

18.1 Introducción

Inicialmente la interacción débil se descubre y se asocia con la desintegración β nuclear.

La interacción débil que se aborda en este tema es una fuerza fundamental responsable de muchos procesos entre leptones y quarks, explica las desintegraciones de los quarks (es el proceso de cambio de sabor de quarks, o sea de los hadrones, ya que como se sabe no se han encontrado quarks en estado libre) y es elúnico tipo de interacción que sufren los neutrinos.

La interacción débil se considera que es debida al intercambio de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, de masa muy elevada (80,385 y 91,1876 GeV respectivamente), lo cual justifica el corto alcance de la misma $\left(R \sim \frac{\hbar}{Mc} \sim 10^{-3} \text{ fm}\right)$ y por ello se entiende que tuviera tantoéxito la primera teoría de Fermi sobre la desintegración beta de los núcleos que suponía una interacción puntual.

Al contrario que en el caso de las otras tres fuerzas de la naturaleza, no se conocen estados ligados por la interacción débil. Tratándose de una fuerza de intensidad muy peque˜na, casi todo lo que se ha aprendido sobre ella proviene del estudio de las desintegraciones de los hadrones (quarks) y leptones.

A escala cósmica, la interacción débil es muy importante puesto que

controla la velocidad de reacción termonuclear en la secuencia principal de las estrellas, puesto que en el núcleo de las mismas (densidades ~ 100 veces la del agua) tiene lugar el proceso de formación del deuterio:

$$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu_e \qquad (18.1)$$

que no tiene lugar en la tierra, dada su insignificante probabilidad.

Es interesante adelantar que, además del gran número de experimentos realizados para medir vidas medias y secciones eficaces de procesos débiles, se pueden destacar al menos tres de ellos por su impacto posterior:

- la violación de la paridad,
- las corrientes neutras y
- la detección de los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z^0.

18.1.1 Las familias de leptones

Los tres leptones cargados

Existen tres leptones cargados e^-, μ^-, τ^-(electrón, muón y tauón) y sus correspondientes antileptones. Los leptones más masivos (μ y τ) no son simplemente estados excitados de los ligeros, ya que por ejemplo no se observan reacciones del tipo:

$$\mu \not\rightarrow e + \gamma$$

El electrón es el leptón mejor conocido; fue descubierto hace ya un siglo por J. J. Thomson, el mismo tiempo transcurrido desde el descubrimiento de la radiactividad.

A mitad del siglo XX se descubre el muón μ, gracias a los experimentos con rayos cósmicos que andaban detrás del mesón de

Yukawa. Efectivamente se aclara que el pión se desintegra dando:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu \quad \text{seguido de} \quad \mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \qquad (18.2)$$

y se comprueba experimentalmente que el neutrino que acompa˜na al muón es distinto del que acompa˜na al electrón.

En 1975, y gracias al colisionador e^+e^-SPEAR del laboratorio SLAC de Stanford, California (EEUU), M. Perl[8] y su grupo descubren un nuevo leptón cargado, el más masivo de los leptones que bautizan con el nombre de $\tau^{\pm}$(tauón oleptón tau) y que como los otros dos también tiene un neutrino asociado.

El leptón τ es tan masivo (m_τ = 1777 MeV) que más de la mitad de sus desintegraciones tiene lugar dando hadrones en el estado final; así, además de los procesos leptónicos:

$$\tau^- \longrightarrow \ell^- + \overline{\nu}_\ell + \nu_\tau \qquad (18.3)$$

se encuentran, entre otros,

$$\tau^- \longrightarrow \pi^- + \nu_\tau \qquad \text{ó} \qquad \tau^- \longrightarrow \rho^- + \nu_\tau \qquad (18.4)$$

El experimento del descubrimiento de leptón τ es un bello ejemplo del ingenio de un grupo de investigación, que se centra en la identificación de los modos leptónicos (18.3) de desintegración del τ. La identificación se ve complicada por el hecho de que hay neutrinos (indetectables) en el estado final. Pero se vieron favorecidos por el efecto umbral ya que los leptones τ se producen asociados en la reacción $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$. La idea fue buscar la producción asociada de $e^+\mu^-$o $e^-\mu^+$. Los resultados pueden verse en la figura 18.1, donde efectivamente se pone en evidencia la aparición de este estado final, justo a partir del umbral, que es igual a $2m_\tau$. La medida se complica por la existencia del umbral de producción de partículas con encanto, muy cercano al umbral de producción de leptones τ.

El resumen de estos descubrimientos puede verse en la tabla 18.1, en

la que aparecen listados todos los leptones conocidos hasta hoy con todos sus números cuánticos. En particular, pueden verse los tres números leptónicos. Se denomina número leptónico a la suma $\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\tau$. Estosnúmeros cuánticos se conservan cada uno por separado y, por supuesto, la suma de ellos en todas las interacciones débiles. Garantizan que en todos los procesos débiles, cada neutrino acompa˜na al leptón de su familia.

No se han encontrado más leptones cargados que tengan una masa inferior a m ~50 GeV, pese a las intensas búsquedas realizadas en los colisionadores modernos.

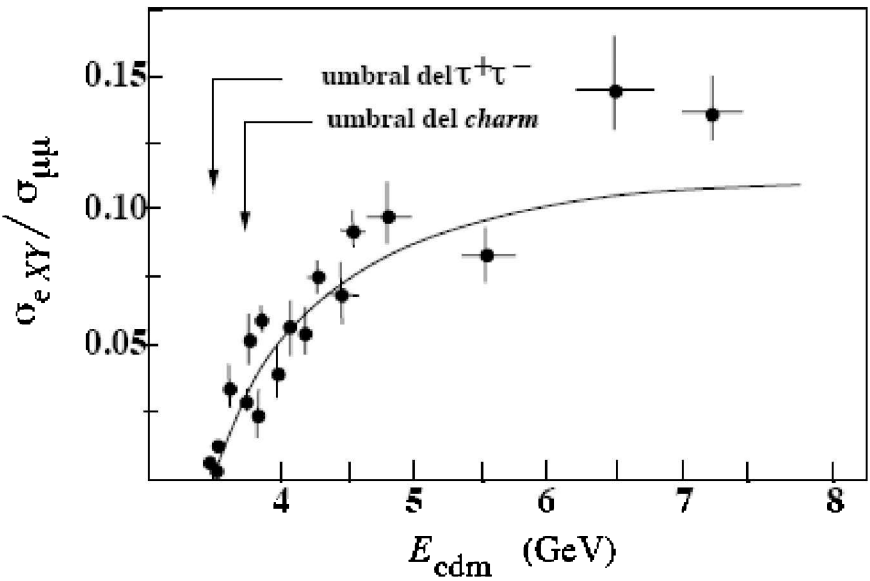


Figura 18.1: Cociente de secciones eficaces de producción de dos partículas de carga opuesta en la reacción $e^+e^- \rightarrow e^\pm + X^\mp + Y$ respecto a la producción de pares $\mu^+\mu^-$, en función de la energía. Y representa partículas neutras no detectadas. Datos de W. Bacino *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*,41 (1978) 13.

Los tres neutrinos

Existen también tres neutrinos asociados a cada uno a uno de los leptones cargados que pueden verse en la tabla 18.1. Desde que se

propuso la idea del neutrino en la desintegración beta, durante mucho tiempo se pensó que jamás se podría detectar el neutrino, pero un experimento llevado a cabo en 1956 logró demostrar la existencia de esta partícula. Se trata del llamado *Experimento de Reines y Cowan*, que ha sido descrito en la Sección 10.5. Precisamente en 1995 se concedió el premio Nobel de Física a F. Reines y a M. Perl. Al primero, por la primera evidencia experimental del ν_e y al segundo por el descubrimiento del leptón $\tau^{\pm}$,

Tabla 18.1: Los leptones y sus números cuánticos. Los antileptones correspondientes tienen cargas eléctricas Q ynúmeros leptónicos L_i c cambiadas de signo, pero con idénticas masas y vidas medias.

LEPTONES $S=\frac{1}{2}, \mathcal{B}=0$	M (MeV/c^2)	τ (s)	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,511	–	−1	1	0	0
ν_e	≤ 2 eV	–	0	1	0	0
μ^-	105,66	$2{,}2\times10^{-6}$	−1	0	1	0
ν_μ	$\leq$0,17	–	0	0	1	0
τ^-	1776,8	$0{,}291\times10^{-12}$	−1	0	0	1
ν_τ	$\leq$24,0	–	0	0	0	1

Tras el descubrimiento del muón, se supuso que se producían dos neutrinos en su desintegración: ν_e y ν_μ, pero no era evidente que ambos fueran distintos. La prueba experimental de que se trataba efectivamente de dos partículas distintas fue obtenida en 1962 por Schwartz, Steinberger y Lederman, mediante el llamado *experimento de los dos neutrinos* (véase figura 18.2). En 1988 les fue concedido el Premio Nobel de Física por este hallazgo. Para ello utilizaron un haz de protones de 15 GeV acelerados en el sincrotrón de protones AGS (Brookhaven, EEUU). Al chocar con un blanco, los protones producen piones y kaones que se desintegran en muones y neutrinos (la probabilidad de

desintegración en electrones es muy peque˜na: véanse los cocientes de desintegración en la Tabla D.6 del Apéndice D). Tras hacer pasar las partículas resultantes de las desintegraciones por un blindaje de hierro de 13 m, se consigue un haz que contieneúnicamente neutrinos. Para detectar estos neutrinos utilizaron un detector formado por cámaras de chispas y contadores de centelleo. Con este detector observaron sucesos de interacción de los neutrinos con producción de muones pero ningún suceso con aparición de electrón. Esto prueba que el haz contiene únicamente neutrinos muónicos y que estos son distintos a los electrónicos. Este es el primer experimento en que se utiliza un haz de neutrinos. Los haces de neutrinos que se han construido posteriormente están basados en el mismo principio que este experimento.

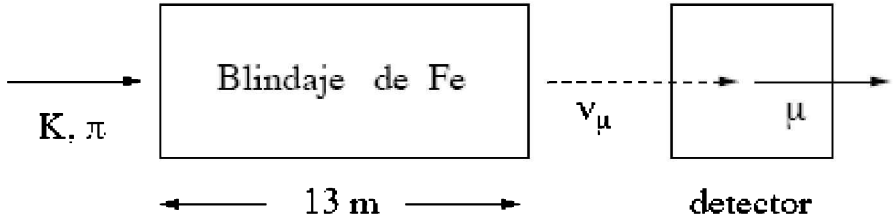


Figura 18.2: Experimento de los dos neutrinos.

Aunque prácticamente desde el descubrimiento del leptón τ se tenía evidencia de la existencia de un neutrino asociado ν_τ, distinto de ν_e y ν_μ, no ha habido evidencia directa de la existencia de esta partícula hasta el experimento DONUT (*Direct Observation of NU Tau*) efectuado en Fermilab (Chicago, EEUU) en 2000. En este experimento se envía un haz de protones de 800 GeV contra un blanco muy masivo de tungsteno, que tiene la propiedad de absorber los piones y kaones secundarios. De esta forma se logra enriquecer el haz de neutrinos con los ν_τ procedentes de la desintegración $D_s \rightarrow \tau\bar{\nu}_\tau$. Este haz se hace seguidamente interaccionar contra un blanco de hierro que contiene en su interior emulsiones fotográficas. Se trata a continuación de encontrar vértices desplazados compatibles con desintegraciones del leptón τ en las emulsiones. En este experimento se encontraron 4 sucesos de este tipo, lo cual prueba la presencia de $\bar{\nu}_\tau$ en el haz.

Mezcla y oscilaciones de neutrinos

El modelo estándar se ha construido con neutrinos sin masa. Pero la evidencia experimental de que los neutrinos tienen masa, aunque muy peque˜na, está bien establecida. El histórico déficit de los neutrinos solares y los resultados de los neutrinos atmosféricos estudiados en Superkamiokande avalan el cambio de sabor (oscilaciones) entre neutrinos. También han sido confirmadas las oscilaciones con neutrinos procedentes de reactores nucleares o de aceleradores. Los neutrinos oscilan en su viaje por el vacío, porque neutrinos de distinto sabor se mezclan. Las oscilaciones se manifiestan porque existe una transición en vuelo de un sabor a otro. Este fenómeno no podría tener lugar si los neutrinos tuvieran masa nula, como postula el actual modelo estándar. Este es uno de los problemas pendientes a resolver por el hasta ahora exitoso modelo estándar. Entonces, no hay ningún impedimento para que los tres sabores de neutrinos (electrónico, muónico y taónico) sean superposiciones de los tres estados estacionarios propios de la masa (ν_1, ν_2, ν_3). La matriz que relaciona los tres sabores (ν_e, ν_μ, ν_τ) con los tres estados cuyas masas son m_1, m_2, m_3, es:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathcal{V} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \qquad (18.5)$$

La matriz ν se suele escribir como un producto de tres matrices, correspondientes a rotaciones entre pares de familias:

$$\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{+i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \qquad (18.6)$$

donde s_{ij} y c_{ij} representan el coseno y el seno delángulo de mezcla entre el neutrino i y el j. La matriz de mezcla queda pues determinada por tresángulos y una fase. Los experimentos actuales han determinado los valores,

$\sin^2\theta_{12}$ = 0,308 ±0,017 $\sin^2\theta_{23}$ = 0,437 ±0,033 $\sin^2\theta_{13}$ = 0,0234 ±0,0020

que equivalen a los ángulos de mezcla $\theta_{12} \simeq 33°$, $\theta_{23} \simeq 41°$, $\theta_{13} \simeq 9°$, que son mucho mayores que losángulos de mezcla obtenidos en el sector de quarks, contenidos en la matriz CKM que se discutirá en (18.34).

Suponiendo dos sabores, e y μ, la probabilidad de oscilación entre sabores se demuestra que viene dada por:

$$P(\nu_\mu \to \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{1,27\Delta m^2 L}{E}\right)$$

siendo E (MeV) y L (m) la energía y distancia recorrida por el neutrino y $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2\ (\mathrm{eV}^2)$ la diferencia de masas al cuadrado entre los dos. Combinando los resultados actuales se obtiene δm^2 = 75,4±2,6 meV^2 que es muy pequeña y para ν_3 se ajusta el valor $\Delta m^2 = m_3^2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2}$ y se obtiene Δm^2 = 2430±60 meV^2, pero no se conoce la escala absoluta. Se habla por ello de dos jerarquías de masas; una en la que m_3 sería la del neutrino de mayor masa y la otra en la que m_3 sería el de menor masa.

18.1.2 Clasificación de las interacciones débiles

Se distinguen dos tipos de desintegraciones débiles;

- las que se conocieron primero y fueron llamadas corrientes cargadas, que por ejemplo cambian el sabor de los quarks ($d \to u + e^- + \overline{\nu}_e$) o convierten un leptón en un neutrino, produciendo en ambos casos un cambio de carga entre leptones igual a la unidad de carga e.

  El W acopla sólo a dobletes de constituyentes levógiros y la interacción es pura V-A.

- las denominadas corrientes neutras, que dan lugar a procesos sin cambio de carga ($e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \overline{\nu}_e$).

  Contrariamente al caso del W, el Z acopla a dobletes levógiros y a singletes dextrógiros (de leptones cargados y quarks, puesto que los neutrinos son sólo levógiros) y no mezcla fermiones de distintas familias. Además, no es una interacción pura V-A.

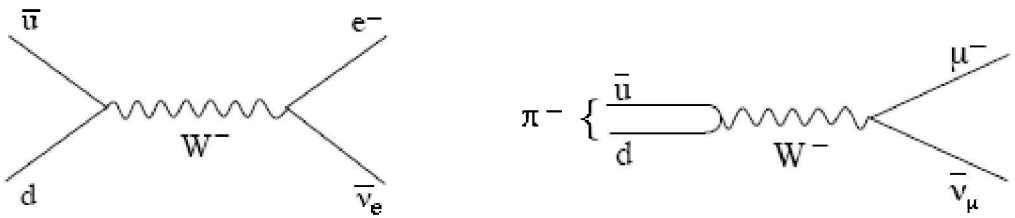
Utilizando el lenguaje de fuerzas por intercambio, las corrientes cargadas están mediadas por los bosones cargados $W^{\pm}$ (ejemplos de este proceso pueden verse en la figura 18.3) que, como puede verse es la interacción responsable de cambio de sabor de los quarks y de transformar un neutrino en un leptón de la misma familia y las corrientes neutras están mediadas por el bosón Z^0. Los vértices fundamentales de estas interacciones se muestran en la figura 18.4.

Entre partículas, los procesos débiles se clasifican en:

- *puramente leptónicos,* $\ell + \overline{\nu}_\ell \rightarrow \ell' + \overline{\nu}'_\ell$, como es el caso de $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$ o de $\tau^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$,

- *semi-leptónicos,* $q_1 + \overline{q}_2 \rightarrow \ell + \overline{\nu}_\ell$ por ejemplo $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, o $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \overline{\nu}_e$, e igualmente en el caso de la desintegración beta nuclear,

- *no-leptónicos,* $q_1 + \overline{q}_2 \rightarrow q_3 + \overline{q}_4$, por ejemplo $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$; $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ y $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.



(a) **(b)**

Figura 18.3: Diagramas de Feynman de primer orden de teoría de perturbaciones que explica la desintegración β^-: **(a)** del neutrón, en la que cambia el sabor del quark $d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$ y **(b)** del pión $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$ como una aniquilación $\overline{u}d$.

Los bosones intermediarios $W^{\pm}$ y Z^0, muy masivos, fueron descubiertos en 1983 en los experimentos UA1 (C. Rubbia *et al.*,) y UA2 (P. Darriulat *et al.*,) del CERN (Ginebra, Suiza). Sus masas se han determinado recientemente con una gran precisión, M_W = 80,385 ± 0,015 GeV/c² y M_Z = 91,1876 ± 0,0021 GeV/c². El elevado valor de su masa explica por qué la primera teoría de la inter-acción débil, propuesta por E. Fermi, consideraba la interacción como puntual ya que el alcance de la fuerza:

$$R_0 = \frac{\hbar}{M_W c} \sim 10^{-3} \text{ fm}$$

es 3órdenes de magnitud inferior al caso del intercambio de π de Yukawa.

Inicialmente se postuló que una misma constante de acoplamiento entraba en todos los procesos (hipótesis de universalidad); la llamada constante de Fermi, que vale:

$$G = 1{,}166 \times 10^{-5} \, (\hbar c)^3 \, \text{MeV}^{-2} \qquad (18.7)$$

sin embargo posteriormente se encontraron pequeñas variaciones a esta pretendida regla de universalidad.

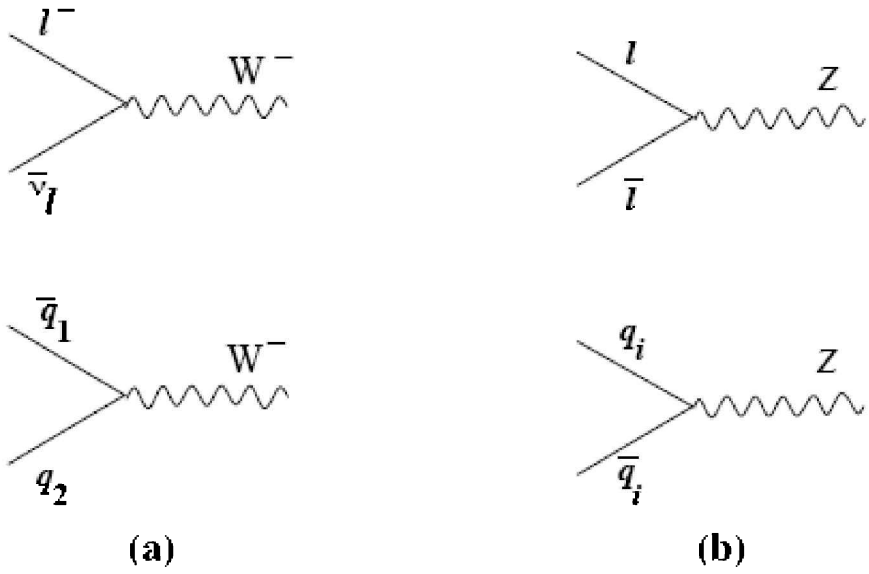


Figura 18.4: **(a)** Diagrama de Feynman para los vértices fundamentales de la interacción débil por intercambio de $W^{\pm}$ (corrientes cargadas). **(b)** Diagrama de Feynman del acoplamiento básico del bosón Z^0, es decir de corrientes neutras. No mezcla familias.

18.2 Violación de la paridad en la interacción débil

La violación de la paridad en la desintegración beta (T. D. Lee y C. N. Yang,[2] 1956) fue puesta en evidencia tras la observación de que la partícula $K^+(0^-)$ podía desintegrarse a dos estados finales de distinta paridad ($K \rightarrow 2\pi$ o $K \rightarrow 3\pi$). Es lo que se denominó el puzzle o paradoja $\theta - \tau$.

El estudio de la distribución angular de los electrones emitidos por el cobalto (véase su esquema de desintegración nuclear en la figura 10.10) polarizado a baja temperatura, confirmó experimentalmente que la paridad no se conserva en los procesos débiles. Se observó una asimetría respecto al espín del Co en la emisión de los electrones (70 % de los e^- son emitidos en la dirección opuesta a la del espín del ^{60}Co). Este experimento fue realizado por Mme. Wu[3] y colaboradores.

La violación de la paridad fue confirmada midiendo la desintegración del pión según el proceso (18.2). En este experimento se determinó que los neutrinos son sólo levógiros, es decir, con una sola proyección de espín. En efecto, en el parágrafo 16.5.1 ya se discutió esta desintegración. El espectro de energías del e^+, visible en la figura 16.7, refleja que son emitidos cerca de la energía máxima posible, lo que confirma la topología de la figura 18.5, que el positrón es emitido en dirección opuesta a los dos neutrinos. De esta forma, se comprueba que la polarización de espín es la indicada en la figura. En el experimento se comprobó que los muones están completamente polarizados con helicidad -1; el espín del muón debe ser opuesto a su vector momento: $\vec{p}_\mu$. Los muones se frenaron en carbono y al desintegrarse, se midió el espectro angular de los positrones obteniendo una forma compatible con la teoría V-A: $\frac{dN}{d\Omega} = 1 - \frac{1}{3}\cos\theta$. En la desintegración del μ^+, la configuración opuesta, dando lugar a un e^+ levógiro está suprimida y no se observa experimentalmente.

Figura 18.5: Observación de la violación de la paridad en la cadena de desintegración del $\pi \rightarrow \mu \rightarrow$ e. En esta figura, el vector $\rightarrow$ indica la dirección del momento y $\Rightarrow$ la de la proyección del espín (helicidad).

Otro de los experimentos que han estudiado las consecuencias de la violación de la paridad es el de M. Goldhaber[4] que midió la desintegración del ^{152} Eu (véase la figura 18.6), en el que determinó que el neutrino ν_e de 900 keV emitido tras captura electrónica del ^{152}Eu es levógiro, o sea con helicidad $\lambda = -1$, definida en (16.70), a partir de la polarización del γ de 963 keV de la figura. Este experimento, fue el primero en determinar que los neutrinos son levógiros además de confirmar también que se viola la paridad en la desintegración β del

^{152}Eu.

Las interacciones débiles también violan la conjugación de carga *C*, ya que aplicando la operación de simetría *C* a un neutrino (levógiro) se obtiene un antineutrino (levógiro) que no existe en la naturaleza. Sin embargo, la simetría *CP* es en principio buena, aunque en el caso de la desintegración del K^0 se ha observado una pequeña violación de la misma.

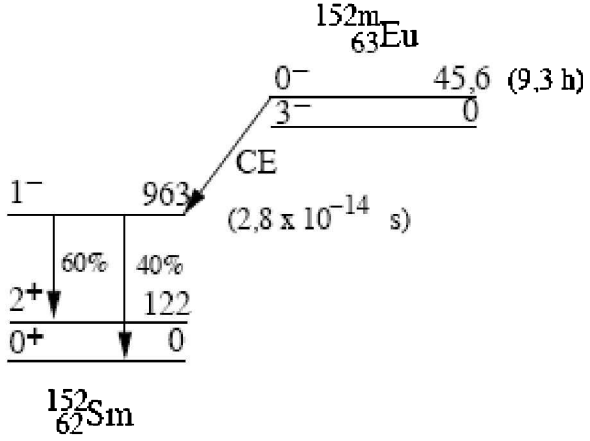


Figura 18.6: La desintegración beta del isómero $^{152}_{63}$Eu al estado excitado de 963 keV del $^{152}_{62}$Sm.

18.3 Teoría V-A de la desintegración beta

Ya se conocen loséxitos de la interacción V-A para explicar la desintegración beta de los núcleos. Ahora, a la vista de las predicciones del modelo estándar, se describen las desintegraciones de las partículas utilizando las mismas ideas.

El estudio cuantitativo de las interacciones débiles requiere la utilización de las soluciones de la ecuación de Dirac, $(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0$, descrita en el Apéndice E, de la que se obtiene $\psi(\mathbf{x})$ el llamado biespinor de Dirac, de cuatro componentes y en la que aparecen las matrices 4x4, γ de Dirac. En física de partículas es necesario recurrir a la ecuación de

Dirac debido a la naturaleza relativista de los procesos entre partículas. El biespinor de Dirac describe dos estados, uno de energía positiva y otro negativa: $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ asociados respectivamente a estados de partícula y antipartícula. Cada uno de estos espinores de dos componentes, describe los dos estados de polarización de las partículas de espín 1/2. Con esto, las partículas y antipartículas tienen las mismas propiedades (*M, J, …*) excepto las magnitudes electromagnéticas, (carga, momento magnético), que cambian de signo.

La hipótesis original de Fermi,[5]parte de la idea que la interacción débil es de la misma forma que la electromagnética, es decir corriente×corriente; tomando por ejemplo la difusión $e^- + p \longrightarrow e^- + p$, la amplitud de probabilidad de la transición es:

$$\mathcal{M}_{em} \propto \frac{e^2}{q^2} J_{\text{barión}} \cdot J_{\text{leptón}} \tag{18.8}$$

La corriente eléctrica en el formalismo de Dirac es de la forma:

$$j^\mu = -e\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p) \tag{18.9}$$

que, efectivamente, se transforma como un vector bajo las transformaciones de Lorentz y cumple la ecuación de continuidad.

La hipótesis de Fermi fue proponer una sencilla interacción puntual entre los cuatro fermiones, con una amplitud de probabilidad de transición parecida:

$$\mathcal{M}_w = G J^w_{\text{barión}} \cdot J^w_{\text{leptón}} = G(\overline{u}_p \mathcal{O} u_n)(\overline{u}_e \mathcal{O} u_\nu) \tag{18.10}$$

fijando el operador *O* como vectorial, con lo que la amplitud es un escalar Lorentz. La constante de Fermi tiene dimensiones de $(E)^{-2}$ (en el sistema SI se cumple que $G/(\hbar c)^3$ tiene dimensiones de E^{-2}); basta con comparar estaúltima expresión con (18.8)

Posteriormente, se encontró que había que incluir otro término (el axial) además del vectorial (recuérdese que Fermi no conocía la violación de la paridad); con este término se podían explicar las transiciones de Gamow-Teller. Así, en el caso de la desintegración beta del neutrón la hipótesis V-A da lugar al siguiente producto de corrientes:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{i=V,A} C_i (\overline{u}_p \mathcal{O}_i u_n)[\overline{u}_e \mathcal{O}_i (1-\gamma^5) u_\nu] \qquad (18.11)$$

en donde O_i representa en principio cualquier operador formado con las matrices γ, pero que experimentalmente se prueba que es una suma de un término vectorial y otro axial.

En la corriente leptónica se produce la denominada *violación máxima de la paridad*. En la corriente hadrónica, que describe hadrones que no son puntuales y cuyo comportamiento no es el de los leptones, se diferencia en que se introducen en principio dos constantes; C_V y C_A para incorporar dicha violación.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left\{ C_V \left[\overline{u}_p \gamma^\mu u_n) \right] \left[\overline{u}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\nu \right] + \right. \\ &\left. + C_A \left[\overline{u}_p i\gamma^\mu \gamma^5 u_n) \right] \left[\overline{u}_e i\gamma^\mu \gamma^5 (1-\gamma^5) u_\nu \right] \right\} \qquad (18.12) \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\overline{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5) u_n \right] \left[\overline{u}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\nu \right] \end{aligned}$$

con lo que la corriente hadrónica aparece con dos constantes, la vectorial y la axial, C_V y C_A, que permitió explicar las desintegraciones beta de los núcleos. La corriente leptónica refleja que sólo existe acoplamiento entre el neutrino levógiro y el leptón correspondiente.

La determinación de las constantes C_V y $C_A$se lleva a cabo midiendo los valores de la semivida comparativa de transiciones Fermi

superpermitidas ($^{14}O \rightarrow {}^{14}N + e^+ + \nu_e$), que son del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$ ysólo dependen de C_V y la semivida comparativa del neutrón, que depende de C_V y C_A, obteniendo:

$$\frac{(ft_{1/2})O}{(ft_{1/2})_n} = \frac{C_V^2 + 3C_A^2}{2C_V^2} = \frac{3100 \pm 20}{1080 \pm 16} \qquad (18.13)$$

con lo que se llega a un cociente:

$$|g_A| = \left|\frac{C_A}{C_V}\right| = 1{,}26 \pm 0{,}02 \qquad (18.14)$$

Otros experimentos permiten determinar que el signo es negativo, lo que dio origen al nombre de la teoría: V-A.

En definitiva, se podría escribir:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}}\left[\overline{u}_p \gamma^\mu (1 + g_A \gamma^5) u_n\right]\left[\overline{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\nu\right] \qquad (18.15)$$

obteniéndose;

$g_A = -1{,}26$ en el caso del barión $\quad n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$

$g_A = -0{,}69$ en el caso del hiperón $\quad \Lambda \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$

18.4 Fenomenología de las corrientes cargadas

Primero se abordan las desintegraciones de leptones y las de los hadrones (compuestos por quarks), interpretadas todas ellas como corrientes cargadas; más adelante se estudiarán las interacciones de neutrinos.

18.4.1 Acoplamiento del $W^\pm$ a los leptones

Las desintegraciones débiles cargadas tienen lugar por intercambio del bosón $W_{\pm}$, de espín $J = 1$. El vértice fundamental es el que explica el acoplamiento $W\ell\nu_\ell$ (el vértice superior de la figura 18.4**(a)**).

Las reglas de Feynman son las mismas que en QED excepto que ahora, la teoría V-A postula que el vértice W ν viene representado por el factor:

$$\boxed{\frac{-ig_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}\frac{1}{2}(1-\gamma^{5})} \qquad (18.16)$$

en donde se ha introducido la constante de acoplamiento (adimensional) débil $g_{\mathrm{W}}/\sqrt{2}$. Se observa que el bosón W sólo se acopla a leptones levógiros.

El propagador es el del bosón W:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu}-q_{\mu}q_{\nu}/M_{\mathrm{W}}^{2}c^{2})}{q^{2}-M_{\mathrm{W}}^{2}c^{2}}$$

Si se estima la amplitud a bajo q^2:

$$\mathcal{M}_{if}=g_{\mathrm{W}}\frac{1}{M_{\mathrm{W}}^{2}c^{4}-q^{2}c^{2}}g_{\mathrm{W}} \quad \underset{q\to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{g_{\mathrm{W}}^{2}}{M_{\mathrm{W}}^{2}c^{4}}$$

en donde se observa que a pequeño q^2, este término se simplifica y queda entendido el porqué deléxito de la hipótesis de interacción puntual de Fermi. En efecto, si se compara la constante de la teoría de Fermi, G, con la constante g_{W} utilizada en las expresiones anteriores, a pequeño q^2 puede escribirse la siguiente igualdad:

$$\boxed{\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{{g_{\mathrm{W}}}^2}{8(M_{\mathrm{W}}c^2)^2}(\hbar c)^3} \qquad (18.17)$$

Se estudian a continuación algunos ejemplos representativos.

La desintegración del $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$

La desintegración del leptón μ es históricamente la mejor conocida. Es un proceso de tipo puramente leptónico y el diagrama es el de la figura 18.7. El cálculo de la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo permite hallar la vida media del μ:

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \left(\frac{M_{\mathrm{W}}}{m_\mu g_{\mathrm{W}}}\right)^4 \frac{12\hbar(8\pi)^3}{m_\mu c^2}$$

Se trata de una desintegración en la que $m_\mu \ll M_{\mathrm{W}}$, con lo que se puede hacer el cálculo con la constante de Fermi:

$$\boxed{\tau_\mu = \frac{192\pi^3\hbar^7}{G^2 m_\mu^5 c^4}} \qquad (18.18)$$

y como $\tau_\mu = 2{,}2 \times 10^{-6}$ s, permite determinar:

$$\frac{G_\mu}{(\hbar c)^3} = (1{,}16632 \pm 0{,}00002) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \qquad (18.19)$$

lo que conduce a $g_{\mathrm{W}} = 0{,}66$ y por lo tanto se puede definir la constante de estructura débil

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{W}} = \frac{g_{\mathrm{W}}^2}{4\pi} = \frac{1}{29}} \qquad (18.20)$$

o sea, que la llamada interacción débil es debida a que $M_W$es grande, y porque la desintegración del μ pone en juego valores del momento transferido $q^2 << M_W^2 c^2$. De hecho cuando se da la condición $q^2 > (M_W c)^2$, entonces la interacción débil es más intensa que la electromagnética.

Desintegración del τ y universalidad e − μ − τ

Si se supone la misma constante de acoplamiento débil para todos los lep-tones, entonces en el caso de las desintegraciones del leptón τ se tendrá:

$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + e^- + \overline{\nu}_e$$
$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$
$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + \overline{u} + d$$

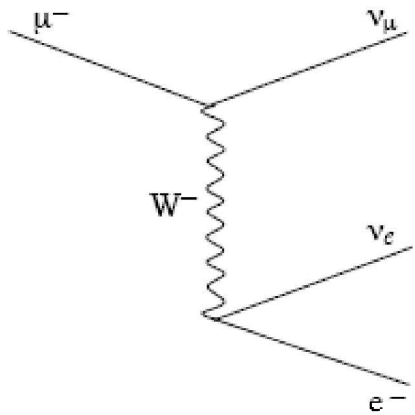


Figura 18.7: La desintegración débil del muón: $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$.

No puede acoplarse a otras familias de quarks $(\bar{c}s)$ ya que no tiene suficiente masa. Se verá sin embargo que sí es posible la desintegración $\overline{u}s$, y se comprenderá que las conclusiones obtenidas son correctas. De esta manera se debe cumplir:

$$\Gamma_{\tau\mu} \sim \Gamma_{\tau e} \qquad \text{y} \qquad \Gamma_{\tau \bar{u}d} \sim 3\Gamma_{\tau e}$$

en donde el factor 3 se debe a los tres grados de libertad de color de los quarks. Conocida la vida media del μ(τ_μ = 2,2 $\times 10^{-6}$ s), o sea $\Gamma_{\mu e} = \frac{\hbar}{\tau_\mu}$, se puede calcular:

$$\Gamma_{\tau e} = \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma_{\mu e} \tag{18.21}$$

luego,

$$\tau_\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_{\tau e} + \Gamma_{\tau\mu} + \Gamma_{\tau \bar{u}d}} \approx \frac{\tau_\mu}{5(m_\tau/m_\mu)^5} \sim 0.31 \times 10^{-12}\ \text{s}. \tag{18.22}$$

lo cual está de acuerdo con la existencia de tres colores, N_C = 3. Experimentalmente, puede verse en la tabla 18.1 que el valor actual de la vida media del τ no está muy lejos de esta sencilla estimación.

18.4.2 Acoplamiento del W± a los quarks

Como se ha visto, en el sector leptónico, la interacción $W\ell\nu_\ell$, no mezcla familias distintas de leptones. Por ello tiene lugar la conservación del número leptónico L_l. Además, se cumple el principio de universalidad por el que todos los acoplamientos en los procesos puramente leptónicos se explican con la misma constante de Fermi.

El estudio del acoplamiento de los bosones cargados W± a los quarks es más complejo que el caso de los leptones. Hay que tener presente que los quarks no existen en estado libre. Siempre están confinados en el interior de los hadrones. Para obtener información de los acoplamientos de los quarks al W± habrá que extraerla a partir de las medidas de las desintegraciones de los hadrones. Se tendrán que realizar aproximaciones, introduciendo factores que simplifiquen el tratamiento

de los quarks constituyentes.

En el caso de las desintegraciones de hadrones, se ha observado que pueden tener lugar transiciones entre quarks de distintas familias. Esto complica un poco más las corrientes cargadas en el sector de los quarks. El vértice fundamental es el de la figura 18.4(a). La primera cuestión es saber si la constante de acoplamiento débil de los quarks es la misma $g_W$que en el caso de los leptones. Para ello, hay que medir las desintegraciones semileptónicas de los hadrones. Cuando se mide la desintegración beta del neutrón, (transición d →u), la constante $g_W$es un 4 % más pequeña que la de los leptones, pero en las transiciones s →u, por ejemplo en la desintegración de partículas con un quark s (extrañas) como por ejemplo $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$ la constante es 20 veces más pequeña. Todo esto condujo a la hipótesis de Cabibbo,, para justificar la existencia del fenómeno llamado *mezcla de quarks* por el que los quarks que se acoplan al $W^{\pm}$ no son los estados de quarks de la interacción fuerte sino que el acoplamiento débil del $W^{\pm}$ a los quarks se explica mediante una combinación lineal (una mezcla).

En conclusión, los dos conceptos que se aplican para entender las corrientes cargadas de quarks son:

1) La simetría quark-leptón; quiere decir que los acoplamientos entre quarks de la misma familia son iguales a los acoplamientos leptónicos, o sea, $g_{ud} \sim g_{cs} \sim g_W$.

2) Las mezclas de quarks; es decir, existen acoplamientos entre familias (por ejemplo g_{su}; hecho que no tiene lugar en el sector leptónico).

La desintegración $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$

Si se calcula la desintegración β del neutrón con los mismos acoplamientos que en el caso del muón, se obtiene una vida media demasiado elevada τ_n = 1316 s, lo que significa que el vértice npW no puede ser tratado como puntual. Hay que reemplazarlo:

$$(1 - \gamma^5) \rightarrow (c_V - c_A \gamma^5)$$

introduciendo dos nuevas constantes c_A y c_V.

Sorprendentemente si se calcula el valor de estos parámetros se obtiene:

$$c_V = 1{,}000 \pm 0{,}003$$

lo que origina la llamada hipótesis CVC, corriente vectorial conservada, y

$$c_A = 1{,}26 \pm 0{,}02$$

que se asocia a la llamada hipótesis PCAC, de corriente axial parcialmente conservada con lo que la vida media del neutrón se reduce en un factor $\frac{1}{4}(c_V^2 + c_A^2) = 1{,}44$. Pero esta modificación no es suficiente. Habrá que estudiar las desintegraciones de los quarks para ver si son idénticas a la de los leptones. En efecto, hoy se sabe que la desintegración del neutrón es debida al cambio de sabor de uno de sus quarks: $d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$ como se aprecia en la figura 18.3 **a**). En este caso se determina el producto Gc_V. La hipótesis de Fermi de la universalidad de la interacción (débil) de cuatro fermiones implicaba que G, la constante de acoplamiento, debía ser la misma para todos los procesos.

Las primeras determinaciones precisas de la constante de Fermi se obtuvieron midiendo las transiciones nucleares superpermitidas de Fermi ($0^+ \rightarrow 0^+$), por ejemplo $^{14}O \rightarrow {}^{14}N + e^+ + \nu_e$, con $E_0 = 1{,}81$ MeV y $t_{1/2} = 70{,}6$ s. El cálculo teórico proporciona:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2 E_0^5}{30\pi^3}$$

y determina el valor de $G \approx 10^{-5}/m_N^2$.

La desintegración del neutrón, a través del estudio de las

desintegraciones β nucleares, mostró una ligera desviación de la hipótesis de universalidad, dando:

$$\frac{G_\beta}{(\hbar c)^3} = (1{,}136 \pm 0{,}003) \times 10^{-5} \quad \text{GeV}^{-2} \tag{18.23}$$

Nótese que aquí la constante de Fermi se ha denominado G_β, para distinguirla de G_μ obtenida en la desintegración puramente leptónica del muón, dada en (18.19). Hay una discrepancia del orden del 4 % entre las dos. Más adelante se verácómo todo esto fue resuelto gracias a la hipótesis de Cabibbo.

Desintegración del $\pi^- \to l^- + \overline{\nu}_e$

La desintegración del π^- se explica mediante el diagrama de la figura 18.3 **b**). Ahora el factor desconocido será el del vértice πW, que se factoriza por un factor de forma:

$$F^\mu = f_\pi q^\mu \tag{18.24}$$

siendo q^μ el cuadrimomento del W intercambiado $(q^\mu = p_e^\mu + k_\nu^\mu)$ de forma que el elemento de matriz es:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\overline{u}_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_e] F^\mu \tag{18.25}$$

La constante f_π, introducida en la anterior expresión (18.24), se denomina constante de desintegración del pión, y contiene la información $|\Psi(0)|^2$, desconocida, que representa la probabilidad de aniquilación de los quarks ud que constituyen el pión.

Al calcular la probabilidad de desintegración, utilizando las reglas de Feynman se obtiene:

$$\Gamma_\pi = \frac{G^2}{8\pi}\frac{f_\pi^2}{\hbar m_\pi^3} m_\ell^2 \left(m_\pi^2 - m_\ell^2\right)^2 \qquad (18.26)$$

Al no conocerse f_π, no se puede calcular la vida media del pión, pero sí se puede evaluar el cociente:

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow \ e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \ \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = 1{,}28 \times 10^{-4}$$

encontrándose que la supresión del modo de desintegración $e^-\overline{\nu}_e$ es debida a la conservación de helicidad. Este cociente, que por cinemática (espacio fásico) debería ser mucho mayor, es una prueba de que efectivamente la interacción es V-A. En el límite $m_e \rightarrow 0$, la desintegración $\pi^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e$ no tendría lugar.

La helicidad del e^- es la errónea, como puede apreciarse si se observa el esquema de desintegración en el centro de masas del pión.

Tomando el valor de G conocido y fijando $f_\pi = m_\pi$, se obtiene casualmente la vida media experimental del pión.

Desintegración de partículas extrañas. Hipótesis de Cabibbo

Un ejemplo de que los quarks sí que se desintegran en quarks de distinta generación, es el de las partículas extrañas:

$$\Lambda^0 \rightarrow \ p + e^- + \overline{\nu}_e \qquad (18.27)$$

Si no fuese así, ¡el K^0 yel B^0 serían mesones estables!

En la figura 18.8 se puede comparar la desintegración del neutrón con la del Λ^0. Así pueden distinguirse dos tipos de procesos:

a) corrientes débiles que no cambian la extrañeza, $\Delta S = 0$, y

b) corrientes débiles que cambian la extrañeza, o sea transportan $\Delta S = 1$.

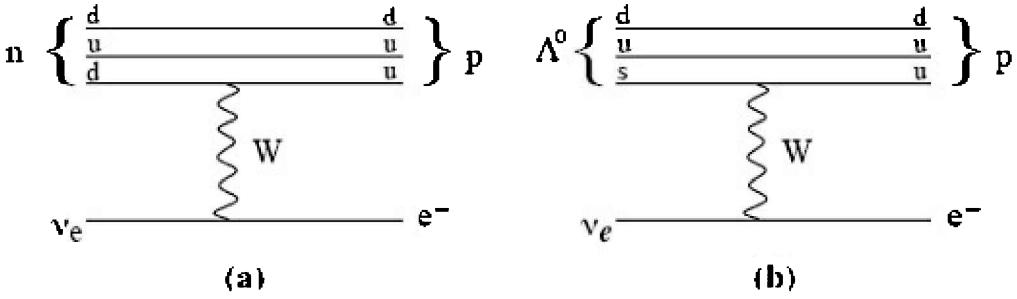


Figura 18.8: Diagramas de desintegración del neutrón y del Λ^0. **(a)** El del neutrón es un proceso de corriente débil sin cambio de extrañeza ($\Delta S = 0$) y es favorecido por el factor cos θ_C mientras que **(b)** la desintegración del Λ^0 es un proceso suprimido por el factor sin θ_C y se explica como una corriente débil con cambio de extrañeza ($\Delta S = 1$).

Al calcular la probabilidad de desintegración del $K^- \rightarrow l^- + \overline{\nu}_e$:

$$\Gamma_K = \frac{G^2}{8\pi} \frac{f_K^2}{\hbar m_K^3} m_\ell^2 \left(m_K^2 - m_\ell^2\right)^2 \qquad (18.28)$$

se obtuvo una probabilidad 20 veces más grande que la esperada. Se puso asíde manifiesto que los quarks no se acoplaban con la misma constante de acoplamiento universal que los leptones, sino que aparecía una combinación lineal (rotación) de los mismos que explicó la teoría de Cabibbo.[6]Todo pasa como si en vez de acoplamientos idénticos entre quarks de la misma familia, sus acoplamientos se modifican. La teoría de Cabibbo supone que los quarks que sufren interacción débil son una superposición de los estados de los quarks de la inter-acción fuerte.

Paralelamente, una fuerte inconsistencia entre el valor experimental de $\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)$ respecto a $\Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-)$ (véase la figura 18.9) obligóa postular la existencia de un nuevo quark en 1970 por Glashow, Illiopoulos y Maiani (que fue bautizado com mecanismo GIM), que cuatro años más tarde fue descubierto, indirectamente, al descubrirse el mesón J/ψ. El quark c (encanto), permitió que los diagramas de Feynman se cancelaran, explicando el pequeño valor del cociente de

desintegración $BR(K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = (7{,}4 \pm 0{,}4) \times 10^{-9}$. Incluso el pequeño valor no nulo, permitió predecir una masa del quark c aproximada. Al descubrir el quark c, pudo entenderse el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_C + s\sin\theta_C \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} c \\ -d\sin\theta_C + s\cos\theta_C \end{pmatrix} \qquad (18.29)$$

apareciendo una nueva constante, θ_C, elángulo de Cabibbo, que explica el valor real del acoplamiento entre distintas familias. Así, el acoplamiento ud o cs debe multiplicarse por cos $\theta_C$mientras que las desintegraciones de las partículas extrañas o encantadas a través de acoplamientos us o cd deben multiplicarse por sin θ_C, con lo que las probabilidades se modifican en un factor $\cos^2\theta_C$ o $\sin^2\theta_C$.

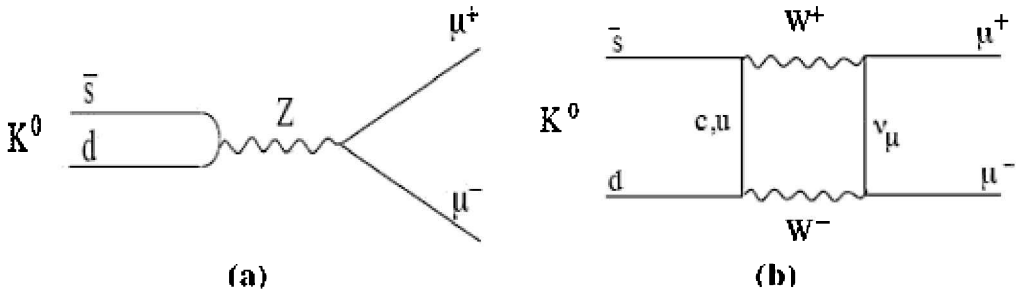


Figura 18.9: Diagramas de desintegración del K^0. **(a)** Diagrama suprimido de la desintegración $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$. Este proceso no está permitido ya que el Z^0 no mezcla familias de quarks, sólo se acopla a $q\bar{q}$: quarks del mismo sabor; **(b)** Diagrama tipo *box* para la desintegración $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$, permitido, pero de segundo orden en corrientes cargadas. De ahí la enorme diferencia con las desintegraciones de kaones cargados.

Los datos experimentales son consistentes con unángulo de Cabibbo cuyo valor es:

$$\boxed{\theta_C \sim 13^\circ} \qquad (18.30)$$

luego, las amplitudes proporcionales a $\cos\theta_C$ (= 0,98) tienen mayor probabilidad o están muy favorecidas respecto a las que son proporcionales a $\sin\theta_C$ (= 0,22), que por ello se denominan suprimidas Cabibbo. Siguiendo a Cabibbo, el cociente:

$$\frac{\Gamma(K^- \to \ell^- + \overline{\nu}_\ell)}{\Gamma(\pi^- \to \ell^- + \overline{\nu}_\ell)} = \tan^2\theta_C \left(\frac{m_\pi}{m_K}\right)^3 \left(\frac{m_K^2 - m_\ell^2}{m_\pi^2 - m_\ell^2}\right)^2 \qquad (18.31)$$

donde se ha supuesto que $f_K \sim f_\pi$, lo que sin ser muy exacto, permite reproducir un buen acuerdo con los resultados experimentales.

La conclusión es que desde el punto de vista de la desintegración débil, los quarks que interaccionan son las parejas:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \qquad (18.32)$$

en donde los quarks prima son los transformados por la rotación de Cabibbo:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \qquad (18.33)$$

Ello quiere decir en particular que el acoplamiento Wcd tendrá una amplitud multiplicada por un factor $-\sin\theta_C$ yelvértice Wcs, por un factor $\cos\theta_C$.

Mezclas de quarks. La matriz CKM

Está bien establecido que las mezclas de quarks van acompañadas de las siguientes reglas aplicables a las desintegraciones de los hadrones:

1) En las desintegraciones semileptónicas se cumple:

$$\begin{cases} \Delta S = 0 \Longrightarrow \Delta Q = \pm 1 \\ \Delta S = \Delta Q = \pm 1 \qquad (\Delta S = -\Delta Q \text{ prohibido}) \end{cases}$$

Así se entiende que $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \overline{\nu}_e$ se observa con una fracción $1{,}017 \times 10^{-3}$, mientras que la desintegración $\Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ no se observa (el límite experimental es $< 5 \times 10^{-6}$). En efecto el hiperón Σ^+, cuya estructura de quarks es (uus) no puede desintegrarse yendo a n, que tiene una composición (udd), con la emisión de unúnico W. Es, por lo tanto, un proceso de segundo orden, poco probable.

La conclusión más importante es que existe una regla:

$$\mathbf{\Delta S = \Delta Q}$$

cuando hay cambio de extrañeza.

2) En las desintegraciones hadrónicas $\Delta S = 0, \pm 1$. Un ejemplo de desintegración con cambio de extrañeza, o sea del tipo $\Delta S = 1$ (que se acompaña de la regla $\Delta I = 1/2$) es el de la desintegración del hiperón Λ^0, cuya fracción de desintegración:

$$\frac{\Lambda^0 \rightarrow \ n\pi^0}{\Lambda^0 \rightarrow \ p\pi^- + \Lambda^0 \rightarrow \ n\pi^0} = 0{,}345$$

sólo teniendo en cuenta el valor de los coeficientes de Clebsch-Gordan (véase Apéndice F.8). Experimentalmente se obtiene un valor 0,358 ±0,005, compatible con la predicción.

3) En las desintegraciones débiles, los procesos FCNC (*flavor changing neutral currents*) están muy suprimidos, como demostró el mecanismo GIM. En efecto, las transiciones debidas al intercambio de Z^0(corrientes neutras) no cambian el sabor de los quarks.

Hoy se sabe que hay tres familias de quarks, y las interacciones débiles se explican generalizando la idea de Cabibbo, de forma que los acoplamientos entre quarks se obtienen a partir de la rotación contenida en la matriz unitaria 3x3, $\mathcal{U}$, de Kobayashi-Maskawa:[7], que se conoce por el nombre de matriz CKM, de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}' \\ \mathrm{s}' \\ \mathrm{b}' \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{18.34}$$

El modelo estándar no predice esta mezcla. Este es uno de los puntos inexplicados por el modelo. Sin esta mezcla no se pueden entender los resultados experimentales. El valor medio de los elementos de matriz determinado experimentalmente es:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}22 & 0.004 \\ 0{,}22 & 0{,}97 & 0.04 \\ 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}99 \end{pmatrix} \tag{18.35}$$

La transición entre los quarks $q \rightarrow q'$ es proporcional a los elementos de matriz $|V_{qq'}|^2$. Los elementos de la diagonal representan transiciones entre quarks de la misma familia; las transiciones entre quarks de la 3.*a* a la 2.*a* familia están suprimidas por unos dosórdenes de magnitud respecto a las transiciones de la 2.*a* a la 1.*a* familia.

Utilizando un método similar al de la mezcla de neutrinos vista en (18.6), los resultados de una multitud de experimentos que miden la desintegración de mesones, permiten obtener los siguientes valores de mezcla:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_{12} &= 0,2229 \pm 0{,}0022 \\ \sin^2\theta_{23} &= 0,0412 \pm 0{,}0002 \\ \sin^2\theta_{13} &= 0,0036 \pm 0{,}0007 \end{aligned}$$

que equivalen a losángulos de mezcla θ_{12} = 12,9°, θ_{23} = 2,4°, θ_{13} = 0, 2°, que son mucho más pequños que losángulos de mezcla en el sector de los neutrinos. Obsérvese que θ_{12} es elángulo de Cabibbo (18.30).

En conclusión, introduciendo los operadores de subida (J^{μ}) y bajada (J^{+}_{μ}) de carga en el sector puramente leptónico:

$$J^{\mu} = \frac{-ig_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}} \overline{u}_{\nu_\ell} \gamma^{\mu} \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_\ell \qquad \text{y} \qquad J^{+}_{\mu} = \frac{-ig_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}} \overline{u}_{\ell} \gamma_{\mu} \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_{\nu_\ell}$$

que debido a la mezcla de quarks toma la siguiente forma en el sector de los quarks:

$$J^{\mu} = \frac{-ig_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}} (\,\overline{\mathrm{u}}\;\overline{\mathrm{c}}\;\overline{\mathrm{t}}\,)\gamma^{\mu} \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\mathcal{U} \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

la forma V-A de las corrientes cargadas queda descrita por el elemento de matriz:

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^{\mu} J^{+}_{\mu}} \qquad (18.36)$$

La constante de Fermi, *G*, está relacionada con la masa del bosón W através de la relación vista más arriba:

$$\boxed{\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{{g_{\mathrm{W}}}^2}{8(M_{\mathrm{W}}c^2)^2}(\hbar c)^3} \qquad (18.37)$$

18.4.3 Interacciones de neutrinos

Los neutrinos son losúnicos constituyentes fundamentales que sólo sienten la interacción débil. Ya se ha visto que las corrientes cargadas acoplan a cada leptón con su neutrino. Esta es la razón por la que el número leptónico es un buen número cuántico que se conserva en todos los procesos débiles.

Desde los años 1960, se han diseñado haces intensos de neutrinos en el CERN, Fermilab (EEUU) y Serpukhov (Rusia). El método se ha basado

en la utilización de haces secundarios de piones y kaones a partir de colisiones de protones primarios sobre un blanco. La figura 18.10 ilustra el método empleado.

Los protones de alta energía (400 GeV en el caso del CERN) inciden en un blanco *T*. Por medio de dipolos, cuadrupolos y colimadores se seleccionan piones y kaones de una carga determinada y se les envía a un túnel en el que una porción de ellos se desintegran ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \pi^- \rightarrow \mu^- \overline{\nu}_\mu$). Los muones se frenan gracias a un inmenso bloque de hierro, mientras que los neutrinos pueden observarse en el detector. Se trata de haces de ν_μ *o* $\overline{\nu}_\mu$, según que se seleccionen piones/kaones positivos o negativos respectivamente. Se espera una pequeña contaminación del 0,5 % de $\nu_e$debido a las desintegraciones del $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$. Se obtienen intensidades del orden de 10^8 neutrinos por *burst* del acelerador. Entre los resultados más destacados de los experimentos con haces de neutrinos se encuentran los siguientes:

- En 1961, se logró por primera vez demostrar que ν_e y ν_μ tienen propiedades distintas. Son, efectivamente, dos neutrinos diferentes.

- En 1973, se descubrieron por primera vez interacciones de ν_μ sin leptón cargado en el estado final, que se denominaron *corrientes neutras*.

- Se dispone de un programa de medidas de secciones eficaces de inter-acción de neutrinos y antineutrinos con los nucleones.

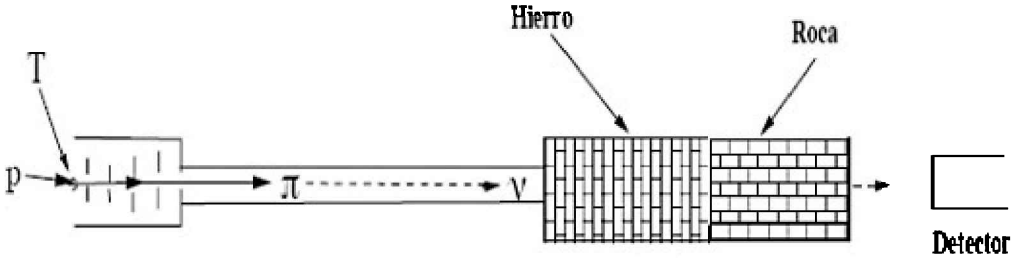


Figura 18.10: Esquema del haz de neutrinos del CERN. El túnel de desintegración de piones y kaones tiene unos 300 metros de longitud, seguidos de un bloque de hierro de 200 metros más 150 metros de roca.

En la figura 18.11 se puede observar que las secciones eficaces de colisión de neutrinos y de antineutrinos con los nucleones son constantes con la energía en un amplio rango que se extiende hasta una energía de 250 GeV. En efecto, según la teoría V-A la sección eficaz es:

$$\sigma_{\nu_\mu} = \frac{G^2}{\pi(\hbar c)^4} s \qquad (18.38)$$

con $s = 2m_e c^2 E_\nu$, la energía al cuadrado en el centro de masas. De estos resultados se desprende que los nucleones están compuestos por entes puntuales (los partones), con los que el neutrino colisiona elásticamente. En efecto, la dependencia de las secciones eficaces neutrino nucleón con la energía es la misma que la de las secciones eficaces elásticas entre constituyentes como se verá a continuación.

La figura 18.12, muestra claramente el proceso de la interacción de un neutrino (o antineutrino) con un nucleón. Se observa un proceso $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$, donde X denota un conjunto de hadrones resultado de la *fragmentación* de los quarks. La presencia del μ^- señala que la interacción es por intercambio de W^-, o sea un proceso tipo corriente cargada.

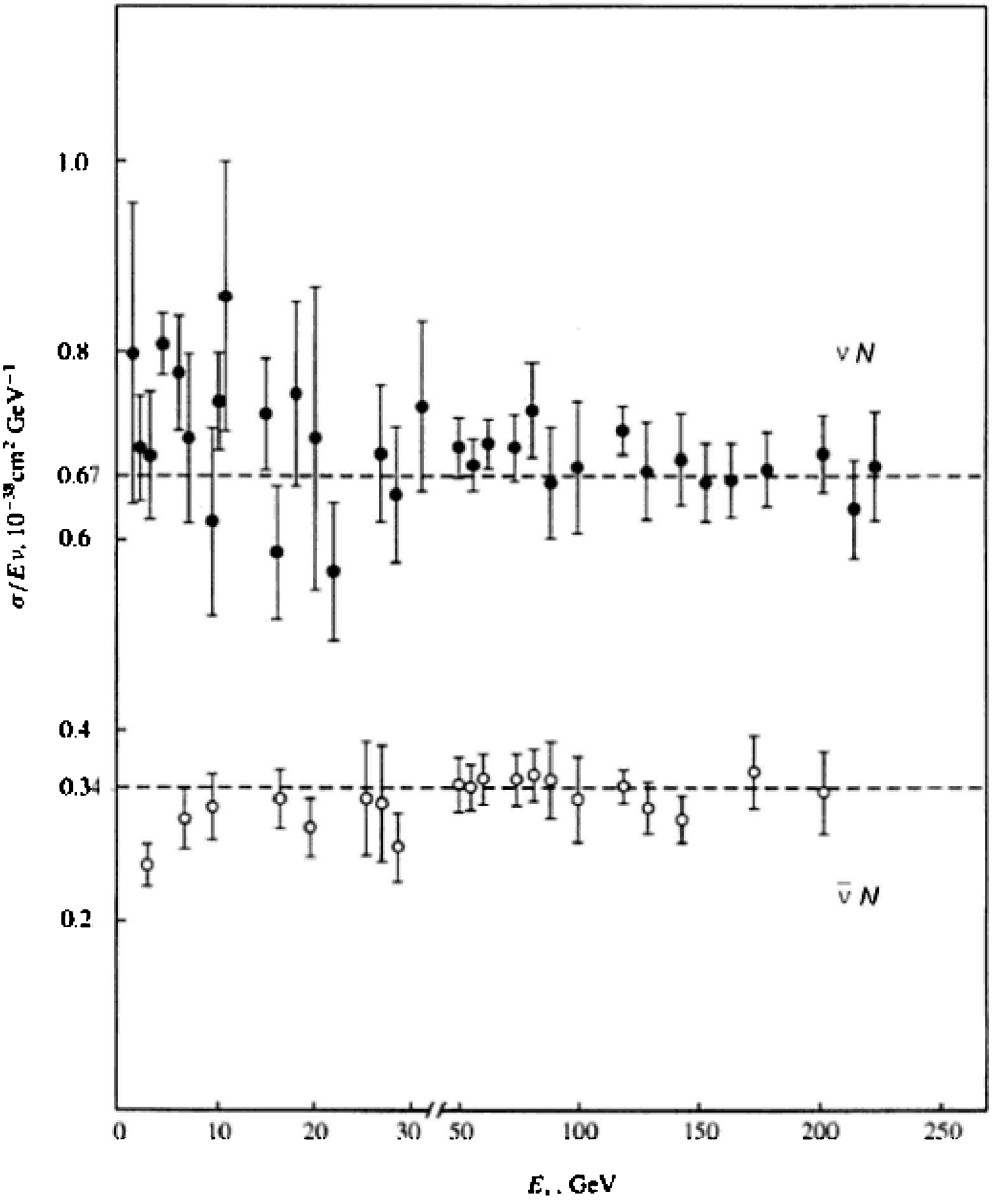


Figura 18.11: Sección eficaz total de interacción $\nu_\mu N$ y $\overline{\nu}_\mu N$, obtenida gracias a los haces de neutrinos en el CERN, Fermilab y Serpukhov. Se observa que las medidas de σ_ν son constantes con la energía, lo que confirma que la naturaleza de la interacción es puntual.

Corrientes cargadas $\nu + e^-$

Los procesos:

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \qquad \text{y} \qquad \overline{\nu}_e + e^- \rightarrow \overline{\nu}_e + e^-$$

pueden tener lugar por medio de una corriente cargada. Por supuesto, estos procesos pueden también tener lugar por corriente neutra, como se estudiará más adelante. Uno de los diagramas de interacción de corrientes cargadas de estos últimos procesos puede verse en la figura 18.13 a).

Para el proceso $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$, se tiene:

$$\boxed{\sigma_{\nu_e + e} = \frac{G^2}{\pi(\hbar c)^4} s} \qquad (18.39)$$

que crece linealmente con el cuadrado de la energía, *s*. Sin embargo, en la reacción elástica con antineutrinos: $\overline{\nu}_e + e^- \rightarrow \overline{\nu}_e + e^-$, la sección eficaz es tres veces menor:

$$\boxed{\sigma_{\overline{\nu}_e + e} = \frac{G^2}{3\pi(\hbar c)^4} s} \qquad (18.40)$$

debido a que la helicidad no es la correcta. En efecto, el neutrino y el e^- que acoplan al W son levógiros. Si se supone una colisión frontal en el centro de masas, $\nu_e + e^-$ no cambia la helicidad después del choque, mientras que en el caso $\overline{\nu}_e + e^-$, sí cambia, por lo que esteúltimo caso no está permitido y la sección eficaz será menor.

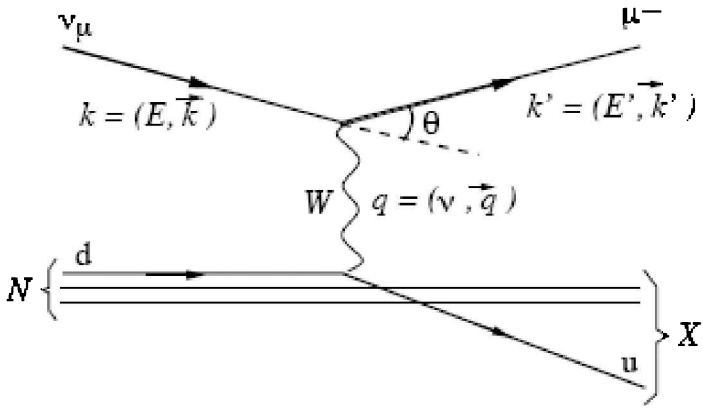


Figura 18.12: Explicación de la interacción $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- + X$, como debida a una inter-acción elástica ν_μ + quark, con gran transferencia de momento.

Reacción $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$

En la figura 18.13 b), se muestra el diagrama de Feynman de la reacción $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$. Es una reacción puramente leptónica y sólo puede tener lugar por corriente cargada; es decir, que tiene lugar por intercambio del bosón W, cargado. La sección eficaz, al aplicar la regla de oro de Fermi, es la misma que las anteriores:

$$\sigma_{\nu_\mu + e} = \frac{G^2}{3\pi(\hbar c)^4} s$$

En las anteriores expresiones se ha tenido en cuenta la interacción puntual de Fermi. Pero la teoría V-A predice secciones eficaces divergentes. De hecho la teoría ondulatoria de la difusión predice secciones eficaces $\sigma = \frac{\pi \lambda^2}{2}$ asintóticamente varían como $1 \frac{1}{p^{\star 2}}$, siendo p el momento en el centro de masas de la reacción. Estas divergencias quedan resueltas en la teoría *GW S*, que predice una sección eficaz:

$$\sigma_{\nu_\mu e} = \frac{G^2}{3\pi(\hbar c)^4} \cdot \frac{M_W^2 c^4}{M_W^2 c^4 + s} \cdot s \qquad (18.41)$$

y que, a alta energía, ya no aumenta linealmente sino que tiende a una constante.

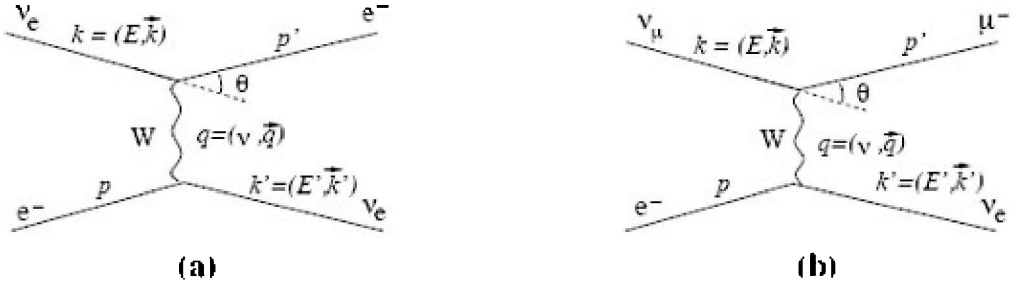


Figura 18.13: Diagramas de Feynman de interacciones de neutrinos con electrones por intercambio de $W^{\pm}$ (corrientes cargadas) (a) interacción elástica $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ y (b) interacción $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$.

18.5 Fenomenología de las corrientes neutras

Hasta 1973 no se descubre una interacción débil neutra, es decir mediada por el bosón Z^0:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

que es la difusión elástica $\nu_\mu + e^-$, cuyo diagrama de Feynman es el de la figura 18.14 y cuyo acoplamiento es muy similar, aunque ligeramente distinto al caso de las corrientes cargadas; en realidad procede por intercambio del bosón Z^0, es decir una interacción de tipo corriente débil neutra. En el mismo experimento del CERN (en la cámara de burbujas Gargamelle), también se detectaron reacciones débiles neutras pero inelásticas: $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$, que se producían $\frac{1}{3}$ de veces respecto a las cargadas. $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^+ + X$. Los mismos fenómenos se han detectado con

neutrinos en vez de antineutrinos.

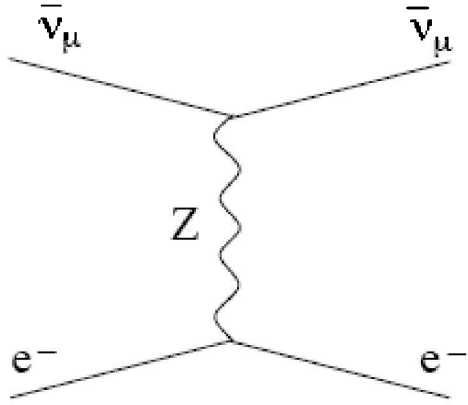


Figura 18.14: La interacción débil elástica $\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-$, que sólo procede por inter-cambio del bosón Z^0.

Además del suceso elástico $\nu_\mu + e^-$anterior, también se descubren inter-acciones de neutrinos por corrientes neutras:

$$\nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + X$$

donde X representa un sistema hadrónico que cumple todas las reglas de selección y que se producen con una intensidad parecida a las interacciones por corriente cargada bien establecidas hasta entonces:

$$\nu_\mu + N \longrightarrow \mu^- + X \qquad (18.42)$$

La medida del cociente:

$$\frac{\sigma(\nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + X)}{\sigma(\nu_\mu + N \longrightarrow \mu^- + X)} = 0{,}25 \qquad (18.43)$$

que con haces de antineutrinos resulta ser:

$$\frac{\sigma(\overline{\nu}_\mu + N \longrightarrow \overline{\nu}_\mu + X)}{\sigma(\overline{\nu}_\mu + N \longrightarrow \mu^+ + X)} = 0{,}45 \qquad (18.44)$$

O sea, los procesos por intercambio de Z^0 poseen un acoplamiento débil muy parecido, aunque no idéntico, a los de intercambio de $W^\pm$.

La explicación de la interacciones débiles por intercambio de $W^\pm$ y Z^0 la ha resuelto magistralmente la teoría de Glashow, Weinberg y Salam, construida por los a˜nos 1960. Esta teoría contenía entonces tres predicciones que se confirmaron experimentalmente de forma brillante:

- La existencia del bosón Z^0; o lo que es lo mismo la predicción de las corrientes débiles neutras.
- La existencia del cuarto quark: el quark c (*charm*).
- Las masas de los bosones $W^\pm$ y Z^0.

Además, hay que tener presente que esta teoría es una teoría unificadora de la interacción electromagnética y débil, lo cual es un gran salto hacia la unificación de todas las fuerzas de la naturaleza.

18.5.1 Interacciones débiles neutras

Ya se ha visto que en el marco de la teoría V-A, el acoplamiento con el $W^\pm$es puro V-A, acopla dobletes levógiros, mezcla familias de quarks y es de la forma:

$$\boxed{\frac{-ig_W}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)} \qquad (18.45)$$

mientras que con el Z^0, no mezcla familias de quarks pero no es puro V-A y se postula que es:

$$\boxed{\frac{-ig_Z}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(v^f - a^f\gamma^5)} \qquad (18.46)$$

apareciendo, por simetría, la constante g_Z del acoplamiento neutro. En principio se introducen dos nuevas constantes *a* y *v*, la vectorial y la axial, que no tienen por qué ser necesariamente iguales para los dos bosones.

Afortunadamente, en la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam todos estos parámetros están relacionados a través de unúnico parámetro: el ángulo de mezcla débil θ_W también llamado comúnmente elángulo de Weinberg, cuyo valor es:

$$\boxed{\sin^2 \theta_W = 0{,}2319 \pm 0{,}0005} \qquad (18.47)$$

habiendo sido determinado por numerosos experimentos. Corresponde a unángulo $\theta_W = 28{,}7^\circ$.

El modelo de la interacción electrodébil (*GW S*) predice las siguientes relaciones entre las masas de los bosones intermediarios:

$$\boxed{M_W = M_Z \cos \theta_W} \qquad (18.48)$$

o sea que $\sin^2 \theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$.

También predice las siguientes relaciones entre las constantes de acoplamiento, que constituyen la llamada condición de unificación:

$$\boxed{g_W = \frac{g_e}{\sin \theta_W}} \quad \text{y} \quad \boxed{g_Z = \frac{g_e}{\cos \theta_W}} \qquad (18.49)$$

en donde g_e es el equivalente de la carga eléctrica.

El valor de las constantes de acoplamiento *a* y *v* para los constituyentes elementales predichos por la teoría electrodébil se

resumen en la tabla 18.2 y como puede verse, las constantes v dependen delángulo de mezcla θ_W. Como se ve, hay tres familias que forman dobletes levógiros y singletes dextrógiros. El isospín débil I^W los caracteriza. Se observa que $v^f = a^f - 2z_f \operatorname{ssin}^2\theta_W$ y que a^f no es más que I_3^f, la tercera componente del isospín débil del fermión f.

Tabla 18.2: Acoplamientos en el modelo electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam de los fermiones al bosón Z^0.

fermión, f	I_3^f	v^f	a^f
$\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau$	$+1/2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e_L^- \quad \mu_L^- \quad \tau_L^-$	$-1/2$	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$	$-\frac{1}{2}$
$e_R^- \quad \mu_R^- \quad \tau_R^-$	0	$+2\sin^2\theta_W$	0
$u_L \quad c_L \quad t_L$	$+1/2$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W$	$\frac{1}{2}$
$d'_L \quad s'_L \quad b'_L$	$-1/2$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$	$-\frac{1}{2}$
$u_R \quad c_R \quad t_R$	0	$-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W$	0
$d'_R \quad s'_R \quad b'_R$	0	$+\frac{2}{3}\sin^2\theta_W$	0

No se han detectado cambios de sabor en corrientes neutras implicando que el intercambio de Z^0 no mezcla familias de quarks ni tampoco mezcla familias de leptones.

Se predice también una relación entre las cargas eléctricas de los quarks y los leptones, que se deriva de la invariancia *gauge* de la teoría y que se denomina condición de anomalía:

$$\sum_\ell Q_\ell + 3\sum_i Q_i = 0 \qquad (18.50)$$

extendiéndose la suma sobre todos los sabores i = u, d, s… Esta relación

confirma la simetría entre quarks y leptones, aunque no aclara cuál es el número de familias.

18.6 Los bosones intermediarios W y Z

El modelo estándar de las interacciones electrodébiles predice la existencia de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, y da un valor para sus masas:

$$M_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G}$$
$$M_W = M_Z \cos\theta_W \qquad (18.51)$$

en función de las constantes de estructura α, deFermi G ydelángulo de mezcla débil θ_W.

La producción de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, se logró inicialmente en las reaciones:

$$\begin{aligned} p + \overline{p} &\longrightarrow W^+ + X^- \\ p + \overline{p} &\longrightarrow W^- + X^+ \\ p + \overline{p} &\longrightarrow Z^0 + X^0 \end{aligned} \qquad (18.52)$$

en donde X $W^{\pm}$ y X^0, son estados multihadrónicos arbitrarios, permitidos por las leyes de conservación. En realidad el proceso elemental que tiene lugar es a través de colisiones qq. También es posible producir los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 encolisionadores e^+ e^-, pero hace falta una energía $\sqrt{s} \geq M_Z c^2$ en el caso del Z^0 o $\sqrt{s} \geq 2M_W c^2$, en el caso de los bosones cargados ya que en esteúltimo caso se trata de producción asociada.

Desde el a˜no 1989 la producción del Z ha sido posible en los colisionadores e^+e^-, LEP, del CERN y en el SLC de Stanford, y desde 1996 ya se tuvo suficiente energía en el LEP para producir la reacción

$e^+ + e^- \longrightarrow W^+ + W^-$. Hasta entonces, la producción de los bosones tuvo lugar en los colisionadores pp vía los procesos:

$$\left.\begin{matrix} u\bar{u} \\ d\bar{d} \end{matrix}\right\} \longrightarrow Z^0 \qquad\qquad \begin{matrix} d\bar{u} \longrightarrow W^- \\ u\bar{d} \longrightarrow W^+ \end{matrix}$$

Se verámás adelante que los quarks (de valencia) en un protón transportan una fracción $\langle x_v \rangle \sim 0{,}12$ del momento; los quarks del mar transportan una fracción $\langle x_s \rangle \sim 0{,}04$. Por ello, es posible producir un bosón Z^0 en el caso de colisiones protón-protón pero la energía del protón en ese tipo de colisionador debe ser como mínimo:

$$\sqrt{\hat{s}} \sim \sqrt{\langle x_u \rangle \langle x_{\overline{u}} \rangle \cdot s} = 2\sqrt{0{,}12 \times 0{,}04} \cdot E_p \Longrightarrow E_p \approx 600\ \text{GeV}$$

por ello es más fácil producir los bosones intermediarios en un colisionador protón-antiprotón. Los antiquarks del antiprotón llevan más energía.

A finales de los a˜nos 1970, Carlo Rubbia, físico del CERN (Ginebra) y Simon Van der Meer, ingeniero de aceleradores de dicho centro de investigación, propusieron la modificación del acelerador de protones *SpS* del CERN, que hasta entonces funcionaba conéxito acelerando protones hasta una energía de 270 GeV, en un colisionador protón-antiprotón, llamado $Sp\overline{p}S$. El problema técnico radicaba en crear y acelerar el suficiente número de antiprotones para que en los cruces de haces p $\overline{\text{p}}$ se produjeran un número suficiente de reacciones.

El proyecto funcionó. Se obtuvo una luminosidad suficiente. Todo ello a pesar de que no toda la energía de la colisión (540 GeV) puede estar disponible para producir los bosones intermediarios. En efecto, hay que tener en cuenta que debido a que el protón (antiprotón) tiene tres quarks constituyentes que se reparten entre ellos aproximadamente la mitad de la energía de la colisión p $\overline{\text{p}}$; se sabe que la energía disponible en una colisión $q\ \overline{q}$ es de unos 90 GeV, justo la necesaria para producir los

bosones intermediarios.

Los bosones intermediarios de la teoría electrodébil fueron posteriormente observados en los experimentos UA1 y UA2 del CERN. En 1984, C. Rubbia y S. Van der Meer obtuvieron el Premio Nobel de Física por este importante descubrimiento.

Los bosones, producidos a través de la colisión $q\,\overline{q}$ (quarks presentes en el protón y antiprotón) fueron detectados gracias a su desintegración a través de los canales:

$$\begin{aligned} &W \rightarrow e\nu_e,\ \mu\nu_\mu,\ \tau\nu_\tau \\ &Z \rightarrow e^+e^-,\ \mu^+\mu^- \end{aligned} \qquad (18.53)$$

Por ejemplo, el proceso de formación y posterior desintegración de un W^+, sigue una ley de Breit-Wigner, como en el caso de las resonancias hadrónicas, con una sección eficaz:

$$\sigma(\overline{d}u \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e) = \frac{(2J+1)}{3N_c}\frac{4\pi\lambda^2\Gamma_{\overline{d}u}\Gamma_{e\nu_e}/4}{(2s_d+1)(2s_u+1)\left[(E-M_W)^2+\Gamma^2/4\right]}$$

donde $N_c = 3$ es el número de colores de los quarks, $\lambda = 2/E$, $\Gamma_{\overline{d}u}$ y $\Gamma_{e\nu_e}$ las anchuras parciales de desintegración, Γ la anchura total del W y la multiplicidad de espín del W^+ es $\frac{(2J+1)}{3} = 1$, que da lugar a una sección eficaz en el

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi}{3M_W{}^2}\frac{\Gamma_{\overline{d}u}\Gamma_{e\nu_e}}{\Gamma^2} = \frac{4\pi}{81M_W^2} = 9{,}3\ \text{nb} \qquad (18.54)$$

ya que $\Gamma_{\overline{d}u}/\Gamma = 1/3$ y $\Gamma_{e\nu_e}/\Gamma = 1/9$.

De hecho, como se ha visto, el experimento consiste en estudiar las colisiones p $\overline{p}$ a 540 GeV. A esta energía la sección eficaz total de colisión es:

$$\sigma_{\text{tot}}(\text{p}\overline{\text{p}}) = 40 \text{ mb}$$

mientras que los bosones buscados tienen secciones eficaces de producción del orden:

$$\begin{aligned} \sigma(\text{p}\overline{\text{p}} \rightarrow \text{W}^{\pm} \rightarrow \text{e}\nu_{\text{e}}) &\sim 1 \text{ nb} \\ \sigma(\text{p}\overline{\text{p}} \rightarrow \text{Z}^0 \rightarrow \text{e}^+\text{e}^-) &\sim 0{,}1 \text{ nb} \end{aligned} \qquad (18.55)$$

o sea, las partículas buscadas se producen ¡una de cada $\sim 4 \times 10^7$ interacciones p $\overline{\text{p}}$!

La detección del Z^0 no tiene grandes problemas; basta con identificar dos leptones (e^+ e^- o μ^+ μ^-) de gran energía, pero la reconstrucción del $W^{\pm}$ se complica debido a la presencia de neutrinos indetectables. Para establecer la producción del W^+, por ejemplo, hay que darse cuenta de que el máximo de la distribución del momento transverso de los leptones $e^{\pm}$ es $\frac{M_{\text{W}}c}{2}$. En efecto, en la figura 18.15 puede verse que:

$$p_t^{\text{e}^+} = \frac{M_{\text{W}}c}{2}\sin\theta^*$$

con lo que:

$$\frac{d\sigma}{dp_t} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*}\frac{d\cos\theta^*}{dp_t}$$

quedando finalmente,

$$\frac{d\sigma}{dp_t} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*}\frac{2p_t}{M_{\text{W}}c}\frac{1}{\sqrt{(M_{\text{W}}c/2)^2 - p_t^2}} \qquad (18.56)$$

y, efectivamente, tiene un máximo en $p_t \sim \frac{M_{\text{W}}c}{2}$.

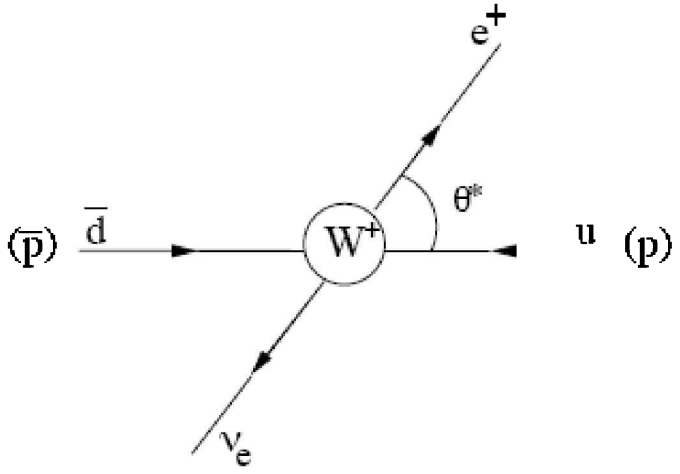


Figura 18.15: Producción en colisiones p $\overline{\text{p}}$ ($u\bar{d} \rightarrow W^+$) y desintegración leptónica ($W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$) del bosón intermediario W^+.

La figura 18.16 muestra los resultados experimentales del descubrimiento del W. Es evidente la acumulación de sucesos con momento transverso del $e^{\pm}$, similar a la de momento faltante (que se supone debida al ν_e, indetectable).

Una comprobación importante de que realmente se trata del mecanismo de producción esperado por la teoría electrodébil la da la medida de la distribución angular. La conservación del momento angular, habida cuenta de que el W^+, bosón con espín $S = 1$, debe de estar polarizado con $S_z = +1$, puesto que se desintegra $W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$, siendo el ν_e levógiro. Se espera una distribución de la forma:

$$|d_{11}^{(1)}|^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos\theta^*)^2 \qquad (18.57)$$

(véase la figura 18.16), verificada experimentalmente. La misma distribución se obtiene con el bosón W^-, pero ahora elángulo θ^* se define entre el protón incidente y el electrón. Los valores de la masa de ambos bosones determinados en los experimentos UA1 y UA2 eran muy aproximados a los actuales, que son mucho más precisos, y han sido

obtenidos en los experimentos del colisionador LEP del CERN, que han medido con una precisión mejor que el $^{0}/_{00}$ la masa del bosón Z^0. La determinación de la masa del bosón W ha sido mejorada gracias a los experimentos en marcha en el colisionador $p\,\overline{p}$ (Tevatrón) de Fermilab (Chicago, EEUU). También han sido estudiados en las colisiones e^+ e^-obtenidas en el colisionador LEP, que desde 1996 desarrolló un programa de estudio de las colisiones $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$, al haber aumentado la energía total en la colisión por encima del umbral de esta reacción.

Los valores de las masas de los bosones intermediarios son:

$$M_W = 80{,}385 \pm 0{,}015\ \text{GeV/c}^2 \quad M_Z = 91{,}1876 \pm 0{,}0021\ \text{GeV/c}^2 \qquad (18.58)$$

donde se puede constatar la extraordinaria precisión de la medida de la masa del Z^0.

La anchura de los bosones, dimensionalmente debe ser $\Gamma \sim GM^3$, y efectivamente se demuestra que vale $\Gamma_W = \frac{\sqrt{2}}{\pi} G M_W^3$. Lomismopara Γ_Z. La deter-minación experimental actual de las anchuras de los bosones es:

$$\Gamma_W = 2{,}085 \pm 0{,}042\ \text{GeV} \qquad \Gamma_Z = 2{,}4952 \pm 0{,}0023\ \text{GeV} \qquad (18.59)$$

Tanto en las desintegraciones de los bosones cargados $W^{\pm}$ como en las desintegraciones del bosón neutro Z^0, se puso en evidencia la llamada universalidad $e - \mu - \tau$; es decir que los acoplamientos de los bosones a los tres leptones son idénticos.

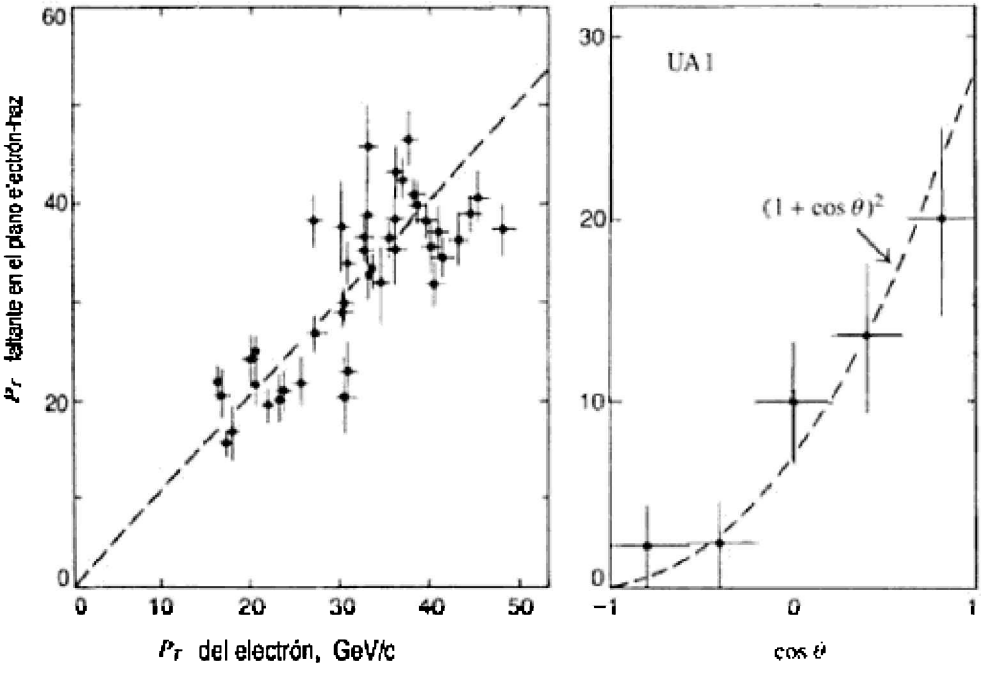


Figura 18.16: Distribución del momento faltante p_t en función del momento transverso del electrón en los 43 sucesos atribuidos a la desintegración leptónica ($W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$) del bosón intermediario W^+. A la derecha, distribución angular de las desintegración del e^+ en el sistema del W en reposo. Elángulo θ es el del e^+ respecto al p. Datos del experimento UA1 del CERN.

18.6.1 Desintegraciones de los bosones intermediarios

Desintegraciones del $W^{\pm}$

El bosón W se acopla de manera universal a los dobletes de fermiones levógiros y a los dobletes de quarks; por lo tanto, asignando la misma probabilidad de desintegración a cada par de fermiones se tendrán las siguientes proporciones:

$e^+\nu_e$	$\mu^+\nu_\mu$	$\tau^+\nu_\tau$	$u\bar{d}'$	$c\bar{s}'$
1	1	1	3	3

en donde el factor 3 de los quarks es debido al color. El canal con el quark *t* no puede tener lugar por conservación de la energía; la masa del quark *t* es muy superior a la del bosón W. Los quarks d′ y s′ son los transformados por la rotación de Cabibbo. Así pues, se espera que para cada par de leptones la desintegración represente 1/9, o sea ≈ 11 %. Experimentalmente se ha medido:

$$\begin{array}{lll} W^+ \longrightarrow & e^+\nu_e & 10{,}8 \pm 0{,}4\,\% \\ & \mu^+\nu_\mu & 10{,}6 \pm 0{,}7\,\% \\ & \tau^+\nu_\tau & 10{,}8 \pm 1{,}0\,\% \end{array} \qquad (18.60)$$

y lo mismo para el W^-. Es decir, existe un acuerdo satisfactorio. La identificación de los canales con un determinado par quark-antiquark es muy compleja. Por eso se ha limitado la comparación a los canales leptónicos.

Los acoplamientos a los leptones cargados deberían ser idénticos a los de los neutrinos. No se observa lo esperado, por lo tanto el acoplamiento del Z no coincide con el del W. El acoplamiento del Z depende de la carga del leptón. En efecto, ¡el bosón Z^0 no es el W neutro! Debe haber una mezcla entre los bosones neutros.

Desintegraciones del Z^0

En el caso del Z^0 si fuese igual que el caso del bosón W, se esperaría un acoplamiento igual para cada par de fermiones; es decir:

e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$	$\nu_e\overline{\nu}_e$	$\nu_\mu\overline{\nu}_\mu$	$\nu_\tau\overline{\nu}_\tau$	$u\overline{u}$	$d\overline{d}$	$s\overline{s}$	$c\overline{c}$	$b\overline{b}$
1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3

pero experimentalmente no se observa esta predicción (que debería ser para cada canal leptónico 1/21 ≈ 4,8%), sino que se obtiene:

$$
\begin{array}{lll}
Z^0 \longrightarrow & e^+e^- & 3{,}367 \pm 0{,}005\,\% \\
 & \mu^+\mu^- & 3{,}367 \pm 0{,}008\,\% \\
 & \tau^+\tau^- & 3{,}371 \pm 0{,}009\,\% \\
 & \nu\overline{\nu} & 20{,}02 \pm 0{,}06\,\% \\
 & \text{hadrones} & 69{,}89 \pm 0{,}07\,\%
\end{array}
\qquad (18.61)
$$

Los acoplamientos a los leptones cargados deberían ser idénticos a los de los neutrinos. No se observa lo esperado, por lo tanto el acoplamiento del Z no coincide con el del W. El acoplamiento del Z depende de la carga del leptón. En efecto, ¡el bosón Z^0 no es el W neutro! Debe haber una mezcla entre los bosones neutros.

Ya se ha visto cómo Glashow, Weinberg y Salam resuelven las diferencias de acoplamiento de los bosones. Se introduce el isospín débil y la hipercarga débil. Existen dobletes levógiros que acoplan al $W^{\pm}$ yal Z^0 y singletes dextrógiros que sólo se acoplan al Z^0. Los números cuánticos de cada fermión pueden verse en las tablas 18.2 y 18.3. Los bosones forman un triplete de isospín débil (W) y un singlete de isospín débil (B^0). La constante de acoplamiento del triplete es g_W y la del singlete es g_Z. El W^0 yel B^0 no cambian el tipo de fermión.

Para explicar las partículas reales, el γ y el Z^0, la teoría GWS postula una mezcla definida por elángulo de Weinberg, θ_W:

$$
\begin{pmatrix} \gamma \\ Z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ W^0 \end{pmatrix} \qquad (18.62)
$$

de tal manera que:

$$
\sin\theta_W = \frac{g_Z}{\sqrt{g_W^2 + g_Z^2}} \qquad \tan\theta_W = \frac{g_Z}{g_W} \qquad (18.63)
$$

La teoría de la unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles, teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam adquiere todo

su sentido cuando se encuentra que la constante de acoplamiento electromagnética g_e (la carga eléctrica) está además relacionada con la constante débil:

$$\sin\theta_W = \frac{g_e}{g_W} \qquad (18.64)$$

18.6.2 La anchura del Z^0 y el número de especies de neutrinos ligeros

La medida de la anchura del bosón Z^0 permite determinar el número de especies de neutrinos más ligeros que el Z^0. En efecto, la anchura total del $Z^0(\Gamma_Z)$ puede determinarse a partir de la forma Breit-Wigner de la resonancia; esto se consigue variando poco a poco la energía en la colisión e^+e^-, lo que da lugar a la curva de la sección eficaz e^+e^-total (todos los canales posibles). Si por el contrario se selecciona un canal, por ejemplo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, que también es descrito por una curva de Breit-Wigner:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{3\pi}{M_Z^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E-M_Z)^2+\Gamma^2/4}$$

entonces se puede medir cada una de la anchuras parciales. El resultado actual obtenido para la anchura total en el LEP es:

$$\Gamma_Z = 2{,}4952 \pm 0{,}0023\ \text{GeV}$$

Tabla 18.3: Los multipletes de constituyentes del modelo estándar. Los números cuánticos son el isospín débil, I^w, su tercera componente, I^w_3, y la hipercarga débil, Y^w. Los dobletes son levógiros (subíndice L) o sea partículas con helicidad $\lambda = -1$ (como el neutrino) y los singletes son dextrógiros (con helicidad $\lambda = +1$).

Fermiones	I^w	I_3^w	Q	Y^w
$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	1/2	$+1/2$ $-1/2$	$+2/3$ $-1/3$	$+1/3$
u_R c_R t_R d'_R s'_R b'_R	0 0	0 0	$+2/3$ $-1/3$	$+4/3$ $-2/3$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$	1/2	$+1/2$ $-1/2$	0 -1	-1
e_R μ_R τ_R	0	0	-1	-2
Bosones				
$\begin{pmatrix} W^+ \\ W^0 \\ W^- \end{pmatrix}$	1	1 0 -1	1 0 -1	0
B^0	0	0	0	0
$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1/2	$1/2$ $-1/2$	1 0	$+1$

Una vez conocida la anchura total $\Gamma_Z$del bosón, se compara con la suma de anchuras de todos los canales accesibles:

$$\Gamma_Z = \Gamma_{\text{leptones cargados}} + \Gamma_{\text{hadrones}} + N_\nu \Gamma_\nu \qquad (18.65)$$

en donde N_ν es el número de especies (familias) de neutrinos con masa < $M_Z/2$ y Γleptones cargados = $\Gamma_{ee} + \Gamma_\mu + \mu - + \Gamma_\pi$ que por la universalidad e $-$ μ $-$ τ los tres sumandos deben ser iguales, lo que se confirma experimentalmente.

En los experimentos del colisionador LEP: ALEPH, DELPHI, L3 Y

OPAL, se determinó la anchura parcial a cada modo de desintegración: e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, hadrones (las cinco parejas de quarks-antiquarks accesibles por debajo de la masa del Z^0) y lo que se denomina la anchura invisible (en efecto, las desintegraciones del Z^0a los pares neutrino-antineutrino son totalmente indetectables ya que la probabilidad de colisión de los neutrinos en el detector es despreciable). O sea, al medir la anchura del Z^0, se determina la anchura invisible y se calcula el número de neutrinos por (18.65). Por otra parte el modelo estándar predice las anchuras:

$$\Gamma(Z^0 \to \ell\,\overline{\ell}) = 2\left[(v^\ell)^2 + (a^\ell)^2\right]\frac{GM_Z^3}{12\pi\sqrt{2}}$$

$$\Gamma(Z^0 \to q\overline{q}) = 2N_C\left[(v^q)^2 + (a^q)^2\right]\frac{GM_Z^3}{12\pi\sqrt{2}}$$

siendo N_C = 3 el factor que da los colores de los quarks y *v*, *a* las constantes vectorial y axial del modelo estándar cuyos valores aparecen en las tabla 18.2.

La cantidad $\Gamma_\nu = \dfrac{GM_Z^3}{12\pi\sqrt{2}}$ es precisamente la anchura de desintegración al canal con cada neutrino, dando $\Gamma_\nu \approx$ 165,8 MeV.

La medida de la curva de producción del Z^0 (llamada *lineshape*) obtenida en el experimento DELPHI puede verse en la figura 18.17. En ella se muestra claramente que los datos confirman la existencia de *N* = 3 tipos de neutrinos.

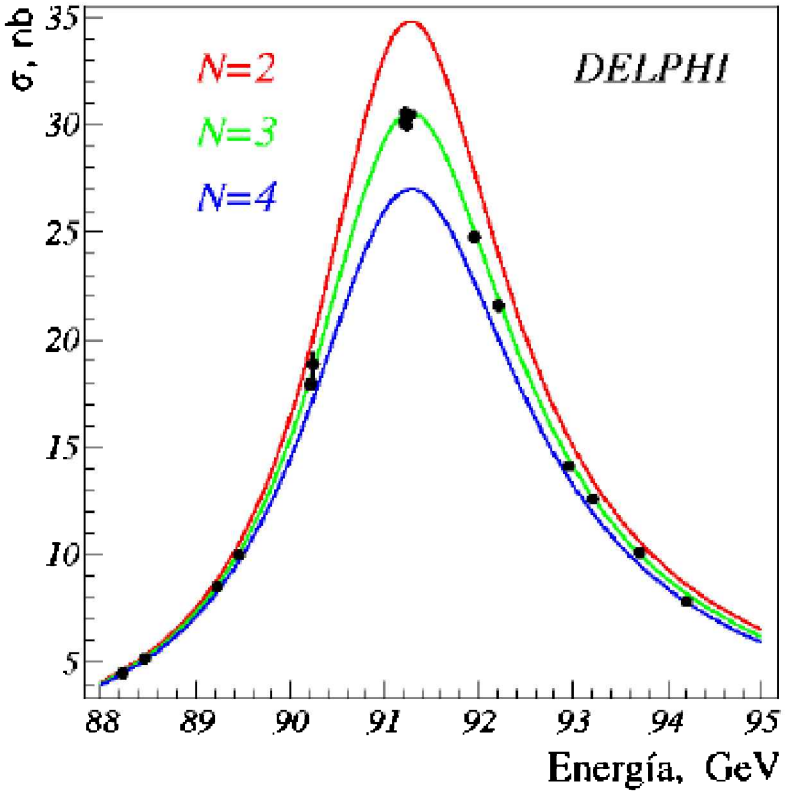


Figura 18.17: Curva de producción del bosón Z^0en el experimento DELPHI. Los datos experimentales confirman la existencia de sólo $N = 3$ familias de fermiones fundamentales.

El método para determinar el número de familias consiste en medir la anchura Γ_Z y al aplicar la fórmula (18.65) puede obtenerse N_ν. Realizando la media de los cuatro experimentos del LEP da como resultado:

$$N_\nu = 2{,}994 \pm 0{,}012 \qquad (18.66)$$

Es decir, se concluye que sólo existen tres familias de neutrinos ligeros. Este fue, probablemente, el resultado más brillante del LEP. A este resultado hay que a˜nadir una gran cantidad de medidas de gran precisión

que confirmaron las predicciones del modelo estándar.

18.7 Problemas

18.1 Dadas las matrices de Dirac γ^μ, y sabiendo que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, demostrar las siguientes igualdades:

a) $\{\gamma^\mu, \gamma\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

b) $(\gamma^5)^2 = I$

c) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

18.2 Explicar por qué las siguientes reacciones:

a) $\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \gamma$

b) $\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + e^+ + e^-$

no se han encontrado.

18.3 El valor medido de la constante de Fermi es $G = 1{,}4355 \times 10^{-62}$ J $\cdot$ m^3. Verificar que en unidades naturales se obtiene:

$$G = 1{,}1663 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \approx \frac{10^{-5}}{m_p^2}$$

siendo m_p la masa del protón.

18.4 En la desintegración que viola paridad $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, tanto la onda S como la onda P dan contribución. Probar que la distribución angular relativa a la dirección del espín del Λ^0es

$$W(\theta) = \frac{1}{4\pi}\left(|\, a_S\,|^2 + |\, a_P\,|^2\right)\left(1 - \frac{2a_S\,\mathrm{Re}(a_P^*)}{|\, a_S\,|^2 + |\, a_P\,|^2}\cos\theta\right)$$

donde a_S y a_P son las amplitudes (complejas) para las ondas S y P respectivamente.

18.5 Estimar elángulo de Cabibbo θ_C comparando las

desintegraciones del neutrón y del Λ^0, a partir de la información suministrada en la siguiente tabla:

	Vida media τ (s)	Fracción de desintegración f	Energía liberada E (MeV)
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	900	1	1,3
$\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$2{,}63 \times 10^{-10}$	$8{,}3 \times 10^{-4}$	177,3

Vida media Fracción de Energía liberada π(s) desintegración f E(MeV) n $\rightarrow$p+e$^-$+ ν_e900 1 1,3 Λ^0 $\rightarrow$p+e$^-$+ ν_e2,63 $\times 10^{-10}$8,3 $\times 10^{-4}$177,3

Suponer que los factores de espacio de fase son aproximadamente $E^5/30$, donde E es la energía liberada expresada en MeV.

18.6 En la desintegración débil $\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$, siendo $l = \mu$ o e, la teoría V-A predice que la amplitud de desintegración $\Gamma(\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l)$ es proporcional al factor de espacio de fase de dos cuerpos multiplicado por $1 - v/c$, donde v es la velocidad del leptón en el sistema de referencia en el que el pión está en reposo. Obtener el factor de espacio fásico $p^2\, dp/dE$, donde p es el momento del leptón y E la energía total en el sistema de referencia del pión, y estimar el cociente de anchuras $\Gamma(\pi \rightarrow e + \nu)/\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu)$.

18.7 Determinar el cociente de anchuras $\dfrac{\Gamma(K^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l)}$

18.8 Justificar el valor de los siguientes cocientes de anchuras:

a) $$\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} \approx 3 \times 10^{-9}$$

b) $$\frac{\Gamma(\Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \overline{\nu}_e)} < 5 \times 10^{-3}$$

c) $$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu_e + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu)} < 10^{-6}$$

---

[1] M. Perl *et al., Phys. Rev. Lett.*,35 (1975) 1489.

[2] T. D. Lee, C. N. Yang, *Phys. Rev.*,104 (1956) 254.

[3] C. S. Wu *et al., Phys. Rev.*,105 (1957) 1413.

[4] M. Goldhaber *et al., Phys. Rev.*,109 (1958) 1015.

[5] E. Fermi, *Z. Physik*,88 (1934) 161.

[6] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.*,10 (1963) 531.

[7] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.*, 49 (1973) 652.

[8] F. J. Hasert *et al., Phys. Lett.*,46B (1973) 121; *Nucl. Phys.*, B73 (1974) 1; se trata del experimento realizado en el CERN utilizando la cámara de burbujas *Gargamelle*, llena de líquido pesado CF_3Br.

Apéndices

Apéndice A: Constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor
velocidad de la luz en el vacío	c	2,99792458 $\times 10^{8}$ m s^{-1}
constante de Planck	h	6,626069 $\times 10^{-34}$ J s
	$\hbar$	1,054572 $\times 10^{-34}$ J s
		= 6,582119 $\times 10^{-22}$ MeV s
carga del electrón	e	1,60217656 $\times 10^{-19}$ C
		= 4,8032045 $\times 10^{-10}$ esu
constante de conversión	$\hbar c$	197,327 MeV fm
constante de conversión	$(\hbar c)^2$	0,389379 GeV^2 mbarn
permitividad del vacío	ϵ_0	$8,854187 \times 10^{-12}$ F/m
permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2}
		$=12,566370 \times 10^{-7}$ N A^{-2}
	$\epsilon_0\mu_0$	$1/c^2$
unidad de masa atómica (uma)		$\mathcal{M}$(átomo de ^{12}C)/12 =
	$= (1\ g)/(\mathcal{N}_A$ mol)	931,494061 MeV/c^2
masa del electrón	m_e	0,510998928 MeV/c^2
		= 9,1093829 $\times 10^{-31}$ kg
masa del protón	m_p	938,272046 MeV/c^2
		= 1,67262178 $\times 10^{-27}$ kg
		= 1,007276467 uma
		= 1836,152672 m_e
masa del neutrón	m_n	939,56536 MeV/c^2
		= 1,008664916 uma
masa del deuterón	m_d	1875,61286 MeV/c^2
masa de la partícula α	m_α	3727,379 MeV/c^2

Cantidad	Símbolo	Valor
magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5{,}7883818\times10^{-11}$ MeV T^{-1}
magnetón nuclear	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3{,}1524513\times10^{-14}$ MeV T^{-1}
constante de estructura fina	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	1/137,036 $= 7,297352 \times 10^{-3}$
radio clásico del electrón	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$	$2{,}817940\times10^{-15}$ m
longitud de onda Compton del e^-	$\lambda\!\!\!^{-} = h/m_e c = r_e/\alpha$	$3{,}861593\times10^{-13}$ m
radio de Bohr ($M_{\text{núcleo}} = \infty$)	$a_\infty = r_e/\alpha^2$	$0{,}529177\times10^{-10}$ m
energía de Rydberg	$R_\infty hc = m_e c^2\alpha^2/2$	13,605692 eV
sección eficaz Thomson	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0,665246 barn
constante de Fermi	$G_F/(\hbar c)^3$	$1{,}166379\times10^{-5}$ GeV^{-2}
ángulo de mezcla débil	$\sin^2\hat{\theta}(m_Z)$	0,23116
masa del bosón $W^\pm$	m_W	$80{,}385 \pm 0{,}015$ GeV/c^2
masa del bosón Z^0	m_Z	$91{,}1876 \pm 0{,}0021$ GeV/c^2
constante de acoplamiento fuerte	$\alpha_s(m_Z)$	$0{,}1184 \pm 0{,}0020$
constante de Newton	G_N	$6{,}67384\times10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$
aceleración de la gravedad (mar)	g	9,80665 m s^{-2}
número de Avogadro	$\mathcal{N}_A$	$6{,}0221413\times10^{23}$ mol^{-1}
constante de Boltzmann	k	$1,38065 \times 10^{-23}$ J K^{-1} $= 8,617332 \times 10^{-5}$ eV K^{-1}
volumen molar gas ideal STP	$\mathcal{N}_A k\frac{T}{P}$	$22,414 \times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}
constante de la ley de Wien	$b = \lambda_{max}T$	$2{,}8977685\times10^{-3}$ m K
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$	$5{,}67040\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Tabla de equivalencias

$\pi = 3{,}141592653589793$	e = 2,718281828459045	$\gamma = 0,577215664901532$
1 in $\equiv$ 0,0254 m	1 G $\equiv 10^{-4}$ T	1 eV = $1{,}602176\times10^{-19}$ J
1 Å $\equiv$ 0,1 nm	1 dina $\equiv 10^{-5}N$	1 barn = 10^{-28} m^2
0 °C $\equiv$ 273,15 K	1 eV/c^2 = $1{,}782\times10^{-36}$ kg	1 erg = 10^{-7} J

Apéndice B: Unidades en el SI. Múltiplos y submúltiplos

El Sistema Internacional de unidades físicas, llamado SI, está compuesto por siete unidades, correspondientes a las magnitudes físicas siguientes:

Magnitud	símbolo	unidad	denominación
Longitud	L	m	metro
Masa	M	kg	kilogramo
Tiempo	T	s	segundo
Corriente eléctrica	I	A	amperio
Temperatura	Θ	K	kelvin
Cantidad de sustancia	N	mol	mol
Intensidad luminosa	J	cd	candela

Todas las demás magnitudes físicas son función deéstas. Por ejemplo, las dimensiones de la energía son $[E] = ML^2T^{-2}$. En física nuclear existe una unidad necesaria: la unidad de masas atómica, cuyo valor es $u = M(^{12}C)/12 = 931{,}434\ \text{MeV}/c^2$. La unidad más usada de energía es el electronvoltio; $\text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}$ J, o en sus múltiplos como se puede ver más abajo. En física de partículas es muy frecuente el uso del llamado Sistema de Unidades Naturales (UN), en el que $\hbar = c = 1$, con lo que $L = T$ y $M = L^{-1} = T^{-1}$ y la energía tiene las mismas unidades que el momento: $[E] = [p] = M = L^{-1} = T^{-1}$.

La siguiente tabla muestra los múltiplos y submúltiplos frecuentemente utilizados, para la unidad de longitud y para la unidad de energía.

Magnitud	símbolo	unidad	denominación
Longitud	L	m	metro
Masa	M	kg	kilogramo
Tiempo	T	s	segundo
Corriente eléctrica	I	A	amperio
Temperatura	Θ	K	kelvin
Cantidad de sustancia	N	mol	mol
Intensidad luminosa	J	cd	candela

Apéndice C: Efemérides

C.1 Descubrimientos experimentales y teóricos en física nuclear y de partículas

La siguientes tablas, muestran una relación cronológica del desarrollo de la física nuclear y de partículas. Cuando el descubrimiento es debido a uno o pocos científicos, sólo aperecen uno o varios nombres. También aparecen frecuentemente nombres de laboratorios donde ha tenido lugar el hito científico. Aunque frecuentemente aparece un sólo nombre, ello no implica que se deba atribuir el descubrimiento a sólo una persona. También hay que tener en cuenta, que los grandes avances están ligados a las grandes colaboraciones de científicos e ingenieros, que han ido aumentando numéricamente de forma considerable con el tiempo. Hoy en día existen varias colaboraciones en física de partículas con más de mil participantes. Por ejemplo en los experimentos ATLAS y CMS, que recientemente han descubierto el bosón de Higgs, participan en cada uno de los experimentos, unos 2000 científicos y tecnólogos.

Para resaltar el papel de los grandes aceleradores en esta disciplina, también se ha incluido en las tablas, la fecha del comienzo de las operaciones de los grandes aceleradores y colisionadores de partículas.

1) 1896-1923 Los orígenes

1895	Descubrimiento de los rayos catódicos	J. Perrin
	Descubrimiento de los rayos X	W. Roetgen
1896	Descubrimiento de la radiactividad del U	H. Becquerel
1897	Descubrimiento del e	J.J. Thomson
1898	Aislamiento y estudio del radio y polonio	P. Curie
		M. Curie
1899	Descubrimiento de la radiactividad α y β del uranio	E. Rutherford
1900	Descubrimiento de la radiactividad γ del uranio	P. Villard
	Idea de los cuantos y la radiación del cuerpo negro	M. Plank
1902	La E_{max} de los fotoelectrones	
	depende de la frecuencia	P. Lenard
1905	Efecto fotoeléctrico y	
	teoría especial de la relatividad	A. Einstein
1908	Invención del contador Geiger	H. Geiger
		E. Rutherford
1909	Medidas de dispersión de partículas α sobre oro	H. Geiger
		E. Marsden
	Las partículas α son núcleos de He	E. Rutherford
		T. Royds
1911	Descubrimiento del núcleo atómico	E. Rutherford
1912	Desarrollo de la cámara de niebla	C.T.R. Wilson
	Descubrimiento de los rayos cósmicos	V. F. Hess
1913	Descubrimiento de isótopos estables	G. Thomson
	La carga nuclear es determinada a partir de rayos X y	
	constituye la base para la numeración de los elementos	H. Moseley
	Modelo atómico cuántico planetario	N. Bohr
	Medida de la unidad fundamental de carga eléctrica	R. Millikan
1914	Observación del espectro continuo β. Evidencia	
	de la existencia de radiación neutra muy penetrante	J. Chadwick
1915	Modelo atómico de Sommerfeld	A. Sommerfeld
1919	1ª transmutación artificial por reacciones nucleares.	
	Evidencia de la existencia del protón en el núcleo	E. Rutherford
	Desarrollo del espectrómetro de masas	F.W. Aston
1920	Hipótesis del neutrón	E. Rutherford
1921	Se introduce el factor de Landé	A. Landé
	Una fuerza fuerte mantiene unido el núcleo	J. Chadwick
		E.S. Bieler
1923	Explicación del efecto Compton	A. Compton
	Se propone la naturaleza ondulatoria del electrón	L. de Broglie

2) 1924-1940 Desarrollo de la Física Nuclear

1924	Se introduce la estadística de Bose-Einstein	S. Bose A. Einstein
1925	Espín intrínseco y el efecto Zeeman	G. Goudsmit S. Uhlenbeck
	Formulación del principio de exclusión	W. Pauli
1928	Ecuación relativista del e^-	P.A.M. Dirac
1929	Expansión del Universo	E. Hubble
1930	Hipótesis del neutrino	W. Pauli
1932	Descubrimiento del neutrón	J. Chadwick
	Descubrimiento del positrón	C.D. Anderson
1932	Modelo nuclear p – n y los isótopos	W. Heisenberg
	1er acelerador electrostático Van de Graaff	R.J. Van de Graaff
	1^{a} reacción nuclear con p de un acelerador	J.D. Cockcroft E.T.S. Walton
1934	Descubrimiento de la radiactividad artificial	I. y F. Joliot-Curie
	Las reacciones nucleares en cadena	L. Szilard
	Teoría de la radiactividad β	E. Fermi
	Descubrimiento del efecto Cherenkov	P. Cherenkov
1935	Desarrollo de las coincidencias	W. Bothe
	Teoría nuclear del intercambio del π	H. Yukawa
	Teoría de la absorción de n por núcleos	E. Wigner
1936	Teoría del núcleo compuesto	N. Bohr
	Independencia de carga de las fuerzas nucleares; el isospín	G. Breit E.U. Condon. R.D. Present B. Cassen
1937	Descubrimiento del muón en cósmicos con una cámara de niebla	C.D. Anderson. S. Neddermeyer
1938	La fisión nuclear	O. Hahn F. Strassmann L. Meitner O. Frisch
	Conservación del N^o de bariones	E.C.G. Stückelberg
1939	Modelo de la gota líquida de la fisión	N. Bohr J. Wheeler
	1^{a} aplicación medica de los ciclotrones	E.O. Lawrence
1940	Producción del 1er transuránido	E.M. McMillan. G.T. Seaborg

3) 1941-1951 Proliferación de hadrones

1941	Introduce el término nucleón	C. Moller A. Pais
	1er betatrón, acelerador de electrones de inducción magnética	D.W. Kerst
1943	1er reactor de fisión controlada	E. Fermi
1945	Estabilidad de fase en el sincrotrón	E.M. McMillan V. Veksler
	1er ensayo de una bomba de fisión	
1946	Desarrollo de la RMN	F. Bloch E.M. Purcell
	Cosmología del Big–Bang	G. Gamow
1947	Descubrimiento del π en cósmicos	C. Powell C.M.G Lattes, G.P.S. Occhialini
	1er sincrociclotrón de p de 200-400 MeV	UC Berkeley
	Descubrimiento en los rayos cósmicos de las primeras partículas extrañas tipo V^0	C.C. Butler G.D. Rochester
	Datación mediante ^{14}C	W.F. Libby
	Desarrollo de la Electrodinámica Cuántica	R. Feynman J. Schwinger, S. Tomonaga
1948	1er acelerador lineal de p de 32 MeV	L.W. Alvarez
1949	Desarrollo del contador de centelleo	H. Kallmann J.W. Coltman, E. Marshall
	Invención de los detectores semiconductores	K.G. Mckay
	Invención de las cámaras de chispas	J.W. Keuffel
	Modelo de capas de la estructura nuclear	M. Goeppert-Mayer, J.H.D. Jensen, O. Haxel, H.E. Suess
	Se sugiere la idea de que el π está compuesto de un nucleón y un anti-nucleón	E. Fermi C.N. Yang
	Descubrimiento del mesón extraño K^+	R.H. Brown C. Powell
1950	Se descubre el π^0	J. Steinberger

		W.K.H. Panofsky J. Steller
1951	Se descubren dos nuevas partículas V neutras en los rayos cósmicos: Λ^0 y K^0 (Pic du Midi)	R. Armenteros

4) 1952-1957 Nacimiento de la idea de quarks

1952	Descubrimiento de las cuatro resonancias D: $D^{++}, D^{+}, D^{0}, D^{-}$	H.L. Anderson *et al.*,
	Descubrimiento del hiperón Ξ^-	R. Armenteros A. Bonetti
	Desarrollo de la 1ª cámara de burbujas	D.A. Glaser
	Principio de focalización fuerte en aceleradores	E.D. Courant M.S. Livingston, H.S. Snyder
	1er sincrotrón de protones 2.3 GeV	Cosmotrón, BNL
	Descubrimiento resonancia $\Delta(1236)$	E. Fermi *et al.*,
1955	Evidencias de la estructura interna de p y n en experimentos de difusión de e^-	
	Descubrimiento del antiprotón	O. Chamberlain E. Segre, C. Wiegand
	T. Ypsilantis	
	1er acelerador lineal de e^- de energías ~GeV	SLAC. Stanford
	Invención de los flash tubes	M. Conversi
1956	Detección experimental del anti-neutrino	F. Reines C. Cowan
	Violación de la paridad en interacciones débiles	T.D. Lee C.N. Yang
	Se descubre violación de la paridad en la desintegración β del cobalto	C.S. Wu *et al.*,
	1ª clasificación de las partículas elementales	K. Nishijima M. Gell-Mann
	Evidencia del anti-neutrón	B. Cork
1953	Hipótesis de la extrañeza	M. Gell-Mann K. Nishijima
	Modelo colectivo de la estructura nuclear	A.N. Bohr B.R. Mottelson, J. Rainwater
	Producción de partículas extrañas en aceleradores	Brookhaven
1954	Desarrollo de las teorías Gauge	C.N. Yang, R. Mills
1957	Conservación de CP en interacciones débiles	T.D. Lee

	El lagrangiano V-A para la fuerza débil	A. Pais R. Feynman, M. Gell-Mann, R. Marshak
	1er intento de unificación electrodébil	J. Schwinger
	Hipótesis de que las interacciones débiles son mediadas por bosones pesados cargados	J. Schwinger S. Bludman S. Glashow

5) 1959-1972 Auge de la Física de Partículas

1959	Prueba que neutrino y anti-neutrino son partículas distintas	R. Davis D.S. Harmer
	Inicio del sincrotrón de p (PS) de 26 GeV	CERN
1961	Modelo SU3	M. Gell-Mann Y. Ne'eman
	Inicio del sincrotrón AGS de 30 GeV	UC Berkeley
1962	Dos tipos de neutrinos: ν_e y ν_μ	L. Lederman M. Schwartz, J. Steinberger
1963	Mezcla de sabores	N. Cabibbo
1964	Invención de las cámaras streamer	B.A. Dolgoshein
	Modelo quark de hadrones	M. Gell-Mann G. Zweig
	Hipótesis del quark charm c	S. Glashow J. Bjorken
	Observación de violación CP en la desintegración del K0	J. Cronin V. Fitch
	Mecanismo para generación de masa	P. Brout F. Englert P.W. Higgs
1965	Introducción de la hipótesis del color	O.W. Greenberg M.Y. Han, Y. Nambu
1967	Teoría Electrodébil	S. Glasgow S. Weinberg,

		A. Salam
	El acelerador lineal de e^- de 20 GeV	SLAC. Stanford
1968	Construcción de la 1ª cámara proporcional de multihilos MWPC	G. Charpak R. Bouclier
1969	La estructura interna del protón	J. I. Friedman H. W. Kendall, R. E. Taylor
1970	Se introduce el quark c por mecanismo GIM	S. Glashow J. Iliopoulos, L. Maiani
1971	Inicio del colisionador $p\overline{p}$	ISR. CERN
1972	Inicia el sincrotrón de p de 500 GeV	Fermilab

6) 1973-2012 Confirmación del Modelo Estándar

1973	Las corrientes neutras	Gargamelle, CERN
	Desarrollo de QCD	H. Fritzsch
		M. Gell-Mann
	Libertad asintótica de las interacciones fuertes	D. Politzer
		D. Gross,
		F. Wilczek
	Mezcla de quarks para 3 familias	M. Kobayashi
		T. Maskawa
1974	Descubrimiento de la partícula J/Ψ (quark c)	B. Richter *et al.*, ,
		S.C. Ting *et al.*,
1976	Descubrimiento del mesón D0	G. Goldhaber,
		F. Pierre
	Descubrimiento del leptón τ	M. Perl *et al.*,
1977	Descubrimiento del Υ (quark b)	L. Lederman *et al.*,
1978	Violación de paridad en e^-d	C. Prescott,
		R. Taylor
1979	Descubrimiento del gluón	PETRA, DESY
1983	Colisionador $p\overline{p}$ (SPS) a 270 GeV	CERN
	Descubrimiento de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0	C. Rubbia *et al.*, ,
		S. Van der Meer
1986	El colisionador $p\overline{p}$ a 1.8 TeV	Tevatron, Fermilab
1987	Mezcla de mesones $B_s\overline{B}_s$	UA1, CERN
	Mezcla de mesones $B\overline{B}$	DORIS-II en DESY
1989	El colisionador e^+e^- lineal SLC de 90 GeV	SLAC
	El colisionador e^+e^- LEP de 90 GeV	CERN
	Invención del World Wide Web	T. Berners-Lee,
		R. Cailleau, CERN
1990	Existen sólo tres familias de quarks y leptones	LEP-CERN
		y SLC-SLAC
1991	Colisionador e^-p HERA, 30+820 GeV	DESY
1995	Descubrimiento del quark top	Tevatron, Fermilab
1998	Oscilación de neutrinos (masa no nula)	Super-Kamiokande
1999	Inicio de los colisionadores e^+e^- asimétricos	
	PEP-II, KEK-B a 10.6 GeV	SLAC, KEK
2000	Descubrimiento del neutrino tau	K. Niwa *et al.*,
	Desarrollo del GRID	
2001	Confirmación de la violación de CP en mesones B	PEP-II, KEK-B
2003	Existencia de bariones exóticos pentaquarks	
2010	Inicio del colisionador de hadrones LHC a 7 TeV	CERN
2012	Descubrimiento del bosón de Higgs	ATLAS y CMS
		CERN

C.2 Los Premios Nobel en física nuclear y de partículas

A continuación se reproduce la lista de los premiados por el Nobel de Física, que han tenido una incidencia directa en el desarrollo de la disciplina que se presenta en este libro. Además de la nacionalidad, la lista muestra los premios en orden cronológico.

	Año	Nombre		Motivo
D	1901	Wilhelm K. ROENTGEN	(1845-1923)	Descubrimiento rayos-X.
NL	1902	Hendrik A. LORENTZ	(1853-1928)	Influencia del magnetismo
NL		Pieter ZEEMAN	(1865-1943)	la radiación.
F	1903	Antoine H. BECQUEREL	(1852-1908)	Radiactividad espontánea.
F		Pierre CURIE	(1859-1906)	Trabajos sobre radiación
P		Marie S. CURIE	(1867-1934)	descubierta por Becquerel.
UK	1904	Baron RAYLEIGH	(1842-1919)	Descubre Argón.
F	1905	Philippe LENARD	(1862-1947)	Rayos catódicos.
UK	1906	Joseph J. THOMSON	(1865-1940)	Electricidad en gases.
US	1907	Albert A. MICHELSON	(1852-1931)	Espectroscopía de precisión.
NL	1913	Heike KAMERLINGH-ONNES	(1853-1926)	Bajas T y He líquido.
D	1914	Max Th. VON LAUE	(1879-1960)	Difrac. rayos X en cristales.
UK	1917	Charles G. BARKLA	(1877-1944)	Rayos X de elementos.
D	1918	Max K. PLANCK	(1858-1947)	Elemento de acción.
D	1919	Johannes STARK	(1874-1957)	Desdoblamiento de líneas.
D	1921	Albert EINSTEIN	(1879-1955)	Efecto Fotoeléctrico.
DK	1922	Niels H. BOHR	(1885-1962)	Átomo y radiación.
US	1923	Robert A. MILLIKAN	(1868-1953)	Q_e y efecto fotoeléctrico.
S	1924	Karl M. SIEGBAHN	(1886-1979)	Espectroscopía rayos X.
D	1925	James FRANCK	(1882-1964)	Atomo de e.
D		Gustav HERTZ	(1887-1975)	id id
US	1927	Arthur H. COMPTON	(1892-1962)	Difusión e-rayo X.
UK		Charles T. WILSON	(1869-1959)	Cámara de niebla.
F	1929	Prince Louis V. DE BROGLIE	(1892-1987)	Naturaleza ondulatoria de e.
IN	1930	Chandrasekhara V. RAMAN	(1888-1970)	Difusión luz y ef. Raman.
D	1932	Wiener K. HEISENBERG	(1901-1976)	Mecánica Cuántica.
UK	1933	Paul A.M. DIRAC	(1902-1984)	Nueva forma de
A		Erwin SCHRÖDINGER	(1887-1961)	Teoría atómica.
UK	1935	Sir James CHADWICK	(1891-1974)	Descubre neutrón.
A	1936	Victor F. HESS	(1883-1964)	Rayos cósmicos.
US		Carl D. ANDERSON	(1905-1991)	Descubre positrón.
I	1938	Enrico FERMI	(1901-1954)	Síntesis por captura n.

	Año	Nombre		Motivo
US	1939	Ernest O. LAWRENCE	(1901-1958)	Ciclotrón y rad. artificial.
PR	1943	Otto STERN	(1888-1969)	Rayos moleculares y μ_p.
A	1944	Isidor I. RABI	(1898-1988)	RMN.
A	1945	Wolfgang PAULI	(1900-1958)	Principio de exclusión.
UK	1948	Patrick M.S. BLACKETT	(1897-1974)	Cámara Wilson y cósmicos.
JP	1949	Hideki YUKAWA	(1907-1981)	Predicción mesones.
UK	1950	Cecil F. POWELL	(1903-1969)	Descubrimiento mesones.
UK	1951	Sir John D. COCKROFT	(1897-1967)	Transmutación de núcleos
IR		Ernest T. WALTON	(1903-1995)	con partículas aceleradas.
D	1954	Max BORN	(1882-1970)	Interpretación estad. de Ψ.
D		Walter BOTHE	(1891-1957)	Método coincidencias.
US	1955	Willis E. LAMB	(1913-2008)	Estructura fina del H.
D		Polikarp KUSH	(1911-1993)	Momento magnético del e.
Ch	1957	Chen N. YANG	(1922)	Leyes de
Ch		Tsung D. LEE	(1926)	paridad.
UR	1958	Pavel A. CERENKOV	(1904-1990)	Descubre efecto Cerenkov
UR		Il'ja M. FRANK	(1908-1990)	Interpretación del
UR		Igor' E. TAMM	(1895-1971)	mismo efecto.
I	1959	Emilio G. SEGRE	(1905-1989)	Descubren
US		Owen CHAMBERLAIN	(1920-2006)	antiprotón.
US	1960	Donald A. GLASER	(1926-2013)	Cámara de burbujas.
US	1961	Robert HOFSTADTER	(1915-1990)	Difusión e-N y estruc. N.
D		Rudolf L. MOSSBAUER	(1929-2011)	Absorción resonante de γ.
H	1963	Eugene P. WIGNER	(1902-1995)	Partículas y simetrías.
D		María G. MAYER	(1906-1972)	Estructura nuclear,
D		J. Hans D. JENSEN	(1907-1973)	Modelo de capas.
US	1965	Julian SCHWINGER	(1918-1994)	QED
JP		Sin-itivo TOMONAGA	(1906-1979)	y sus
US		Richard P. FEYNMAN	(1918-1988)	consecuencias.
F	1967	Hans A. BETHE	(1906-2005)	Reacciones nucleares.
US	1968	Louis ALVAREZ	(1911-1988)	Resonancias en C. burbujas.
US	1969	Murray GELL-MANN	(1929)	Clasificación partículas.
DK	1975	Aage BOHR	(1922-2009)	Conexión entre
US		Ben R. MOTTELSON	(1926)	movimiento colectivo
US		James RAINWATER	(1917-1986)	y estructura nuclear.
Ch	1976	Samuel C. TING	(1936)	Descubrimiento
US		Burt RICHTER	(1931)	del J/ψ
US	1978	Arno A. PENZIAS	(1933)	Radiación de fondo
US		Robert W. WILSON	(1936)	microondas cósmica.

	Año	Nombre		Motivo
US	1979	Seldom GLASHOW	(1932)	Teoría electrodébil y
PK		Abdus SALAM	(1926-1996)	predicción corrientes
US		Steve WEINBERG	(1933)	neutras.
US	1980	James W. CRONIN	(1931)	Violación de CP
US		Val L. FITCH	(1923)	en K neutros.
S	1981	Kai M. SIEGBAHN	(1918-2007)	Espectroscopía elect.
I	1984	Carlo RUBBIA	(1934)	Contribuciones al
NE		Simon VAN DER MEER	(1925-2011)	descubrimiento W y Z.
US	1988	Leon LEDERMAN	(1922)	Segunda familia
US		Melvin SCHWARTZ	(1932)	de
D		Jack STEINBERGER	(1921)	neutrinos.
US	1990	Jerome I. FRIEDMAN	(1930)	Deep
US		Henry W. KENDALL	(1926-1999)	inelastic
C		Richard E. TAYLOR	(1929)	scattering.
F	1992	Georges CHARPAK	(1924-2010)	Cámara Proporcional.
US	1995	Martin PERL	(1927)	Leptón tau
US		Frederick REINES	(1918-1998)	Descubrimiento del ν_e
NE	1999	Martinus VELTMAN	(1931)	Renormalización
NE		Gerardus 't HOOFT	(1946)	id id
US	2002	Raymond DAVIES Jr	(1914-2006)	neutrinos
JP		Masatoshi KOSHIBA	(1926)	cósmicos y
US		Riccardo GIACCONI	(1931)	fuentes rayos X
US	2004	David J. GROSS	(1941)	Libertad
US		H. David POLITZER	(1949)	Asintótica y
US		Frank WILCZEK	(1951)	QCD
US	2008	Yoichiro NAMBU	(1921)	rotura espontánea
JP		Makoto KOBAYASHI	(1944)	de simetrías y
JP		Toshihide MASKAWA	(1940)	tres familias
US	2011	Saul PERLMUTTER	(1959)	expansión acelerada
US		Brian P. SMITH	(1967)	del universo
US		Adam G. Riess	(1969)	con supernovas
UK	2014	Peter W. HIGGS	(1929)	Mecanismo de Brout-
B		François ENGLERT	(1932)	Englert-Higgs
JP	2015	Isamu AKASAKI	(1929)	Diodos de luz
JP		Iroshi AMANO	(1960)	azul
JP		Shuji NAKAMURA	(1954)	para fuentes de luz

Apéndice D: Tablas de partículas

Tabla D.1: Magnitudes físicas de los constituyentes de la materia (fermiones). Existen también las doce antipartículas correspondientes, con las cargas cambiadas de signo. Cada quark, además, posee tres grados de libertad de color, propiedad que se supone ser la responsable de la fuerza fuerte, descrita por la cromodinámica cuántica (teoría llamada QCD).

LEPTONES $S = \frac{1}{2}$ $\mathcal{B} = 0$	M (MeV/c^2)	τ (s)	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-	0,5109989	-	-1	1	0	0
ν_e	≤ 3 eV	-	0	1	0	0
μ^-	105,65837	$2{,}19703\times10^{-6}$	-1	0	1	0
ν_μ	$\leq$0,19	-	0	0	1	0
τ^-	1776,82	$0{,}2906\times10^{-12}$	-1	0	0	1
ν_τ	$\leq$18,2	-	0	0	0	1

QUARKS $S = \frac{1}{2}$ $\mathcal{B} = \frac{1}{3}$	M (GeV/c^2)	Q	I	I_3	C	S	T	B
u	0,39	2/3	1/2	1/2	0	0	0	0
d	0,39	$-1/3$	1/2	$-1/2$	0	0	0	0
c	1,60	2/3	0	0	1	0	0	0
s	0,51	$-1/3$	0	0	0	-1	0	0
t	173.5	2/3	0	0	0	0	1	0
b	5,4	$-1/3$	0	0	0	0	0	-1

Tabla D.2: Magnitudes físicas de los bosones fundamentales (Partículas fuerza).

BOSÓN ($\mathcal{B} = 0, L_\ell = 0$)	fuente del campo	M (GeV/c^2)	J^P	Q
fotón, γ	carga eléctrica	0	1^-	0
$W^\pm, Z^0$	carga débil	80,385; 91,1876	$1^+, 1^-$	$\pm$1,0
gluón, g_i(i=1,8)	color	0	1^-	0
gravitón, ϵ	masa	0	2^+	0

Tabla D.3: Tabla de mesones pseudoescalares ($J^P = 0^-$) estables (bajo interacción fuerte). El símbolo X representa una o varias partículas; se dice que son modos inclusivos, por ejemplo, eX significa una desintegración en un e^+ o un e^- más otra u otras partículas, verificándose que la carga eléctrica total sea igual a la del mesón inicial.

Mesones

Partícula (estructura en quarks)		Masa MeV/c^2	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Mesones sin extrañeza				
$\pi^{\pm}$	$(u\bar{d}, \bar{u}d)$	139,570	$2{,}603\times10^{-8}$	$\mu\nu$
π^0	$(u\bar{u}, \bar{d}d)$	134,977	$8{,}4\times10^{-17}$	$\gamma\gamma$
η^0	$(u\bar{u}, \bar{d}d)$	547,75	$5,58\times10^{-19}$	$\gamma\gamma, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
Mesones con extrañeza				
$K^{\pm}$	$(u\bar{s}, \bar{u}s)$	493,68	$1{,}238\times10^{-8}$	$\mu\nu_\mu, \pi^{\pm}\pi^0, 3\pi, \pi^0\ell^{\pm}\nu_\ell$
$K^0, \overline{K}^0$	$(d\bar{s}, \bar{d}s)$	497,65		50 % K_S^0, 50 % K_L^0
K_S^0			$0{,}895\times10^{-10}$	$\pi^+\pi^-, 2\pi^0$
K_L^0			$5{,}18\times10^{-8}$	$\pi^+\pi^-\pi^0, 3\pi^0, \pi^{\pm}\ell^{\mp}\nu_\ell$
Mesones con encanto				
$D^{\pm}$	$(c\bar{d}, \bar{c}d)$	1869,4	$1{,}04\times10^{-12}$	$eX, K^{\pm}X, K^0/\overline{K}^0X$
$D^0, \overline{D}^0$	$(u\bar{c}, \bar{u}c)$	1864,6	$0{,}410\times10^{-12}$	$eX, \mu X, KX, K^0/\overline{K}^0X$
Mesones con encanto y con extrañeza				
$D_s^{\pm}$	$(c\bar{s}, \bar{c}s)$	1968,3	$0{,}490\times10^{-12}$	$KX, K^0/\overline{K}^0X$
Mesones con belleza				
$B^{\pm}$	$(b\bar{d}, \bar{b}d)$	5279,0	$1{,}67\times10^{-12}$	$DX, D^0X/\overline{D}^0X, D^*X$
$B^0, \overline{B}^0$	$(b\bar{u}, \bar{b}u)$	5279,4	$1{,}536\times10^{-12}$	$DX, D^0X/\overline{D}^0X, D^*X$
Mesones con belleza y con extrañeza				
B_s^0	$(b\bar{s}, \bar{b}s)$	5369,6	$1{,}46\times10^{-12}$	$D_s^-X, D_s^-\pi^+$

Tabla D.4: Tabla de bariones estables (bajo interacción fuerte). Todos ellos con $J^P = J^{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}^+$ excepto el Ω^- con $J^{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}^+$. El símbolo X representa una o varias partículas; se dice que son modos inclusivos, por lo tanto ΛX significa una desintegración en un Λ^0 más otra u otras partículas.

Partícula (estructura en quarks)		Masa MeV/c^2	Vida media τ (s)	Modos de desintegración
Bariones sin extrañeza				
p	(uud)	938,272	estable	
n	(udd)	939,565	885,7±0,8	$pe^-\overline{\nu}_e$
Bariones con $S=-1$				
Λ^0	(uds)	1115,683	$2,63\times10^{-10}$	$p\pi^-$, nπ^0
Σ^+	(uus)	1189,37	$0,802\times10^{-10}$	$p\pi^0$, nπ^+
Σ^0	(uds)	1192,64	$7,4\times10^{-20}$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	(dds)	1197,45	$1,48\times10^{-10}$	$n\pi^-$
Bariones con $S=-2$				
Ξ^0	(uss)	1314,83	$2,90\times10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	(dss)	1321,31	$1,64\times10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$
Bariones con $S=-3$				
Ω^-	(sss)	1672,45	$0,82\times10^{-10}$	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$
Bariones con encanto				
Λ_c^+	(udc)	2284,9	$0,20\times10^{-12}$	$\Lambda X, pK^-\pi^+, pK^0$
Σ_c	(uuc, udc, ddc)	2452,5	-	$\Lambda_c^+\pi$
Ξ_c^+	(usc)	2466,3	$0,44\times10^{-12}$	$\Lambda K^-\pi^+\pi^+, \Sigma^+K^-\pi^+$
Ξ_c^0	(dsc)	2471,8	$0,11\times10^{-12}$	$\Xi^-\pi^+, \Xi^-\pi^+\pi^+\pi^-$
Ω_c^0	(ssc)	2697.5	$0,07\times10^{-12}$	$\Sigma KK\pi, \Omega^-\pi^+$, $\Xi K\pi\pi$
Bariones con belleza				
Λ_b^0	(udb)	5624	$1,23\times10^{-12}$	J/ψ(1S)$\Lambda, pD^0\pi^-$

Tabla D.5: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, *BR*), de bariones estables (bajo interacción fuerte).

partícula	modo desintegración	BR
$n \rightarrow$	$pe^-\bar{\nu}_e$	$\approx 100\,\%$
$\Lambda \rightarrow$	$p\pi^-$	$63{,}9 \pm 0{,}5\,\%$
	$n\pi^0$	$35{,}8 \pm 0{,}5\,\%$
	$pe^-\bar{\nu}_e$	$8{,}3(1)10^{-4}$
$\Sigma^+ \rightarrow$	$p\pi^0$	$51{,}6 \pm 0{,}3\,\%$
	$n\pi^+$	$48{,}3 \pm 0{,}3\,\%$
	$\Lambda e^+\nu_e$	$2{,}0(5)10^{-5}$
$\Sigma^0 \rightarrow$	$\Lambda\gamma$	$\approx 100\,\%$
$\Sigma^- \rightarrow$	$n\pi^-$	$99{,}85 \pm 0{,}01\,\%$
	$\Lambda e^-\bar{\nu}_e$	$5{,}7(3)10^{-5}$
	$ne^-\bar{\nu}_e$	$1{,}02(3)10^{-3}$
$\Xi^0 \rightarrow$	$\Lambda\pi^0$	$99{,}52 \pm 0{,}03\,\%$
	$\Sigma^+e^-\bar{\nu}_e$	$2{,}7(4)10^{-4}$
$\Xi^- \rightarrow$	$\Lambda\pi^-$	$99{,}89 \pm 0{,}03\,\%$
	$\Lambda e^-\bar{\nu}_e$	$5{,}6(3)10^{-4}$
	$\Sigma^0e^-\bar{\nu}_e$	$0{,}9(2)10^{-4}$

Tabla D.6: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios, BR*), de mesones pseudoescalares.

partícula	modo desintegración	BR

$\pi^+ \rightarrow$	$\mu^+\nu_\mu$	$\approx 100\,\%$
	$e^+\nu_e$	$1{,}230(4) \cdot 10^{-4}$
	$\pi^0 e^+\nu_e$	$1{,}025(34) \cdot 10^{-8}$
$\pi^0 \rightarrow$	$\gamma\gamma$	$98{,}80 \pm 0{,}03\,\%$
$\eta \rightarrow$	$\gamma\gamma$	$39{,}4 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$32{,}5 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$22{,}6 \pm 0{,}4\,\%$
	$\pi^+\pi^-\gamma$	$4{,}7 \pm 0{,}1\,\%$
$\eta' \rightarrow$	$\pi^+\pi^-\gamma$	$44{,}3 \pm 1{,}5\,\%$
	$\rho^0\gamma$	$29{,}5 \pm 1{,}0\,\%$
	$\pi^0\pi^0\eta$	$20{,}9 \pm 1{,}2\,\%$
	$\omega\gamma$	$3{,}0 \pm 0{,}3\,\%$
	$\gamma\gamma$	$2{,}1 \pm 0{,}1\,\%$
$K^+ \rightarrow$	$\mu^+\nu_\mu$	$63{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$e^+\nu_e$	$1{,}55(7) \cdot 10^{-5}$
	$\pi^+\pi^0$	$21{,}1 \pm 0{,}1\,\%$
	$\pi^+\pi^+\pi^-$	$5{,}58 \pm 0{,}03\,\%$
	$\pi^+\pi^0\pi^0$	$1{,}73 \pm 0{,}04\,\%$
	$\pi^0\mu^+\nu_\mu$	$3{,}3 \pm 0{,}1\,\%$
	$\pi^0 e^+\nu_e$	$4{,}9 \pm 0{,}1\,\%$
$K_S \rightarrow$	$\pi^+\pi^-$	$68{,}6 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^0\pi^0$	$31{,}4 \pm 0{,}3\,\%$
$K_L \rightarrow$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$21{,}1 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$12{,}6 \pm 0{,}2\,\%$
	$\pi^\pm\mu^\mp\nu_\mu$	$27{,}2 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^\pm e^\mp\nu_e$	$38{,}8 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-$	$2{,}08(3) \cdot 10^{-3}$
	$\pi^0\pi^0$	$0{,}94(2) \cdot 10^{-3}$
	$\mu^+\mu^-$	$7{,}3(2) \cdot 10^{-9}$

Tabla D.7: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, *BR*), de mesones con encanto.

partícula	modo desintegración	BR
$D^+ \to$	$e^+\nu_e + X$	$17{,}2 \pm 1{,}9\,\%$
$D^0 \to$	$e^+\nu_e + X$	$6{,}9 \pm 0{,}3\,\%$
$D^+ \to$	$\mu^+\nu_\mu$	$11(6) \cdot 10^{-4}$
	$\bar{K}^0 l^+\nu_l$	$6{,}8 \pm 0{,}8\,\%$
	$\bar{K}^{*0} l^+\nu_l$	$4{,}7 \pm 0{,}4\,\%$
	$\rho^0 l^+\nu_l$	$2{,}5 \pm 0{,}6\,\%$
	$\pi^0 l^+\nu_l$	$3{,}1 \pm 1{,}5\,\%$
	$\bar{K}^0\pi^+$	$2{,}8 \pm 0{,}2\,\%$
	$\bar{K}^{*0}\pi^+$	$1{,}3 \pm 0{,}1\,\%$
	$\bar{K}^0\rho^+$	$6{,}6 \pm 2{,}5\,\%$
	$\pi^+\pi^0$	$2{,}5(7)10^{-3}$
	$\pi^+\rho^0$	$1{,}0(2)10^{-3}$
	$K^+\bar{K}^0$	$5{,}8(6)10^{-3}$
	$\phi\pi^+$	$6{,}1(6)10^{-3}$
	$K^+\rho^0$	$0{,}25(12)10^{-3}$
$D^0 \to$	$K^- l^+\nu_l$	$3{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$K^{*-} e^+\nu_e$	$1{,}4 \pm 0{,}2\,\%$
	$\pi^- e^+\nu_e$	$3{,}6(6)10^{-3}$
	$K^-\pi^+$	$3{,}8 \pm 0{,}1\,\%$
	$\bar{K}^0\pi^0$	$2{,}3 \pm 0{,}2\,\%$
	$\bar{K}^0\rho^0$	$1{,}5 \pm 0{,}3\,\%$
	$K^-\rho^+$	$10{,}2 \pm 0{,}9\,\%$
	$K^{*-}\pi^+$	$2{,}0 \pm 0{,}2\,\%$
	$K^{*0}\pi^0$	$1{,}9 \pm 0{,}3\,\%$
	$\pi^+\pi^-$	$1{,}4(1)10^{-3}$

	$\pi^0\pi^0$	$0{,}8(2)10^{-3}$
	K^+K^-	$4{,}1(1)10^{-3}$
	$K^0\bar{K}^0$	$0{,}7(2)10^{-3}$
	$K^+\pi^-$	$1{,}5(2)10^{-4}$

Tabla D.8: Tabla de modos de desintegración y cocientes de desintegración (*branching ratios*, *BR*), de mesones con belleza.

partícula	modo desintegración	BR
$B^+ \to$	$l^+\nu_l + X$	$10{,}2 \pm 0{,}9\,\%$
$B^0 \to$	$l^+\nu_l + X$	$10{,}5 \pm 0{,}8\,\%$
$B^+ \to$	$\bar{D}^0 l^+\nu_l$	$2{,}15 \pm 0{,}22\,\%$
	$\bar{D}^{*0} l^+\nu_l$	$5{,}30 \pm 0{,}80\,\%$
	$\pi^0 l^+\nu_l$	$0{,}9(3)10^{-4}$
	$\rho^0 l^+\nu_l$	$1{,}3(3)10^{-4}$
	$\mu^+\nu_\mu$	$< 2{,}1 \cdot 10^{-5}$
	$\bar{D}^0\pi^+$	$0{,}53 \pm 0{,}05\,\%$
	$\bar{D}^0\rho^+$	$1{,}34 \pm 0{,}18\,\%$
	$\bar{D}^{*0}\pi^+$	$0{,}46 \pm 0{,}04\,\%$
	$\bar{D}^{*0}\rho^+$	$1{,}55 \pm 0{,}31\,\%$
	$\bar{D}^0 D_s^+$	$1{,}3 \pm 0{,}4\,\%$
	$\bar{D}^{*0} D_s^+$	$1{,}2 \pm 0{,}5\,\%$
	$J/\psi K^+$	$1{,}0(1)10^{-3}$
	$J/\psi K^{*+}$	$1{,}4(1)10^{-3}$
	$K^0\pi^+$	$1{,}7(3)10^{-5}$
	$\Lambda_c^- p\pi^+$	$0{,}6(3)10^{-3}$
$B^0 \to$	$D^- l^+\nu_l$	$2{,}11 \pm 0{,}14\,\%$
	$D^{*-} l^+\nu_l$	$4{,}60 \pm 0{,}21\,\%$
	$\pi^- l^+\nu_l$	$1{,}8(6)10^{-4}$
	$\rho^- l^+\nu_l$	$2{,}6(6)10^{-4}$

	$\mu^+\mu^-$	$< 6{,}1 \cdot 10^{-7}$
	$D^-\pi^+$	$0{,}30 \pm 0{,}04\,\%$
	$D^-\rho^+$	$0{,}78 \pm 0{,}14\,\%$
	$D^{*-}\pi^+$	$0{,}28 \pm 0{,}02\,\%$
	$D^{*-}\rho^+$	$0{,}73 \pm 0{,}15\,\%$
	$D^-D_s^+$	$0{,}80 \pm 0{,}30\,\%$
	$D^{*-}D_s^+$	$1{,}11 \pm 0{,}33\,\%$
	$J/\psi K^0$	$0{,}9(1)10^{-3}$
	$J/\psi K^{*0}$	$1{,}3(1)10^{-3}$
	$K^+\pi^-$	$1{,}7(2)10^{-5}$
	$\Lambda_c^- p\pi^+\pi^-$	$1{,}3(6)10^{-3}$

Tabla D.9: Tabla de multipletes de isospín de mesones conocidos. Entre paréntesis, la masa en MeV; el isospín y la paridad G, I^G, así como el espín, paridad y conjugación de carga, J^{PC}. Los mesones con el signo ▸ están, experimentalmente, bien establecidos.

Mesones sin extrañeza ($S = C = B = 0$)

Mesón	$I^G(J^{PC})$	Mesón	$I^G(J^{PC})$
▸ π	$1^-(0^{-+})$	▸ $\pi_1\,(1600)$	$1^-(1^{-+})$
▸ $\eta\,(547)$	$0^+(0^{-+})$	$a_1(1640)$	$1^-(1^{++})$
$f_0(600)$	$0^+(0^{++})$	$f_2(1640)$	$0^+(2^{++})$
▸ $\rho(770)$	$1^+(1^{--})$	▸ $\eta_2(1645)$	$0^+(2^{-+})$
▸ $\omega(782)$	$0^-(1^{--})$	▸ $\omega(1650)$	$0^-(1^{-+})$
▸ $\eta'(958)$	$0^+(0^{-+})$	▸ $\omega_3(1670)$	$0^-(3^{--})$
$f_0(980)$	$0^+(0^{++})$	$\pi_2\,(1670)$	$1^-(2^{-+})$
▸ $a_0(980)$	$1^-(0^{++})$	▸ $\phi\,(1680)$	$0^-(1^{--})$
▸ $\phi(1020)$	$0^-(1^{--})$	▸ $\rho_3(1690)$	$1^+(3^{--})$
$h_1(1170)$	$0^-(1^{+-})$	$\rho(1700)$	$1^+(1^{--})$
▸ $b_1(1235)$	$1^+(1^{+-})$	$a_2(1700)$	$1^-(2^{++})$
▸ $a_1(1260)$	$1^-(1^{++})$	$f_0(1710)$	$0^+(0^{++})$
▸ $f_2(1270)$	$0^+(2^{++})$	$\eta(1760)$	$0^+(0^{-+})$
▸ $f_1(1285)$	$0^+(1^{++})$	$\pi(1800)$	$1^-(0^{-+})$

►	$\eta(1295)$	$0^+(0^{-+})$	$f_2(1810)$ $0^+(2^{++})$
►	$\pi(1300)$	$1^-(0^{-+})$	$X(1835)$
►	$a_2(1320)$	$1^-(2^{++})$	► $\phi_3(1850)$ $0^-(3^{--})$
	$f_0(1370)$	$0^+(0^{++})$	$\eta_2(1870)$ $0^+(2^{-+})$
►	$\pi_1(1400)$	$1^-(1^{-+})$	$\rho(1900)$ $1^+(1^{--})$
	$\eta(1405)$	$0^+(0^{-+})$	$f_2(1910)$ $0^+(2^{++})$
►	$f_1(1420)$	$0^+(1^{++})$	$f_2(1950)$ $0^+(2^{++})$
►	$\omega(1420)$	$0^-(1^{--})$	$\rho_3(1990)$ $1^+(3^{--})$
	$f_2(1430)$	$0^+(2^{++})$	$f_2(2010)$ $0^+(2^{++})$
►	$a_0(1450)$	$1^-(0^{++})$	$f_0(2020)$ $0^+(0^{++})$
	$\rho(1450)$	$1^+(1^{--})$	$a_4(2040)$ $1^-(4^{++})$
	$\eta(1475)$	$0^+(0^{-+})$	► $f_4(2050)$ $0^+(4^{++})$
	$f_0(1500)$	$0^+(0^{++})$	$\pi_2(2100)$ $1^-(2^{-+})$
	$f_1(1510)$	$0^+(1^{++})$	$f_0(2100)$ $0^+(0^{++})$
►	$f_2'(1525)$	$0^+(2^{++})$	$f_2(2150)$ $0^+(2^{++})$
	$f_2(1565)$	$0^+(2^{++})$	$\rho(2150)$ $1^+(1^{--})$
	$h_1(1595)$	$0^-(1^{+-})$	$f_0(2200)$ $0^+(0^{++})$

Tabla D.10: Tabla de multipletes de isospín de mesones conocidos, ordenados según su extra˜neza, *S*, encanto, *C* y belleza, *B*. Entre paréntesis, se indica la masa en MeV, el isospín y la paridad *G*, I^G, así como el espín, paridad y conjugación de carga, J^{PC}. Los mesones con el signo ▸ están, experimentalmente, bien establecidos.

Sin extrañeza $(S = C = B = 0)$			Con extrañeza $(\|S\| = 1)$	
Mesón	Masa	$I^G(J^{PC})$	Mesón	$I(J^P)$
	Mesones $c\bar{c}$		► K	$\frac{1}{2}(0^-)$
			► $K^*(892)$	$\frac{1}{2}(1^-)$
			► $K_1(1270)$	$\frac{1}{2}(1^+)$
► $\eta_c(1S)$	(2980)	$0^+(0^{-+})$	► $K_1(1400)$	$\frac{1}{2}(1^+)$

▶ $J/\psi(1S)$	(3097)	$0^-(1^{--})$
▶ $\chi_{c0}(1P)$	(3415)	$0^+(0^{++})$
▶ $\chi_{c1}(1P)$	(3510)	$0^+(1^{++})$
▶ $\chi_{c2}(1P)$	(3556)	$0^+(2^{++})$
$\eta_c(2S)$	(3638)	$0^+(0^{-+})$
▶ $\psi(2S)$	(3685)	$0^-(1^{--})$
▶ ψ	(3770)	$0^-(1^{--})$
▶ $\chi_{c2}(2P)$	(3929)	$0^+(2^{++})$
▶ ψ	(4040)	$0^-(1^{--})$
▶ ψ	(4160)	$0^-(1^{--})$
▶ ψ	(4415)	$0^-(1^{--})$

Mesones $b\bar{b}$

▶ $\Upsilon(1S)$	(9460)	$0^-(1^{--})$
▶ $\chi_{b0}(1P)$	(9860)	$0^+(0^{++})$
▶ $\chi_{b1}(1P)$	(9895)	$0^+(1^{++})$
▶ $\chi_{b2}(1P)$	(9915)	$0^+(2^{++})$
▶ $\Upsilon(2S)$	(10023)	$0^-(1^{--})$
$\chi_{b0}(2P)$	(10232)	$0^+(0^{++})$
▶ $\chi_{b1}(2P)$	(10255)	$0^+(1^{++})$
▶ $\chi_{b2}(2P)$	(10269)	$0^+(2^{++})$
▶ $\Upsilon(3S)$	(10355)	$0^-(1^{--})$
▶ $\Upsilon(4S)$	(10580)	$0^-(1^{--})$
▶ Υ	(10860)	$0^-(1^{--})$
▶ Υ	(11020)	$0^-(1^{--})$

$K^*(1410)$	$\frac{1}{2}(1^-)$
▶ $K_0^*(1430)$	$\frac{1}{2}(0^+)$
▶ $K_2^*(1430)$	$\frac{1}{2}(2^+)$
$K(1460)$	$\frac{1}{2}(0^-)$
$K^*(1680)$	$\frac{1}{2}(1^-)$
▶ $K_2(1770)$	$\frac{1}{2}(2^-)$
▶ $K_3^*(1780)$	$\frac{1}{2}(3^-)$
$K_2(1820)$	$\frac{1}{2}(2^-)$
$K(1830)$	$\frac{1}{2}(0^-)$
▶ $K_4^*(2045)$	$\frac{1}{2}(4^+)$
$K_2(2250)$	$\frac{1}{2}(2^-)$
$K_3(2320)$	$\frac{1}{2}(3^+)$
$K_4(2500)$	$\frac{1}{2}(4^-)$

Con encanto; $(|C| = 1)$

▶ D	$\frac{1}{2}(0^-)$
▶ $D^*(2010)$	$\frac{1}{2}(1^-)$
$D^*(2420)$	$\frac{1}{2}(\ \ )$
▶ D_s	$0\,(0^-)$
$D_s^*(2110)$	

Con belleza; $(|B| = 1)$

▶ B	$\frac{1}{2}(0^-)$
$B^*(5325)$	$\frac{1}{2}(1^-)$

Tabla D.11: Tabla de bariones conocidos. Entre par´entesis, se indica la masa en MeV. Tambi ´ en se dan los n´umeros cu´anticos de la resonancia en la notación $L_{2I,\,2J}$ (L la onda resonante, I el isospín y J el momento angular total, que es el esp ´ín del bari´on). El n´umero de estrellas representa la calidad de los datos experimentales. Una estrella indica evidencia d´ebil y cuatro estrellas significa total certeza sobre la existencia del bari´on.

$N(939)P11$	★★★★	$\Delta(1232)P33$	★★★★	$Z_0(1780)P01$	★	$\Sigma(1193)P11$	★★★★	$\Xi(1318)P11$	★★★★
$N(1440)P11$	★★★★	$\Delta(1600)P33$	★★★	$Z_0(1865)D03$	★	$\Sigma(1385)P13$	★★★★	$\Xi(1530)P13$	★★★★
$N(1520)D13$	★★★★	$\Delta(1620)S31$	★★★★	$Z_1(1725)P11$	★	$\Sigma(1480)P13$	★	$\Xi(1620)$	★
$N(1535)S11$	★★★★	$\Delta(1700)D33$	★★★★	$Z_1(1900)P13$	★	$\Sigma(1560)$	★★	$\Xi(1690)$	★★★
$N(1540)P13$	★	$\Delta(1750)P31$	★	$Z_1(2150)$	★	$\Sigma(1580)D13$	★★	$\Xi(1820)D13$	★★★
$N(1650)S11$	★★★★	$\Delta(1900)S31$	★★★	$Z_1(2500)$	★	$\Sigma(1620)S11$	★★	$\Xi(1950)$	★★★
$N(1675)D15$	★★★★	$\Delta(1905)F35$	★★★★			$\Sigma(1660)P11$	★★★	$\Xi(2030)$	★★★
$N(1680)F15$	★★★★	$\Delta(1910)P31$	★★★★	$\Lambda(1116)P01$	★★★★	$\Sigma(1670)D13$	★★★★	$\Xi(2120)$	★
$N(1700)D13$	★★★	$\Delta(1920)P33$	★★★	$\Lambda(1405)S01$	★★★★	$\Sigma(1690)$	★★	$\Xi(2250)$	★★
$N(1710)P11$	★★★	$\Delta(1930)D35$	★★★	$\Lambda(1520)D03$	★★★★	$\Sigma(1750)S11$	★★★	$\Xi(2370)$	★★
$N(1720)P13$	★★★★	$\Delta(1940)D33$	★	$\Lambda(1600)P01$	★★★	$\Sigma(1770)P11$	★	$\Xi(2500)$	★
$N(1900)P13$	★★	$\Delta(1950)F37$	★★★★	$\Lambda(1670)S01$	★★★★	$\Sigma(1775)D15$	★★★★		
$N(1990)F17$	★★	$\Delta(2000)F35$	★★	$\Lambda(1690)D03$	★★★★	$\Sigma(1840)P13$	★	$\Omega(1672)P03$	★★★★
$N(2000)F15$	★★	$\Delta(2150)S31$	★	$\Lambda(1800)S01$	★★★	$\Sigma(1880)P11$	★★	$\Omega(2250)$	★★★
$N(2080)D13$	★★	$\Delta(2200)G37$	★	$\Lambda(1810)P01$	★★★	$\Sigma(1915)F15$	★★★★	$\Lambda_c(2285)$	★★★★
$N(2090)S11$	★	$\Delta(2300)H39$	★★	$\Lambda(1820)F05$	★★★★	$\Sigma(1940)D13$	★★★	$\Lambda_c(2593)$	★★★
$N(2100)P11$	★	$\Delta(2350)D35$	★	$\Lambda(1830)D05$	★★★★	$\Sigma(2000)S11$	★	$\Lambda_c(2625)$	★★★
$N(2190)G17$	★★★★	$\Delta(2390)F37$	★	$\Lambda(1890)P03$	★★★★	$\Sigma(2030)F17$	★★★★	$\Sigma_c(2455)$	★★★★
$N(2200)D15$	★★	$\Delta(2400)G39$	★★	$\Lambda(2000)$	★	$\Sigma(2070)F15$	★	$\Sigma_c(2520)$	★★★
$N(2220)H19$	★★★★	$\Delta(2420)H3,11$	★★★★	$\Lambda(2020)F07$	★	$\Sigma(2080)P13$	★★		
$N(2250)G19$	★★★★	$\Delta(2750)I3,13$	★★	$\Lambda(2100)G07$	★★★★	$\Sigma(2100)G17$	★	$\Xi_c(2465)$	★★★
$N(2600)I1,11$	★★★	$\Delta(2950)K3,15$	★★	$\Lambda(2110)F05$	★★★	$\Sigma(2250)$	★★★	$\Xi_c(2645)$	★★★
$N(2700)K1,13$	★★	$\Delta(3000)$		$\Lambda(2325)D03$	★★	$\Sigma(2455)$	★★		
$N(3000)$				$\Lambda(2350)H09$	★★★	$\Sigma(2620)$	★★	$\Omega_c(2704)$	★★★

Apéndice E: La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac surge de la idea de invariancia relativista (lineal en las derivadas respecto a *x* y *t*). El Hamiltoniano se escribe

$$H = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{p}}c + \beta mc^2) \tag{E.1}$$

La solución para una partícula libre se obtiene al exigir $H\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$. Aplicando el principio de sustitución y además exigiendo que la ecuación lineal cumpla la ecuación de Klein-Gordon, resulta entonces que los coeficientes $\vec{\alpha}$ y β no pueden ser escalares, sino matrices 4 × 4, que se designarán en lo que sigue como las matrices γ_μ, quedando:

$$(i\hbar c\gamma_\mu \partial^\mu - mc^2)\psi(x) = 0 \tag{E.2}$$

siendo $\psi(\mathbf{x})$ el llamado biespinor de Dirac, de cuatro componentes;

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

p^μ, el cuadrivector energía-momento $(E/c, \vec{\mathrm{p}})$ y γ^μ, las matrices (4×4) de Dirac, que cumplen las relaciones de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \qquad \text{(E.3)}$$

En física de partículas es necesario recurrir a la ecuación de Dirac debido a la naturaleza relativista de los procesos entre partículas. El biespinor de Dirac describe dos estados, ϕ y χ, llamados espinores; uno correspondiente a la solución con energía positiva y otro a la negativa: $E = \pm\sqrt{\mathrm{p}^2c^2 + m^2c^4}$ asociados respectivamente a estados de partícula y antipartícula. Cada espinor contiene los dos estados de polarización de las partículas de espín 1/2. Con esto, las partículas y antipartículas tienen las mismas propiedades (*M*, *J*,…) excepto las magnitudes electromagnéticas, (carga, momento magnético), que cambian de signo.

Una representación (llamada de Dirac-Pauli) de las matrices γ(4×4) de Dirac (donde se a˜nade la matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, muy útil) es:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{\alpha}$ las matrices (2×2) de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que cumplen $\sigma_i^2 = \mathrm{I}, Tr(\sigma_i) = 0, det(\sigma_i) = -1$. En lo anterior, I representala matriz unidad 2×2.

Las matrices de Pauli, permiten definir el operador espín de un fermión de espín 1/2:

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\hbar$$

Fijada una dirección, utilizando un campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ o un campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$, se puede definir la polarización del fermión, que no es más que la proyección del espín sobre el eje *z* definido por el campo externo:

$$s_z = \frac{1}{2}\sigma_3\hbar$$

Una variante de la polarización es la helicidad. En este caso se utiliza la propia dirección de moviento del fermión, gracias a su vector momento $\vec{p}$ y se define como

$$h = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|p|}$$

que toma los valores ±1. El signo +1 define una helicidad dextrógira y el signo −1 la levógira. Para partículas masivas, esta magnitud no es un invariante Lorentz; siempre existirá un sistema de coordenas en el que, si un observador viaja a una velocidad superior a la del fermión, medirá una helicidad opuesta a la del caso en el que viaje a una velocidad inferior. Sin embargo, si la partícula tiene masa nula, como viaja a la velocidad *c*, su helicidad será siempre la misma; o sea, un invariante Lorentz.

Las soluciones de la ecuación de Dirac correspondientes a una partícula libre de masa *m* y cuadrimomento p_μ pueden escribirse como ondas planas, $\psi(\mathbf{x}) = Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)/\hbar}$, siendo *N* una constante de normalización, de forma que los biespinores $\psi(\mathbf{x})$ dan lugar, en el espacio de momentos, a los biespinores $u(\mathbf{p})$, al escribir

$$\psi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})e^{-ip^\mu x_\mu} \qquad \text{(E.4)}$$

Los biespinores $u(\mathbf{p})$ cumplen la ecuación:

$$(\gamma_\mu p^\mu c - mc^2)u = 0$$

y el biespinor conjugado $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 = (u_1^*, u_2^*, -u_3^*, -u_4^*)$ cumple:

$$\bar{u}(\gamma_\mu p^\mu c - mc^2) = 0$$

y tras cuantizarlos, se interpretan como operadores de creación, $\overline{u}$, o destrucción, u.

Con dos biespinores, por ejemplo a y b, y las cinco matrices γ se pueden construir cinco cantidades covariantes:

$$\bar{a}b,\ \bar{a}\gamma_5 b,\ \bar{a}\gamma_\mu b,\ \bar{a}\gamma_\mu\gamma_5 b,\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{a}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)b$$

que se transforman como un escalar, pseudoescalar, vector, vector axial y tensor, respectivamente.

La matriz γ_5 permite definir los operadores proyección P_R y P_L, que dan lugar a los biespinores Ψ_R y Ψ_L, con chiralidad positiva (R) y negativa (L), respectivamente. La chiralidad es una propiedad fundamental ya que según el Modelo Estándar, los fermiones fundamentales se acoplan con el bosón cargado $W^\pm$, sólo si tienen chiralidad negativa. Se cumple, pues,

$$\psi_R = P_\mathrm{R}\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \qquad\qquad \psi_L = P_\mathrm{L}\psi = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

y es fácil comprobar, por ejemplo, que

$$\psi_L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ \chi - \varphi \end{pmatrix}$$

en donde el espinor de arriba, representa al fermión y el de abajo al antifermión. Se demuestra a continuación que los dos estados de partícula y antipartícula son superposiciones de estados con helicidad + y −, de forma que se puede verificar que el valor esperado de la helicidad

$$h = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|p|}$$

de un fermión con chiralidad ± es $h = \pm\beta$, y que toma el valor $h = \pm 1$ para fermiones de masa nula. En efecto, a partir de la ecuación de Dirac se obtiene:

$$\varphi = \frac{\vec{p}c \cdot \vec{\sigma}}{E - mc^2}\chi \qquad\qquad \chi = \frac{\vec{p}c \cdot \vec{\sigma}}{E + mc^2}\varphi$$

y se puede escribir para el fermión:

$$\frac{1}{2}(\varphi - \chi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p_z c}{E - mc^2}\right)\varphi^+ + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_z c}{E + mc^2}\right)\varphi^- = H_+\varphi^+ + H_-\varphi^-$$

siendo $\phi^{\pm}$ los estados propios de helicidad. El valor esperado de la helicidad se calculará utilizando el cuadrado de las amplitudes H_+ y H_- correspondientes: $h = (H_+^2 - H_-^2)/(H_+^2 + H_-^2) = \pm\beta$. Para fermiones de masa nula (que no existen en la naturaleza) se cumpliría $E = p_z c$, luego se verifica que la helicidad es efectivamente $h = -1$ para el fermión. Si se hace el cálculo para el antifermión con chiralidad L, cuyo estado viene dado por $\frac{1}{2}(\chi - \varphi)$, se obtiene $h = +\beta$, y en el caso de masa nula (que tampoco existe en la naturaleza), como en este caso $E = -p_z c$, la helicidad sería $h = +1$ y sería un invariante Lorentz, como se ha demostrado más arriba.

Apéndice F: Funciones especiales

F.1 Los armónicos esféricos

El hamiltoniano que describe el movimiento de una partícula en un campo central $V(r)$,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

cumple$[H, L^2] = 0$ y $[H, L_z] = 0$ siendo L el operador momento angular. Por lo tanto, la función de ondas se puede escribir,

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

y los armónicos esféricos son funciones propias de los operadores L^2 y L_z:

$$L^2\, Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2\, Y_{\ell,m}$$
$$L_z\, Y_{\ell,m} = m\hbar\, Y_{\ell,m}$$

Su expresión es:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

con $\varepsilon = (-1)^m$ si $m \geq 0$ y $\varepsilon = 1$ si $m \leq 0$. Las funciones $Y_{\ell m}$, están convenientemente normalizadas:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} -d(\cos\theta) Y^*_{\ell,m} Y_{\ell',m'} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

Se cumplen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Y_{\ell,-m} &= (-1)^m Y^*_{\ell,m} \\ Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\pi+\phi) &= (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \\ Y_{\ell,m}(0,\phi) &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4}}\delta_{m0} \end{aligned}$$

Es muy útil introducir $L_\pm = L_x \pm iL_y$ conloque

$$L_\pm Y_{\ell,m} = \hbar\sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)} Y_{\ell,m\pm1}$$

Los polinomios de Legendre coinciden con

$$P_\ell(\cos(\theta)) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,0}(\theta)$$

F.2 Tabla de armónicos esféricos

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta & Y_{1,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \\ Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) & Y_{2,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \\ & & Y_{2,\pm2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} \end{aligned}$$

F.3 Tensores esféricos

Un tensor esférico Ψ_{jm} se transforma bajo una rotación definida por los ángulos de Euler α, β, γ:

$$\Psi_{jm'} = \sum_m \Psi_{jm} \mathcal{D}^J_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$$

es decir, forma un grupo irreducible bajo rotaciones, con lo que puede simplificarse:

$$\mathcal{D}^J_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(\alpha m + \gamma m')} d^J_{mm'}(\beta)$$

siendo $d^J_{mm'}(\beta) \equiv \langle jm \mid e^{-i\beta J_y} \mid jm' \rangle$, las matrices de rotación reducidas.

F.4 Matrices de rotación $d^{(j)}_{mm'}(\theta)$

Las matrices de rotación $d^{(j)}_{mm'}(\theta)$ dan los coeficientes de la transformación

$$R_y(\theta)|jm\rangle = e^{-i\theta J_y}|jm\rangle = \sum_{m'} d^{(j)}_{mm'}(\theta)|jm'\rangle$$

y sus valores se pueden obtener como se describe a continuación.

Caso $j=\frac{1}{2}$

Se tiene en este caso $J_y = \sigma_y$, y como

$$R_y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = I\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

con lo que

$$d^{(1/2)}_{-1/2,1/2} = -d^{(1/2)}_{1/2,-1/2} = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{(1/2)}_{1/2,1/2} = d^{(1/2)}_{-1/2,-1/2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

Caso j = 1

Análogamente se obtiene

$$d^{(1)}_{0,0} = \cos\theta$$

$$d^{(1)}_{1,0} = -d^{(1)}_{0,1} = d^{(1)}_{0,-1} = -d^{(1)}_{-1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{(1)}_{1,1} = d^{(1)}_{-1,-1} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

$$d^{(1)}_{-1,1} = d^{(1)}_{1,-1} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

Se cumple la igualdad $d^{(\ell)}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell,m}e^{-im\phi}$.

F.5 Coeficientes de momento angular

En general, el producto de dos tensores esféricosnoes untensoresférico. Por ejemplo el producto de dos vectores puede dar lugar a

- un escalar $\vec{r}\cdot\vec{r}'$,
- un vector axial $\vec{r}\times\vec{r}'$

- o al producto tensorial $\frac{1}{2}(r_i r'_j + r_j r'_i) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} r_k r'_k$

con respectivamente una, tres y cinco componentes.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan dan la proyección del estado $|jm\rangle$ sobre el producto $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$.

$$C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \equiv \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle$$

Los símbolos de Wigner (3-*j*), los de Racah (6-*j*) así como los símbolos 9-*j* son coeficientes del producto de dos, tres o cuatro tensores esféricos.

F.6 La fórmula de Landé

Permite calcular el valor esperado de un operador vectorial $\overline{V}$ (tensor esférico de rango 1), a partir del producto escalar $\vec{J} \cdot \overline{V}$:

$$\langle JM|V_q|JM'\rangle = \frac{1}{J(J+1)}\langle JM|\vec{J}\cdot\vec{V}|JM\rangle\langle JM|\hat{J}_q|JM\rangle$$

F.7 Propiedades de la función δ de Dirac

1. $\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d\vec{r} = f(\vec{r}_0) \longrightarrow \int f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0),$
2. $\int f(x)\delta[g(x)]dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \longrightarrow \int \delta[g(x)]dx = \frac{1}{|g'(x_0)|}.$

F.8 Tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan

En las tablas que siguen, se dan ejemplos de coeficientes de Clebsch-Gordan, utilizables en casos sencillos de composición de estados de momento angular (o de isospín). Primero las tablas $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, $1 \times \frac{1}{2}$ y 1×1 y, a continuación, se reproducen las conocidas tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan que aparecen en las publicaciones del PDG, donde se entiende que falta la raíz cuadrada de cada coeficiente (http://pdg.lbl.gov).

Sean dos partículas (o núcleos) con momento angular $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$, con terceras componentes m_1 y m_2. El momento angular total será $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, tomará cualquier valor entre $|j_1 - j_2| \leq J \leq |j_1 + j_2|$ y la tercera componente será $M = m_1 + m_2$ (véase la sección 16.4).

Los coeficientes de Clebsch-Gordan, C_J, dan las amplitudes del estado formado por las dos partículas teniendo en cuenta los valores permitidos de J:

$$\phi_1(j_1, m_1)\phi_2(j_2, m_2) = \sum_J C_J \psi(J, M)$$

por ello se suelen denominar también $C^{JM}_{m_1 m_2}$ o $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$. Por ejemplo, sean dos partículas con $j_1 = 1$, $m_1 = 1$ y $j_2 = 1$, $m_2 = -1$. La cuartalínea de la tabla 1 × 1, da la descomposición:

$$\phi_1(1,1)\phi_2(1,-1) = \sqrt{\frac{1}{6}}\psi(2,0) + \sqrt{\frac{1}{2}}\psi(1,0) + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi(0,0)$$

Alternativamente, como J = 0,1, 2, se puede encontrar la forma del estado con $J = 1$ y $M = 0$ (úsese entonces la quinta columna de la tabla):

$$\psi(1,0) = \sqrt{\frac{1}{2}}\phi_1(1,1)\phi_2(1,-1) - \sqrt{\frac{1}{2}}\phi_1(1,-1)\phi_2(1,1)$$

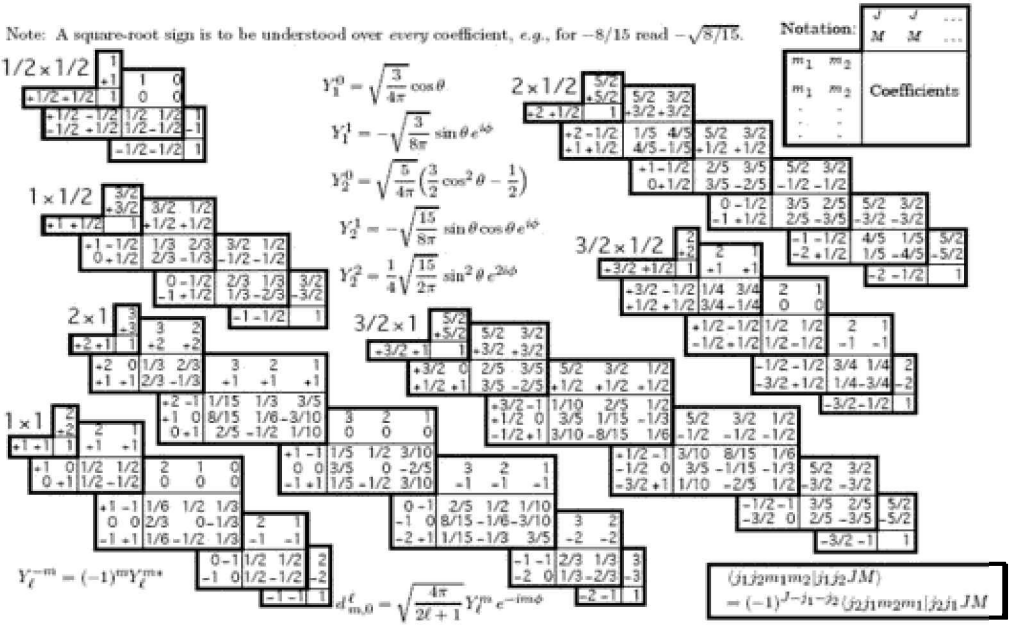
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$						
		$J=$	1	1	0	1
m_1	m_2	$M=$	$+1$	0	0	-1
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		1			
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					1

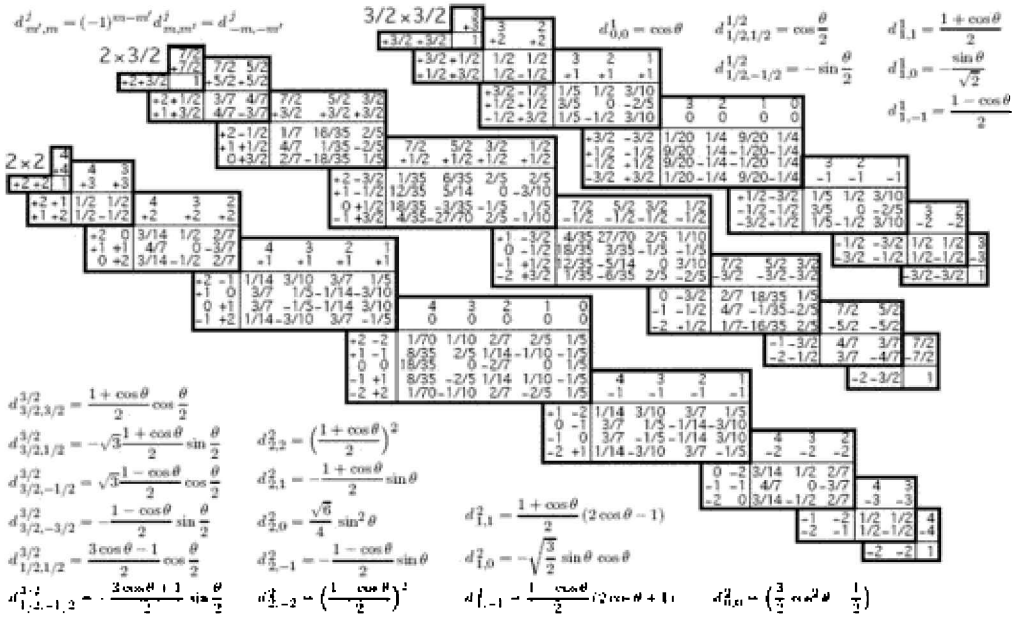
$1 \times \frac{1}{2}$

m_1	m_2	$J=$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		$M=$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$+1$	$+\frac{1}{2}$		1					
$+1$	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$			
0	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
-1	$+\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$							1

1×1

m_1	m_2	$J=$ $M=$ 2 (+2)	2 (+1)	1 (+1)	2 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (−1)	1 (−1)	2 (−2)
+1	+1	1								
+1	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$						
0	+1		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$						
+1	−1				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	0				$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
−1	+1				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	−1							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
−1	0							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
−1	−1									1




$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$
$d^0_{0,0} = \cos\theta$
$d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2}$
$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$
$d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$
$d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$
$d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$
$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$
$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$
$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$
$d^2_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$
$d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$
$d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$
$d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$
$d^2_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$
$d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$
$d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$
$d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$
$d^2_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$

Apéndice G: Masas atómicas

G.1 Defectos de masa atómica de los núcleos

Los datos presentados en la siguiente tabla han sido extraídos de la versión de la base de datos *NUBASE* de 2012, *The Nubase2012 evaluation of nuclear properties*; G. Audi, F. G. Kondev, M. Wang, B. Pfeiffer, X. Sun, J. Blachot, M. MacCormick; *Chinese Physics* C36 (2012) 1157-1286.

Los defectos de masa de los nucleidos, $\Delta = M_a(Z, N) - A \cdot u$, vienen dados en keV. Los núcleos estables están se˜nalados con un asterisco (*), y en el caso de los inestables se indica el modo dominante de desintegración (α, $\beta^{\pm}$, CE, fisión, emisión de nucleón n, p, $2n$ o $2p$). Para los núcleos estables, se da la abundancia y para los inestables, el semiperiodo. Si algún valor del defecto de masa se se˜nala con una diéresis (#), es un valor estimado, utilizando datos de núcleos vecinos y no ha sido confirmado experimentalmente. Porúltimo, también se presentan los valores del espín y la paridad del estado fundamental del nucleido. Si los datos están entre paréntesis, son valores probables, aunque con menos evidencia que los que no están entre paréntesis.

La siguiente tabla muestra los múltiplos y submúltiplos utilizados, tomando como ejemplo la magnitud tiempo, cuya unidad es el segundo.

ms	10^{-3}	milisegundo	ka	10^{3}	kiloaño
μs	10^{-6}	microsegundo	Ma	10^{6}	megaaño
ns	10^{-9}	nanosegundo	Ga	10^{9}	gigaaño
ps	10^{-12}	picosegundo	Ta	10^{12}	teraaño
fs	10^{-15}	femtosegundo	Pa	10^{15}	petaaño
as	10^{-18}	attosegundo	Ea	10^{18}	exaaño
zs	10^{-21}	zeptosegundo	Za	10^{21}	zettaaño
ys	10^{-24}	yoctosegundo	Ya	10^{24}	yottaaño

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
			$_0$n		
1	8071	β^-	613.9	s	$\frac{1}{2}^+$
			$_1$H		
1	7289	s	99,99	%	$\frac{1}{2}^+$
2	13135	s	.01	%	1^+
3	14949	β^-	12.3	a	$\frac{1}{2}^+$
4	21620	n	139,0	ys	2^-
5	#32890	2n	910	ys	$(\frac{1}{2}^+)$
6	41880	n	290,0	ys	#2^-
7	#49140	2n	#500	ys	#$\frac{1}{2}^+$
			$_2$He		
3	14931	s	.00	%	$\frac{1}{2}^+$
4	2424	s	100,00	%	0^-
5	11231	n	700,0	ys	$\frac{3}{2}^-$
6	17592	β^-	806.9	ms	0^-
7	26073	n	3.1	zs	$(\frac{3}{2})^-$
8	31609	β^-	119,1	ms	0^+
9	40940	n	8.0	zs	$\frac{1}{2}^-$
10	49170	2n	3,1	zs	0^+
			$_3$Li		
4	25320	p	91,0	ys	2^-
5	11680	p	370,0	ys	$\frac{3}{2}^-$
6	14086	s	7.59	%	1^+
7	14907	s	92,41	%	$\frac{3}{2}^-$
8	20945	β^-	839,4	ms	2^+
9	24954	β^-	178.3	ms	$\frac{3}{2}^-$
10	33053	n	2,0	zs	$(1^-,2^-)$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
			$_6$C		
13	3125	s	1,07	%	$\frac{1}{2}^-$
14	3019	β^-	5,7	ka	0^+
15	9873	β^-	2.4	s	$\frac{1}{2}^+$
16	13694	β^-	747,0	ms	0^+
17	21031	β^-	193.0	ms	$(\frac{3}{2}^-)$
18	24920	β^-	92,0	ms	0^+
19	32410	β^-	46,2	ms	$(\frac{1}{2}^+)$
20	37560	β^-	16,0	ms	0^+
21	53590	β^-	6,2	ms	0^+
			$_7$N		
10	38800	p	200,0	ys	(2^-)
11	24300	p	650.0	ys	$\frac{1}{2}^+$
12	17338	β^+	11,0	ms	1^+
13	5345	β^+	10.0	m	$\frac{1}{2}^-$
14	2863	s	99,64	%	1^+
15	101	s	.36	%	$\frac{1}{2}^-$
16	5683	β^-	7.1	s	2^-
17	7870	β^-	4,2	s	$\frac{1}{2}^-$
18	13113	β^-	619.2	ms	1^-
19	15856	β^-	336,0	ms	$\frac{1}{2}^-$
20	21770	β^-	136,0	ms	
21	25250	β^-	83,0	ms	$(\frac{1}{2}^-)$
22	32030	β^-	24,0	ms	
23	#38320	β^-	13.9	ms	#$\frac{1}{2}^-$
			$_8$O		
12	#31915	2p	6	zs	0^+
13	23115	β^+	8,6	ms	$(\frac{3}{2}^-)$

11	40728	β^-	8,8 ms	$\frac{3}{2}^-$
12	#48920	n	< 10 ns	

$_{4}$Be

6	16375	2p	5.0 zs	0^-
7	15769	CE	53,2 d	$\frac{3}{2}^-$
8	4941	α	81.9 as	0^-
9	11348	stable	*100,00 %*	$\frac{3}{2}^-$
10	12607	β^-	1.5 Ma	0^+
11	20177	β^-	13.8 s	$\frac{1}{2}^+$
12	25077	β^-	21,5 ms	0^+
13	33659	n	1.0 zs	$(\frac{1}{2}^-)$
14	39950	β^-	4,5 ns	0^+
16	57460	2n	650,0 ys	0^+

$_{5}$B

7	27077	p	570.0 ys	$(\frac{3}{2}^-)$
8	22921	β^+	770,0 ms	2^+
9	12416	p	800.0 zs	$\frac{3}{2}^-$
10	12050	stable	*19.90 %*	3^+
11	8667	stable	*80.10 %*	$\frac{3}{2}^-$
12	13369	β^-	20,2 ms	1^-
13	16562	β^-	17.3 ms	$\frac{3}{2}^-$
14	23664	β^-	12.5 ms	2^-
15	28958	β^-	9,9 ms	$\frac{3}{2}^-$
16	#37112	n	190 ps	$\#0^-$
17	43770	β^-	5,1 ms	$(\frac{3}{2}^-)$
18	#51460	n	26 ns	(2^-)
19	#56760	β^-	2.9 ms	$\#\frac{3}{2}^-$

$_{6}$C

8	35004	2p	3.5 zs	0^-
9	28911	β^+	126,5 ms	$(\frac{3}{2}^-)$
10	15698	β^+	19.3 s	0^+
11	10650	β^+	20.4 m	$\frac{3}{2}^-$
12	0	stable	*98.93 %*	0^+
13	3125	β^-	5,70 ks	$\frac{1}{2}^-$
14	8007	β^-	70,6 s	0^+
15	2855	β^+	122.2 s	$\frac{1}{2}^-$
16	−4737	stable	*99.76 %*	0^+
17	−808	stable	*.0 %*	$\frac{3}{2}^-$
18	−782	stable	*.20 %*	0^+
19	3332	β^-	26,8 s	$\frac{5}{2}^+$
20	3796	β^-	13.5 s	0^+
21	8062	β^-	8,4 s	$(\frac{5}{2}^+)$
22	9280	β^-	2,9 s	0^+
23	14620	β^-	97,0 ms	$\frac{1}{2}^+$
24	18600	β^-	66,0 ms	0^+
25	27350	n	2.6 zs	$\#\frac{3}{2}^+$
26	34780	2n	90,0 zs	0^+

$_{9}$F

14	31960	p	500.0 ys	2^-
15	16810	p	410,0 ys	$\frac{1}{2}^+$
16	10680	p	11.0 zs	0^-
17	1951	β^+	64.5 s	$\frac{5}{2}^+$
18	873	β^+	109,8 m	1^+
19	−1487	stable	*100,00 %*	$\frac{1}{2}^+$
20	−17	β^-	11,2 s	2^+
21	−47	β^-	4.2 s	$\frac{5}{2}^+$
22	2793	β^-	4.2 s	(4^+)
23	3310	β^-	2,2 s	$\frac{5}{2}^+$
24	7600	β^-	384.0 ms	$(1,2,3)^+$
25	11360	β^-	80,0 ms	$(\frac{5}{2}^+)$
26	18070	β^-	9.7 ms	(1^+)
27	21630	β^-	4,9 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
29	#39030	β^-	2.5 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
31	#55020	β^-	#1 ns	$\#\frac{5}{2}^+$

$_{10}$Ne

16	23986	2p	9,0 zs	0^+
17	16600	β^+	109.2 ms	$\frac{1}{2}^-$
18	5317	stable	*9.2 %*	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{10}$Ne		
19	1752	β^+	17.3 s	$\frac{1}{2}^+$
20	−7041	stable	*90,48 %*	0^+
21	−5731	stable	*.27 %*	$\frac{3}{2}^+$
22	−8024	stable	*9,25 %*	0^+
23	−5154	β^-	37.1 s	$\frac{5}{2}^+$
24	−5951	β^-	3,4 m	0^+
25	−2000	β^-	602.0 ms	$\frac{1}{2}^+$
26	470	β^-	197.0 ms	0^+
27	7040	β^-	31,5 ms	$(\frac{3}{2}^+)$
28	11200	β^-	18.9 ms	0^+
29	18400	β^-	14,7 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
30	23040	β^-	7.3 ms	0^+
31	30820	β^-	3,4 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
32	#37000	β^-	3.5 ms	0^+
34	#52840	β^-	#1 ns	0^+
		$_{11}$Ne		
18	25040	p	1.3 zs	$\#1^-$
19	#12929	p	1 as	$\#\frac{5}{2}^+$
20	6850	β^+	447.9 ms	2^+
21	−2184	β^+	22,5 s	$\frac{3}{2}^+$
22	−5181	β^+	2.6 s	3^+
23	−9529	stable	*100,00 %*	$\frac{3}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{13}$Al		
26	−12210	β^+	717,0 ks	5^+
27	−17196	stable	*100,00 %*	$\frac{5}{2}^+$
28	−16850	β^-	2,2 m	3^+
29	−16204	β^-	6,6 m	$\frac{5}{2}^+$
30	−15872	β^-	3,6 s	3^+
31	−14955	β^-	644,0 ms	$\frac{5}{2}^+$
32	−11099	β^-	33,0 ms	1^+
33	−8470	β^-	41.7 ms	$(\frac{5}{2})^+$
34	−3070	β^-	56,3 ms	(4^+)
35	−220	β^-	37,2 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
36	5050	β^-	90,0 ms	
37	9810	β^-	10,7 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
38	16210	β^-	7.6 ms	
39	#21000	β^-	7,6 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
40	#27970	β^-	#10 ms	
41	#33890	β^-	#2 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
42	#40840	β^-	#1 ms	
43	#47910	β^-	#1 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
		$_{14}$Si		
22	#33330	β^+	29,0 ms	0^+
23	#23700	β^+	42.3 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
24	10744	β^+	140,0 ms	0^+

24	−8417	β^-	15.0 h	4^+
25	−9357	β^-	59.1 s	4^+
26	−8861	β^-	1.1 s	3^+
27	−5618	β^-	301.0 ms	$\frac{3}{2}^+$
28	−988	β^-	30.5 ms	1^+
29	2680	β^-	14.1 ms	# $\frac{3}{2}^-$(1)
30	8475	β^-	18.4 ms	2^+
31	12261	β^-	17.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$(+)
32	16810	β^-	12.9 ms	(3$^-$)
33	#23970	β^-	8.2 ms	($\frac{1}{2}^+$)
34	#31290	β^-	5.5 ms	1^+
35	#37840	β^-	1.5 ms	# $\frac{3}{2}^+$
37	#63140	β^-	#1 ms	# $\frac{3}{2}^+$

$_{12}$Mg

19	31830	2p	5.0 ps	# $\frac{1}{2}^-$
20	17659	β^+	90.0 ms	0^+
21	10914	β^+	122.0 ms	$\frac{3}{2}^+$
22	−390	β^+	3.9 s	0^+
23	−5473	β^+	11.3 s	$\frac{3}{2}^+$
24	−13933	stable	78.99 %	0^+
25	−13192	stable	10.00 %	$\frac{5}{2}^+$
26	−16214	stable	11.01 %	0^+
27	−14686	β^-	9.5 m	$\frac{1}{2}^+$
28	−15018	β^-	20.9 h	0^+
29	−10603	β^-	1.3 s	$\frac{3}{2}^+$
30	−8884	β^-	313.0 ms	0^+
31	−3122	β^-	232.0 ms	$\frac{1}{2}^+$
32	−829	β^-	86.0 ms	0^+
33	4962	β^-	90.5 ms	$\frac{3}{2}^-$
34	8323	β^-	20.0 ms	0^+
35	15040	β^-	70.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
36	20380	β^-	3.9 ms	0^+
37	#28290	β^-	3.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
38	#34070	β^-	#1 ms	0^+
40	#48610	β^-	#1 ms	0^+

$_{13}$Al

22	#18200	β^+	91.1 ms	(4)$^+$
23	6748	β^+	470.0 ms	$\frac{3}{2}^+$
24	−47	β^+	2.1 s	4^+
25	−8916	β^+	7.2 s	$\frac{5}{2}^+$
26	−7140	β^+	2.2 s	0^-
27	−12384	β^+	4.2 s	$\frac{5}{2}^-$
28	−21492	stable	92.23 %	0^-
29	−21895	stable	4.68 %	$\frac{1}{2}^-$
30	−24432	stable	3.09 %	0^-
31	−22939	β^-	157.3 m	$\frac{5}{2}^-$
32	−24077	β^-	153.0 s	0^-
33	−20514	β^-	6.2 s	$\frac{5}{2}^+$
34	−19047	β^-	3.6 s	0^-
35	−14360	β^-	780.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
36	−12390	β^-	450.0 ms	0^-
37	−6590	β^-	90.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
38	#−1170	β^-	490 ms	0^-
39	2920	β^-	47.5 ms	# $\frac{1}{2}^-$
40	5430	β^-	33.0 ms	0^-
41	12120	β^-	20.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
42	#16560	β^-	12.5 ms	0^-
43	#23100	β^-	#15 ms	# $\frac{1}{2}^-$
44	#28610	β^-	#10 ms	0^-
45	#37210	β^-	#1 ms	# $\frac{1}{2}^-$

$_{15}$P

26	#10970	β^+	43.7 ms	(3$^+$)
27	−722	β^+	260.0 ms	$\frac{1}{2}^+$
28	−7137	β^+	270.3 ms	3^+
29	−16952	β^+	4.1 s	$\frac{1}{2}^+$
30	−20200	β^+	2.5 m	1^+
31	−24440	stable	100.00 %	$\frac{1}{2}^+$
32	−24304	β^-	14.3 d	1^+
33	−26837	β^-	25.4 d	$\frac{1}{2}^+$
34	−24648	β^-	12.4 s	1^+
35	−24857	β^-	47.3 s	$\frac{1}{2}^+$
36	−20231	β^-	6.0 s	(4$^+$)
37	−19000	β^-	2.3 s	# $\frac{1}{2}^+$
38	−14070	β^-	640.0 ms	(0$^-$)
39	−12830	β^-	262.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
40	−8070	β^-	150.0 ms	(2$^-$, 3$^-$)
41	−4980	β^-	100.0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
42	1010	β^-	48.5 ms	
43	4680	β^-	36.8 ms	# $\frac{1}{2}^-$
44	#10430	β^-	18.5 ms	

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P

$_{15}$P

45	#15320	β^-	#8 ms	# $\frac{1}{2}^+$
46	#22780	β^-	#4 ns	
47	#29240	β^-	#2 ms	# $\frac{3}{2}^+$

$_{16}$S

27	#17030	β^+	15.0 ms	($\frac{5}{2}^+$)
28	4070	β^+	125.0 ms	0^+
29	−3100	β^+	186.0 ms	# $\frac{5}{2}^+$
30	−14050	β^+	1.2 s	0^+
31	−19042	β^+	2.6 s	$\frac{1}{2}^+$
32	−26015	stable	94.99 %	0^+
33	−26585	stable	.75 %	$\frac{3}{2}^+$
34	−29931	stable	4.25 %	0^+
35	−28848	β^-	87.4 d	$\frac{3}{2}^+$
36	−30664	stable	.01 %	0^+
37	−26898	β^-	5.1 m	$\frac{3}{2}^-$
38	−26861	β^-	170.3 m	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P

$_{18}$Ar

44	−32673	β^-	11.9 m	0^+
45	−29770	β^-	21.5 s	($\frac{5}{2}^-$, $\frac{7}{2}^-$)
46	−29790	β^-	8.4 s	0^+
47	−25210	β^-	1.2 s	($\frac{3}{2}$)$^-$
48	#−22140	β^-	475.0 ms	0^+
49	#−16860	β^-	170.0 ms	# $\frac{3}{2}^-$
50	#−12920	β^-	85.0 ms	0^+
51	#−5870	β^-	460 ms	# $\frac{3}{2}^-$
52	#−970	β^-	#10 ms	0^+
53	#6790	β^-	#9 ms	# $\frac{3}{2}^-$

$_{19}$K

35	−11172	β^+	178.0 ms	$\frac{3}{2}^+$
36	−17417	β^+	341.0 ms	2^+
37	−24800	β^+	1.2 s	$\frac{3}{2}^+$
38	−25800	β^+	7.6 m	3^+
39	−33807	stable	93.26 %	$\frac{3}{2}^+$

39	−23160	β	11.0 s	$(\frac{3}{2})^+$
40	−22838	β^-	8.8 s	0^+
41	−19009	β^-	2.0 s	$\#\frac{1}{2}^-$
42	−17637	β^-	1.0 s	0^+
43	−12195	β^-	205.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
44	−9204	β^-	100.0 ms	0^+
45	−9990	β^-	68.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
46	#40	β^-	50.0 ms	0^+
47	#7410	β^-	#20 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
48	#12760	β^-	#10 ms	0^+

$_{17}$Cl

31	−7070	β^+	150.0 ms	$\frac{3}{2}^+$
32	−13334	β^+	298.0 ms	1^+
33	−21003	β^+	2.5 s	$\frac{3}{2}^+$
34	−24440	β^+	1.5 s	0^+
35	−29013	ε	75.76 %	$\frac{3}{2}^+$
36	−29522	β^-	301.3 ka	2^+
37	−31761	ε	24.24 %	$\frac{3}{2}^+$
38	−29708	β^-	37.2 m	2^-
39	−29800	β^-	55.3 m	$\frac{3}{2}^+$
40	−27660	β^-	1.4 m	2^-
41	−27310	β^-	38.4 s	$(\frac{1}{2}^+)$
42	−24910	β^-	6.8 s	$\#2^-$
43	−24320	β^-	3.1 s	$(\frac{3}{2}^+)$
44	−20610	β^-	560.0 ms	(2^-)
45	−16360	β^-	413.0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
46	−13810	β^-	282.0 ms	
47	#−10100	β^-	101.0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
48	#−4060	β^-	#100 ms	
49	#1150	β^-	#50 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
50	#8430	β^-	#20 ms	
51	#14480	β^-	#2 ms	$\#\frac{3}{2}^+$

$_{18}$Ar

31	#11290	β^+	14.4 ms	$\#\frac{1}{2}^{(-)}$
32	−2200	β^+	98.0 ms	0^+
33	−9384	β^+	173.0 ms	$\frac{1}{2}^+$
34	−18378	β^+	843.8 ms	0^+
35	−23047	β^+	1.8 s	$\frac{3}{2}^+$
36	−30231	ε	.33 %	0^+
37	−30947	CE	35.0 d	$\frac{3}{2}^+$
38	−34714	ε	.06 %	0^+
39	−33242	β^-	269.0 s	$\frac{7}{2}^-$
40	−35039	ε	99.60 %	0^+
41	−33087	β^-	109.6 m	$\frac{7}{2}^-$
42	−34429	β^-	32.9 a	0^+
43	−32010	β^-	5.4 m	$(\frac{5}{2}^-)$
44	−33535	.01 %	1.2 us	4
45	−35569	ε	6.75 %	$\frac{7}{2}^-$
46	−35022	β^-	12.4 h	2^-
47	−36576	β^-	22.3 h	$\frac{7}{2}^-$
48	−35781	β^-	22.1 m	2^-
49	−36616	β^-	17.8 m	$\frac{7}{2}^-$
50	−35413	β^-	105.0 s	$2(^-)$
51	−35712	β^-	17.5 s	$\frac{1}{2}^+$
52	−32254	β^-	0.8 s	(1^-)
53	−29611	β^-	1.3 s	$\frac{1}{2}^{(-)}$
54	−25728	β^-	472.0 ms	$0(^-)$
55	−22516	β^-	365.0 ms	$(\frac{3}{2}^+)$
56	#−16540	β^-	110.0 ms	(2^-)
57	#−11680	β^-	30.0 ms	$(\frac{3}{2}^+)$
58	#−5000	β^-	10.0 ms	$\#2^-$
59	#710	β^-	#3 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
60	47930	β^-	#1 ms	$\#2^-$

$_{20}$Ca

35	#4790	β^+	25.7 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
36	−6480	β^+	101.2 ms	0^+
37	−13106	β^+	181.1 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
38	−22058	β^+	443.8 ms	0^+
39	−27282	β^+	860.3 ms	$\frac{3}{2}^+$
40	−34846	ε	96.94 %	0^+
41	−35107	CE	99.4 ka	$\frac{7}{2}^-$
42	−38547	ε	.65 %	0^+
43	−38408	ε	.14 %	$\frac{7}{2}^-$
44	−41468	ε	2.09 %	0^+
45	−40812	β^-	162.6 d	$\frac{7}{2}^-$
46	−43198	ε	.00 %	0^+
47	−42343	β^-	4.5 d	$\frac{7}{2}^-$
48	−44224	.19 %	63.0 ka	0^+
49	−41299	β^-	8.7 m	$\frac{3}{2}^-$
50	−39589	β^-	13.9 s	0^+
51	−36339	β^-	10.0 s	$(\frac{3}{2}^-)$
52	−34260	β^-	4.6 s	0^+
53	#−28460	β^-	461.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
54	#−24780	β^-	90.0 ms	0^+
55	#−18350	β^-	22.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
56	#−12900	β^-	11.0 ms	0^+
57	#−6870	β^-	#5 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
58	#−1920	β^-	#3 ms	0^+

$_{21}$Sc

39	#−14178	p	900 ns	$\#\frac{7}{2}^-$
40	−20528	β^+	182.3 ms	4^-
41	−28642	β^+	596.3 ms	$\frac{7}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
$_{21}$Sc				
42	−32121	β^+	681.3 ms	0^+
43	−36168	β^+	3.9 h	$\frac{7}{2}^-$
44	−37816	β^+	4.0 h	2^+
45	−41071	ε	100.00 %	$\frac{7}{2}^-$
46	−41760	β^-	83.8 d	4^+
47	−44335	β^-	3.3 d	$\frac{7}{2}^-$
48	−44509	β^-	43.7 h	6^+
49	−46561	β^-	57.2 m	$\frac{7}{2}^-$
50	−44548	β^-	102.5 s	5^+
51	−43229	β^-	12.4 s	$(\frac{7}{2})^-$
52	−40170	β^-	8.2 s	$3(^+)$
53	−36110	β^-	2.4 s	$(\frac{7}{2}^-)$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
$_{23}$V				
59	−37830	β^-	96.0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
60	−33240	β^-	122.0 ms	$\#3^+$
61	−30510	β^-	47.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
62	#−25480	β^-	33.6 ms	$\#3^+$
63	#−21990	β^-	18.3 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
64	#−16170	β^-	19.0 ms	
65	#−11640	β^-	#10 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
66	#−5610	β^-	#5 ms	
$_{24}$Cr				
42	#6240	β^+	13.8 ms	0^+
43	#−2300	β^-	21.1 ms	$(\frac{3}{2}^+)$

54	−33600	β^-	526,0 ms	$(3)^+$
55	−29980	β^-	96,0 ms	$(\frac{7}{2})^-$
56	#−24730	β^-	26,0 ms	(1^+)
57	#−20710	β^-	22,0 ms	# $\frac{7}{2}^-$
58	#−14950	β^-	12,0 ms	# 3^+
59	#−10300	β^-	#10 ms	# $\frac{7}{2}^-$
60	#−4060	β^-	#3 ms	# 3^+
61	#930	β^-	#2 ms	# $\frac{7}{2}^-$

$_{22}$Ti

39	#2200	β^+	28,5 ms	# $\frac{3}{2}^+$
40	−8850	β^+	52,4 ms	0^+
41	−15698	β^+	82,6 ms	$\frac{3}{2}^+$
42	−25104	β^+	208,1 ms	0^+
43	−29321	β^+	509,0 ms	$\frac{7}{2}^-$
44	−37548	CE	59,1 a	0^+
45	−39009	β^+	184,8 m	$\frac{7}{2}^-$
46	−44127	•	8,25 %	0^+
47	−44936	•	7,44 %	$\frac{5}{2}^-$
48	−48491	•	73,72 %	0^+
49	−48562	•	5,41 %	$\frac{7}{2}^-$
50	−51430	•	5,18 %	0^+
51	−49731	β^-	5,8 m	$\frac{3}{2}^-$
52	−49469	β^-	1,7 m	0^+
53	−46830	β^-	32,7 s	$(\frac{3}{2})^-$
54	−45600	β^-	1,5 s	0^+
55	−41670	β^-	1,3 s	$(\frac{1}{2})^-$
56	−39210	β^-	200,0 ms	0^+
57	−33870	β^-	95,0 ms	# $\frac{5}{2}^-$
58	#−31110	β^-	55,0 ms	0^+
59	#−25640	β^-	28,5 ms	# $\frac{5}{2}^-$
60	#−22330	β^-	22,2 ms	0^+
61	#−16360	β^-	15,0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
62	#−12570	β^-	#10 ms	0^+
63	#−6820	β^-	#3 ms	# $\frac{1}{2}^-$

$_{23}$V

43	−17920	β^+	79,3 ms	# $\frac{7}{2}^-$
44	−24120	β^+	111,0 ms	$(2)^+$
45	−31881	β^+	547,0 ms	$\frac{7}{2}^-$
46	−37074	β^+	422,6 ms	0^+
47	−42005	β^+	32,6 m	$\frac{3}{2}^-$
48	−44476	β^+	16,0 d	4^+
49	−47961	CE	330,0 d	$\frac{7}{2}^-$
50	−49229	,25 %	150,0 Py	6^+
51	−52203	•	99,75 %	$\frac{7}{2}^-$
52	−51443	β^-	3,7 m	3^+
53	−51860	β^-	1,6 m	$\frac{7}{2}^-$
54	−49892	β^-	49,8 s	3^+
55	−49140	β^-	6,5 s	# $\frac{7}{2}^-$
56	−46120	β^-	216,0 ms	(1^+)
57	−44230	β^-	350,0 ms	$(\frac{3}{2}^-)$
58	−40320	β^-	191,0 ms	(1^+)

44	#−13640	β^+	42,8 ms	0^+
45	−19510	β^-	60,9 ms	# $\frac{7}{2}^-$
46	−29474	β^+	257,0 ms	0^+
47	−34561	β^-	500,0 ms	$\frac{3}{2}^-$
48	−42822	β^+	21,6 h	0^+
49	−45332	β^-	42,3 m	$\frac{5}{2}^-$
50	−50261	•	4,34 %	0^+
51	−51451	CE	27,7 d	$\frac{7}{2}^-$
52	−55418	•	83,79 %	0^+
53	−55285	•	9,50 %	$\frac{3}{2}^-$
54	−56933	•	2,37 %	0^+
55	−55109	β^-	3,5 m	$\frac{3}{2}^-$
56	−55281	β^-	5,9 m	0^+
57	−52524	β^-	21,1 s	$(\frac{3}{2})^-$
58	−51830	β^-	7,0 s	0^+
59	−47890	β^-	****** ms	$(\frac{1}{2}^-)$
60	−46500	β^-	490,0 ms	0^+
61	−42460	β^-	243,0 ms	$(\frac{5}{2}^-)$
62	−40890	β^-	206,0 ms	0^+
63	−35720	β^-	129,0 ms	# $\frac{1}{2}^-$
64	#−33460	β^-	43,0 ms	0^+
65	#−27980	β^-	27,5 ms	# $\frac{1}{2}^-$
66	#−24540	β^-	23,8 ms	0^+
67	#−18480	β^-	#10 ms	# $\frac{1}{2}^-$
68	#−14880	β^-	#5 ms	0^+

$_{25}$Mn

46	#−12900	β^-	36,2 ms	(4^+)
47	−22670	β^+	88,0 ms	# $\frac{5}{2}^-$
48	−29320	β^-	158,1 ms	4^+
49	−37637	β^+	382,0 ms	$\frac{5}{2}^-$
50	−42627	β^-	283,2 ms	0^+
51	−48243	β^+	46,2 m	$\frac{5}{2}^-$
52	−50706	β^-	5,6 d	6^+
53	−54689	CE	3,7 My	$\frac{7}{2}^-$
54	−55556	CE	312,0 d	3^+
55	−57711	•	100,00 %	$\frac{5}{2}^-$
56	−56910	β^-	2,6 h	3^+
57	−57486	β^-	85,4 s	$\frac{5}{2}^-$
58	−55827	β^-	3,0 s	1^+
59	−55525	β^-	4,6 s	$(\frac{3}{2})^-$
60	−52967	β^-	280,0 ms	1^+
61	−51742	β^-	670,0 ms	$(\frac{5}{2})^-$
62	#−48480	β^-	92,0 ms	(1^+)
63	−46887	β^-	275,0 ms	# $\frac{5}{2}^-$
64	−42989	β^-	88,8 ms	(1^+)
65	−40967	β^-	92,0 ms	# $\frac{5}{2}^-$
66	−36750	β^-	64,2 ms	(1^+)
67	#−33310	β^-	46,7 ms	# $\frac{5}{2}^-$
68	#−28300	β^-	28,4 ms	
69	#−24540	β^-	16,0 ms	# $\frac{5}{2}^-$
70	#−19220	β^-	#10 ms	
71	#−15200	β^-	#5 ms	# $\frac{5}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P

$_{26}$Fe

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
45	#13430	2p	2,2 ms	# $\frac{3}{2}^+$
46	#690	β^+	13,0 ms	0^+
47	#−7590	β^+	21,9 ms	# $\frac{7}{2}^-$
48	#−18420	β^+	45,3 ms	0^+
49	−24751	β^+	64,7 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
50	−34490	β^+	155,0 ms	0^+

$_{28}$Ni

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
52	#−23470	β^+	40,8 ms	0^+
53	−29631	β^-	55,2 ms	# $\frac{7}{2}^-$
54	−39220	β^+	104,0 ms	0^+
55	−45335	β^-	204,7 ms	$\frac{7}{2}^-$
56	−53906	β^+	6,1 d	0^+
57	−56083	β^-	35,6 h	$\frac{3}{2}^-$

51	−40202	β^+	308.0 ms	$\frac{5}{2}^-$
52	−48932	β^+	8,3 h	0^+
53	−50916	β^+	8,5 m	$\frac{7}{2}^-$
54	−60253	ε	5.6 %	0^+
55	−67180	CE	2,7 s	$\frac{5}{2}^-$
56	−69606	ε	91,75 %	0^+
57	−69181	ε	3.12 %	$\frac{7}{2}^-$
58	−62154	ε	.28 %	0^+
59	−60064	β^-	44,5 d	$\frac{7}{2}^-$
60	−61412	β^-	2,6 Ma	0^+
61	−58920	β^-	6,0 m	$\frac{3}{2}^-$
62	−55878	β^-	68,0 s	0^+
63	−55636	β^-	6,1 s	$(\frac{3}{2}^-)$
64	−54070	β^-	2,0 s	0^+
65	−51221	β^-	810.0 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
66	−50068	β^-	931.0 ms	0^+
67	−46070	β^-	394.0 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
68	−43830	β^-	128.0 ms	0^+
69	#−39060	β^-	110,0 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
70	#−36310	β^-	77,0 ms	0^+
71	#−31000	β^-	28,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
72	#−28100	β^-	#10 ms	0^+
73	#−22620	β^-	#5 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
74	#−19210	β^-	#2 ms	0^+

$_{27}$Co

50	#−17780	β^+	38,5 ms	(6^+)
51	−27340	β^+	68,8 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
52	#−33990	β^+	116.0 ms	(6^+)
53	−42668	β^+	242.0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
54	−48009	β^+	193,3 ms	0^+
55	−54029	β^+	17,5 h	$\frac{7}{2}^-$
56	−56039	β^+	77,2 d	4^+
57	−59344	CE	271.7 d	$\frac{7}{2}^-$
58	−59846	β^+	70,9 d	2^+
59	−62229	ε	100,00 %	$\frac{7}{2}^-$
60	−61649	β^-	5,3 s	5^+
61	−62897	β^-	1,6 h	$\frac{7}{2}^-$
62	−61424	β^-	1,5 m	$(2)^+$
63	−61851	β^-	26,9 s	$\frac{7}{2}^-$
64	−59792	β^-	300.0 ms	1^+
65	−59185	β^-	1,2 s	$(\frac{7}{2}^-)$
66	−56409	β^-	194.0 ms	(1^+)
67	−55822	β^-	329.0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
68	−51920	β^-	200.0 ms	(7^-)
69	−50170	β^-	227,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
70	−46920	β^-	112.7 ms	(6^-)
71	−43370	β^-	80,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
72	#−39780	β^-	59,0 ms	$\#6^-$
73	#−36900	β^-	41,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
74	#−32460	β^-	30,0 ms	
75	#−29100	β^-	30,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
76	#−24100	β^-	#20 ms	

$_{28}$Ni

48	#16480	2p	2,8 ms	0^+
49	#7170	β^+	7,5 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
50	#−4900	β^+	18,5 ms	0^+
51	#−12940	β^+	29,3 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
52	−20230	ε	68.08 %	0^+
53	−61156	β^+	101.0 ks	$\frac{7}{2}^-$
54	−64472	ε	86,09 %	0^+
55	−64221	ε	1.41 %	$\frac{7}{2}^-$
56	−66745	ε	3,69 %	0^+
57	−65512	β^-	101.2 h	$\frac{1}{2}^-$
58	−67098	ε	.93 %	0^+
59	−66128	β^-	2.6 h	$\frac{3}{2}^-$
60	−66006	β^-	54.6 h	0^+
61	−63742	β^-	21.0 s	$\frac{1}{2}^-$
62	−63463	β^-	29.0 s	0^+
63	−59979	β^-	11.5 s	$\frac{3}{2}^-$
64	−59218	β^-	6.0 s	0^+
65	−55406	β^-	2,6 s	$(\frac{3}{2}^+)$
66	−54226	β^-	1.6 s	0^+
67	−50108	β^-	830,0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
68	#−48460	β^-	680.0 ms	0^+
69	#−44260	β^-	341.0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
70	#−41610	β^-	236.0 ms	0^+
71	#−36760	β^-	124.0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
72	#−34130	β^-	140.0 ms	0^+
73	#−27710	β^-	#100 ms	$\#\frac{1}{2}^+$

$_{29}$Cu

55	−51640	β^-	27.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
56	#−38240	β^-	93.0 ms	(4^+)
57	−47308	β^-	196.3 ms	$\frac{3}{2}^-$
58	−51667	β^-	3.2 s	1^+
59	−56357	β^-	81.5 s	$\frac{3}{2}^-$
60	−58844	β^-	23.7 m	2^+
61	−61983	β^-	3.3 h	$\frac{3}{2}^-$
62	−62787	β^-	9.7 m	1^+
63	−65579	ε	69.15 %	$\frac{3}{2}^-$
64	−65424	β^-	12.7 h	1^+
65	−67263	ε	30.85 %	$\frac{3}{2}^-$
66	−66258	β^-	5.1 m	1^+
67	−67318	β^-	61.8 h	$\frac{3}{2}^-$
68	−65567	β^-	30.9 s	1^+
69	−65796	β^-	2.8 m	$\frac{3}{2}^-$
70	−62976	β^-	44.5 s	6^-
71	−62711	β^-	19.4 s	$\frac{3}{2}^-$
72	−59789	β^-	6.6 s	2^-
73	−58987	β^-	4.2 s	$\frac{3}{2}^-$
74	−56006	β^-	1.6 s	2^-
75	−54471	β^-	1.2 s	$\frac{5}{2}^-$
76	−50976	β^-	637.7 ms	$(3,4)$
77	#−48510	β^-	467.9 ms	$\frac{3}{2}^-$
78	−44500	β^-	335.0 ms	(8^-)
79	#−41900	β^-	220.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
80	#−36430	β^-	210,0 ms	
81	#−31790	β^-	#60 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
82	#−25670	β^-	#50 ms	

$_{29}$Zn

54	#−7420	2p	1.8 ms	0^+
55	#−14920	β^+	19.3 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
56	#−25580	β^+	30,0 ms	0^+
57	#−32580	β^+	38.0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
58	−42300	β^+	86.0 ms	0^+

A	Δ (keV)	abund. / $t_{1/2}$	J^P
$_{30}$Zn			

A	Δ (keV)	abund. / $t_{1/2}$	J^P
$_{29}$Cu			

59	−47215	β^+	182.0 ms	$\frac{3}{2}^-$
60	−54173	β^+	2.4 m	0^+
61	−60349	β^+	89.1 s	$\frac{3}{2}^-$
62	−61167	β^+	9.2 h	0^+
63	−62213	β^+	38.5 m	$\frac{3}{2}^-$
64	−66003	a	*49.17 %*	0^+
65	−65911	β^+	243.9 d	$\frac{3}{2}^-$
66	−68899	a	*27.73 %*	0^+
67	−67850	a	*4.04 %*	$\frac{5}{2}^-$
68	−70006	a	*18.45 %*	0^+
69	−68417	β^-	56.4 m	$\frac{1}{2}^-$
70	−69564	a	*.61 %*	0^+
71	−67928	β^-	3.6 m	$\frac{1}{2}^-$
72	−68145	β^-	46.5 h	0^+
73	−65593	β^-	28.8 s	$(\frac{1}{2})^-$
74	−65756	β^-	95.6 s	0^+
75	−62554	β^-	10.2 s	$(\frac{7}{2}^+)$
76	−62303	β^-	5.7 s	0^+
77	−58789	β^-	2.1 s	$(\frac{7}{2}^+)$
78	−57483	β^-	1.5 s	0^+
79	−53432	β^-	996.0 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
80	−51638	β^-	550.0 ms	0^+
81	−46200	β^-	304.0 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
82	#−42610	β^-	228.0 ms	0^+
83	#−36730	β^-	127.0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
84	#−32110	β^-	#50 ms	0^+
85	#−25840	β^-	#50 ms	$\#\frac{9}{2}^+$

^{31}Ga

60	#−39750	β^+	70.0 ms	(2^+)
61	−47130	β^+	168.0 ms	$\frac{3}{2}^-$
62	−51956	β^+	116.1 ms	0^+
63	−56547	β^+	32.4 s	$(\frac{3}{2}^-)$
64	−56832	β^+	2.6 m	$\#0(^+)$
65	−62657	β^+	15.2 m	$\frac{3}{2}^-$
66	−63724	β^+	9.9 h	0^+
67	−66978	CE	3.3 d	$\frac{3}{2}^-$
68	−67085	β^+	67.7 m	1^+
69	−69327	a	*60.11 %*	$\frac{3}{2}^-$
70	−68910	β^-	21.1 m	1^-
71	−70139	a	*39.89 %*	$\frac{3}{2}^-$
72	−68558	β^-	14.1 h	3^-
73	−69699	β^-	4.9 h	$\frac{3}{2}^-$
74	−68019	β^-	8.1 m	3^-
75	−68464	β^-	126.0 s	$\frac{3}{2}^-$
76	−66296	β^-	32.6 s	2^-
77	−65992	β^-	13.2 s	$\frac{3}{2}^-(^-)$
78	−63705	β^-	5.1 s	2^-
79	−62547	β^-	2.8 s	$\frac{3}{2}^-$
80	−59223	β^-	2.0 s	(5^-)
81	−57628	β^-	1.2 s	$\frac{3}{2}^-$
82	−52990	β^-	599.0 ms	$(1,2,3)$
83	−49257	β^-	308.1 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
84	#−44280	β^-	85.0 ms	$\#0^-$
85	#−40060	β^-	93.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
86	#−34460	β^-	#30 ms	
87	#−29550	β^-	#10 ms	$\#\frac{3}{2}^-$

^{32}Ge

60	#−27610	β^+	#30 ms	0^+
61	#−33700	β^+	44.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
62	#−41900	β^+	129.0 ms	0^+
63	−46920	β^+	142.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
64	−54315	β^+	63.7 s	0^+
65	−56478	β^+	30.9 s	$\frac{3}{2}^-$
66	−61007	β^+	2.3 h	0^+
67	−62555	β^+	18.9 m	$\frac{3}{2}^-$
68	−66978	CE	270.9 d	0^+
69	−67109	β^+	39.0 h	$\frac{3}{2}^-$
70	−70561	a	*20.57 %*	0^+
71	−69906	CE	11.4 d	$\frac{1}{2}^-$
72	−72585	a	*27.45 %*	0^+
73	−71297	a	*7.75 %*	$\frac{9}{2}^+$
74	−73422	a	*36.50 %*	0^+
75	−71866	β^-	82.8 m	$\frac{1}{2}^-$
76	−73212	*7.73 %*	1.6 Za	0^+
77	−71212	β^-	11.2 h	$\frac{1}{2}^+$
78	−71862	β^-	88.0 m	0^+
79	−69530	β^-	19.0 s	$(\frac{1}{2})^-$
80	−69695	β^-	29.5 s	0^+
81	−66291	β^-	8.0 s	$\#\frac{9}{2}^+$
82	−66115	β^-	4.6 s	0^+
83	−60976	β^-	1.9 s	$(\frac{5}{2}^+)$
84	−58148	β^-	954.0 ms	0^+
85	−53123	β^-	540.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
86	#−49760	β^-	219.0 ms	0^+
87	#−44080	β^-	#150 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
88	#−40140	β^-	#100 ms	0^+
89	#−33730	β^-	#50 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
90	#−29220	β^-	#50 ns	0^+

^{33}As

64	#−39650	β^+	40.0 ms	$\#0^+$
65	−46940	β^+	170.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
66	−52025	β^+	95.8 ms	(0^+)
67	−56587	β^+	42.5 s	$(\frac{3}{2}^-)$
68	−58894	β^+	151.6 s	3^+
69	−63110	β^+	15.2 m	$\frac{3}{2}^-$
70	−64340	β^+	52.6 m	$\#4(^+)$
71	−67893	β^+	65.3 h	$\frac{3}{2}^-$
72	−68230	β^+	26.0 h	2^-
73	−70953	CE	80.3 d	$\frac{3}{2}^-$
74	−70859	β^+	17.8 d	2^-
75	−73094	a	*100.00 %*	$\frac{3}{2}^-$
76	−72291	β^-	1.1 d	2^-
77	−73916	β^-	38.8 h	$\frac{3}{2}^-$
78	−72817	β^-	90.7 m	2^-
79	−73636	β^-	9.0 m	$\frac{3}{2}^-$
80	−72214	β^-	15.2 s	1^+
81	−72533	β^-	33.3 s	$\frac{3}{2}^-$
82	−70103	β^-	19.1 s	(1^+)
83	−69669	β^-	13.4 s	$\#\frac{3}{2}^-$
84	−65854	β^-	4.0 s	$\#(3)(^+)$
85	−63189	β^-	2.0 s	$\#\frac{3}{2}^-$
86	−58962	β^-	945.0 ms	
87	−55017	β^-	610.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
88	#−50720	β^-	270.0 ms	
89	#−46600	β^-	#200 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
90	#−41890	β^-	#50 ms	
91	#−36900	β^-	#50 ns	$\#\frac{3}{2}^-$
92	#−30960	β^-	#30 ns	

^{34}Se

64	#−26930	β^+	#30 ms	0^+
65	#−33160	β^+	53.0 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
66	#−41370	β^+	33.0 ms	0^+
67	−46590	β^+	133.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
68	−54189	β^+	35.5 s	0^+
69	−56434	β^+	27.4 s	$(\frac{1}{2}^-)$
70	−61929	β^+	41.1 m	0^+

A	Δ (keV)	abund. / $t_{1/2}$		J^P
		$_{34}$Se		
71	−63146	β^+	4.7 m	$(\frac{1}{2}^-)$
72	−67868	CE	8.4 d	0^+
73	−69227	β^+	7.2 h	$\frac{9}{2}^+$
74	−72213	*	0.89 %	0^+
75	−72169	CE	119.5 d	$\frac{5}{2}^+$
76	−75251	*	9.37 %	0^+
77	−74599	*	7.63 %	$\frac{1}{2}^-$
78	−77025	*	23.77 %	0^+
79	−76917	β^-	295.0 ks	$\frac{7}{2}^+$
80	−77759	*	49.61 %	0^+
81	−76389	β^-	18.5 m	$\frac{1}{2}^-$
82	−77603	8.73 %	97.0 Ea	0^+
83	−75341	β^-	22.3 m	$\frac{9}{2}^+$
84	−75947	β^-	3.3 m	0^+
85	−72413	β^-	31.7 s	$\#\frac{5}{2}^+$
86	−70503	β^-	14.3 s	0^+
87	−66426	β^-	5.5 s	$\#\frac{5}{2}^+$
88	−63854	β^-	1.5 s	0^+
89	−58902	β^-	410.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
90	−55800	β^-	210.0 ms	0^+
91	#−50340	β^-	270.0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
92	#−46720	β^-	#100 ms	0^+
93	#−40720	β^-	#60 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
94	#−36800	β^-	#20 ms	0^+
95	#−30460	β^-	#10 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
		$_{35}$Br		
69	#−46110	p	24 ns	$(\frac{1}{2}^-)$
70	−51426	β^+	79.1 ms	0^+
71	−56502	β^+	21.4 s	$(\frac{5}{2}^-)$
72	−59067	β^+	78.6 s	1^+
73	−63048	β^+	3.4 m	$\frac{1}{2}^-$
74	−65288	β^+	25.4 m	(0^-)
75	−69107	β^+	96.7 m	$\frac{3}{2}^-$
76	−70289	β^+	16.2 h	1^-
77	−73234	β^+	57.0 h	$\frac{3}{2}^-$
78	−73452	β^+	6.4 m	1^+
79	−76085	*	50.69 %	$\frac{3}{2}^-$
80	−75689	β^-	17.7 m	1^+
81	−77975	*	49.31 %	$\frac{3}{2}^-$
82	−77497	β^-	35.3 h	5^-
83	−79013	β^-	2.4 h	$\frac{3}{2}^-$
84	−77783	β^-	31.8 m	2^-
85	−78575	β^-	2.9 m	$\frac{3}{2}^-$
86	−75692	β^-	55.1 s	(1^-)
87	−73902	β^-	55.7 s	$(\frac{5}{2}^-)$
88	−70716	β^-	16.3 s	(2^-)
89	−68274	β^-	4.4 s	$(\frac{3}{2}^-, \frac{5}{2}^-)$
90	−64000	β^-	1.9 s	
91	−61107	β^-	541.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
92	−56283	β^-	343.0 ms	(2^-)
93	−52970	β^-	102.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
94	#−47600	β^-	70.0 ms	
95	#−43770	β^-	#50 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
96	#−38160	β^-	#20 ms	
97	#−34060	β^-	#10 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
98	#−28450	β^-	#5 ms	
		$_{36}$Kr		
69	#−32440	β^+	27.4 ms	$(\frac{5}{2}^-)$
70	#−40950	β^+	52.0 ms	0^+
71	−46390	β^+	100.0 ms	$(\frac{5}{2}^-)$
72	−53941	β^+	17.2 s	0^+
73	−56552	β^+	27.3 s	$\frac{9}{2}^+$
74	−62331	β^+	11.5 m	0^+

A	Δ (keV)	abund. / $t_{1/2}$		J^P
		$_{36}$Kr		
75	−64824	β^+	4.3 m	$\frac{5}{2}^+$
76	−69014	β^+	14.8 h	0^+
77	−70169	β^+	74.4 m	$\frac{5}{2}^+$
78	−74179	*	.35 %	0^+
79	−74442	β^+	35.0 h	$\frac{1}{2}^-$
80	−77893	*	2.29 %	0^+
81	−77694	CE	229.0 ks	$\frac{7}{2}^+$
82	−80590	*	11.59 %	0^+
83	−79990	*	11.50 %	$\frac{9}{2}^+$
84	−82439	*	56.99 %	0^+
85	−81450	β^-	10.8 s	$\frac{9}{2}^+$
86	−83265	*	17.28 %	0^+
87	−80709	β^-	76.3 m	$\frac{5}{2}^+$
88	−79691	β^-	2.8 h	0^+
89	−76535	β^-	3.2 m	$\frac{1}{2}^+(^+)$
90	−71959	β^-	32.3 s	0^+
91	−70974	β^-	8.6 s	$\frac{5}{2}^+(^+)$
92	−66769	β^-	1.8 s	0^+
93	−64136	β^-	1.3 s	$\frac{1}{2}^+$
94	−61348	β^-	212.0 ms	0^+
95	−56159	β^-	114.0 ms	$\frac{1}{2}^+(^+)$
96	−53050	β^-	80.0 ms	0^+
97	−47420	β^-	62.2 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
98	#−44310	β^-	42.5 ms	0^+
99	#−38700	β^-	40.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
100	#−35050	β^-	12.0 ms	0^+
101	#−29130	β^-	#5 ms	
		$_{37}$Rb		
74	−61916	β^+	64.8 ms	0^+
75	−57218	β^+	19.0 s	$(\frac{3}{2}^-)$
76	−60479	β^+	36.5 s	$1(^-)$
77	−61830	β^+	3.8 m	$\frac{3}{2}^-$
78	−66935	β^+	17.7 m	$0(^+)$
79	−70503	β^+	22.9 m	$\frac{5}{2}^+$
80	−72175	β^+	33.4 s	1^+
81	−75457	β^+	4.6 h	$\frac{3}{2}^-$
82	−76158	β^+	1.3 m	1^+
83	−79070	CE	86.2 d	$\frac{5}{2}^-$
84	−79759	β^+	32.8 d	2^-
85	−82167	*	72.17 %	$\frac{5}{2}^-$
86	−82737	β^-	18.6 d	2^-
87	−81697	27.83 %	49.2 Ga	$\frac{3}{2}^-$
88	−82008	β^-	17.8 m	2^-
89	−81712	β^-	15.1 m	$\frac{3}{2}^-$
90	−79905	β^-	158.0 s	0^-
91	−77745	β^-	58.4 s	$\frac{3}{2}^-(^-)$
92	−74779	β^-	4.5 s	0^-
93	−72620	β^-	5.8 s	$\frac{5}{2}^-$
94	−68962	β^-	2.7 s	$3(^-)$
95	−65894	β^-	377.7 ms	$\frac{5}{2}^-$
96	−61854	β^-	201.0 ms	2^-
97	−58619	β^-	169.1 ms	$\frac{1}{2}^+$
98	−54318	β^-	114.0 ms	$\#(0)(^-)$
99	−51210	β^-	54.0 ms	$\#(\frac{5}{2}^+)$
100	#−46550	β^-	48.0 ms	$\#(3^+), 4^-$
101	#−42810	β^-	31.8 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
102	#−37710	β^-	37.0 ms	
103	#−33610	β^-	#20 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
		$_{38}$Sr		
73	#−31950	β^+	25 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
74	#−40890	β^+	#60 ms	0^+
75	−46620	β^+	88.0 ms	$(\frac{3}{2}^-)$
76	−54250	β^+	7.9 s	0^+

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$		J^P
		^{38}Sr			
77	−57803	β^+	9,0	s	$\frac{5}{2}(^+)$
78	−63174	β^+	156,1	s	0^+
79	−65477	β^+	2,3	m	$\frac{3}{2}(^-)$
80	−70911	β^+	106,3	m	0^+
81	−71628	β^+	22,3	m	$\frac{1}{2}^-$
82	−76010	CE	25,4	d	0^+
83	−76798	β^+	32,4	h	$\frac{7}{2}^+$
84	−80649	*	0,56 %		0^+
85	−81103	CE	64,9	d	$\frac{9}{2}^+$
86	−84523	*	9,86 %		0^+
87	−84880	*	7,00 %		$\frac{9}{2}^+$
88	−87921	*	82,58 %		0^+
89	−86208	β^-	50,5	d	$\frac{5}{2}^+$
90	−85948	β^-	28,8	a	0^+
91	−83652	β^-	9,6	h	$\frac{5}{2}^+$
92	−82867	β^-	2,7	h	0^+
93	−80086	β^-	7,4	m	$\frac{5}{2}^+$
94	−78816	β^-	75,3	s	0^+
95	−75122	β^-	23,9	s	$\frac{1}{2}^+$
96	−72930	β^-	1,1	s	0^+
97	−68552	β^-	429,0	ms	$\frac{1}{2}^+$
98	−66426	β^-	653,0	ms	0^+
99	−62512	β^-	269,0	ms	$\frac{3}{2}^+$
100	−59830	β^-	202,0	ms	0^+
101	−55660	β^-	113,6	ms	$(\frac{1}{2}^-)$
102	−52360	β^-	69,0	ms	0^+
103	#−47420	β^-	90,0	ms	# $\frac{5}{2}^+$
104	#−44110	β^-	44,0	ms	0^+
105	#−38610	β^-	30,0	ms	
106	#−34790	β^-	#20	ms	0^+
107	#−28900	β^-	#10	ms	
		^{39}Y			
76	#−38600	β^+	#500	ns	# 1^-
77	#−46760	β^+	63,0	ms	# $\frac{5}{2}^+$
78	#−52030	β^+	54,0	ms	(0^+)
79	−58360	β^+	14,8	s	# $\frac{5}{2}^+$
80	−61147	β^+	30,1	s	1^-
81	−65712	β^+	70,4	s	$(\frac{5}{2}^+)$
82	−68063	β^+	8,3	s	1^+
83	−72206	β^+	7,1	m	$\frac{9}{2}^+$
84	−73893	β^+	39,5	m	(6^+)
85	−77842	β^+	2,7	h	$(\frac{1}{2}^-)$
86	−79283	β^+	14,7	h	4^-
87	−83018	β^+	79,8	h	$\frac{1}{2}^-$
88	−84298	β^+	106,6	d	4^-
89	−87709	*	100,00 %		$\frac{1}{2}^-$
90	−86494	β^-	64,0	h	2^-
91	−86951	β^-	58,5	d	$\frac{1}{2}^-$
92	−84817	β^-	3,5	h	2^-
93	−84228	β^-	10,2	h	$\frac{1}{2}^-$
94	−82353	β^-	18,7	m	2^-
95	−81211	β^-	10,3	m	$\frac{1}{2}^-$
96	−78312	β^-	5,3	s	0^-
97	−78127	β^-	3,8	s	$\frac{1}{2}^-$
98	−72901	β^-	548,0	ms	$(0)^-$
99	−70656	β^-	1,5	s	$\frac{5}{2}^+$
100	−67933	β^-	735,0	ms	(1^-)
101	−65067	β^-	426,0	ms	$\frac{5}{2}^+$
102	−61173	β^-	298,0	ms	(2^-)
103	−58458	β^-	220,0	ms	# $\frac{5}{2}^+$
104	#−54060	β^-	197,0	ms	

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$		J^P
		^{39}Y			
108	#−37300	β^-	60,0	ms	
109	#−33200	β^-	#15	ms	# $\frac{5}{2}^+$
		^{40}Zr			
76	#−41300	β^+	#50	ns	0^+
77	#−47060	β^+	56,0	ms	# $\frac{5}{2}^+$
80	−65520	β^+	4,6	s	0^+
81	−68400	β^+	5,5	s	$(\frac{5}{2}^-)$
82	#−69940	β^+	32,0	s	0^+
83	−69011	β^+	41,6	s	# $\frac{1}{2}^-$
84	−71421	β^+	25,8	m	0^+
85	−73174	β^+	7,9	m	$\frac{7}{2}^+$
86	−77969	β^+	16,5	h	0^+
87	−79947	β^+	1,7	h	$(\frac{9}{2})^+$
88	−83628	CE	83,4	d	0^+
89	−84876	β^+	78,4	h	$\frac{9}{2}^+$
90	−88773	*	51,45 %		0^+
91	−87890	*	11,22 %		$\frac{5}{2}^+$
92	−88459	*	17,15 %		0^+
93	−87122	β^-	1,6 Ma		$\frac{5}{2}^+$
94	−87270	*	17,38 %		0^+
95	−85661	β^-	64,0	d	$\frac{5}{2}^+$
96	−85414	2,80 %	30,0	Ea	0^+
97	−82948	β^-	16,7	h	$\frac{1}{2}^+$
98	−81203	β^-	30,7	s	0^+
99	−77624	β^-	2,1	s	$\frac{1}{2}^+$
100	−76982	β^-	7,1	s	0^+
101	−73171	β^-	3,3	s	$\frac{5}{2}^+$
102	−71594	β^-	2,9	s	0^+
103	−67821	β^-	1,4	s	# $\frac{5}{2}^-$
104	−65730	β^-	920,0	ms	0^+
105	−61471	β^-	670,0	ms	
106	#−58910	β^-	187,0	ms	0^+
107	#−54270	β^-	138,0	ms	
108	#−51950	β^-	73,0	ms	0^+
109	#−46190	β^-	60,0	ms	
110	#−42800	β^-	42,0	ms	0^+
111	#−37660	β^-	#30	ms	
112	#−33810	β^-	#15	ms	0^+
		^{41}Nb			
82	#−52200	β^+	50,0	ms	(0^+)
83	−58410	β^+	4,1	s	$(\frac{5}{2}^+)$
84	#−61020	β^+	9,8	s	(1^+)
85	−66280	β^+	20,9	s	$(\frac{9}{2}^+)$
86	−69130	β^+	88,0	s	(6^+)
87	−73873	β^+	3,5	m	$(\frac{1}{2}^-)$
88	−76180	β^+	14,6	m	(8^+)
89	−80626	β^+	2,0	h	$(\frac{9}{2}^+)$
90	−82662	β^+	14,6	h	8^+
91	−86630	CE	680,0	a	$\frac{9}{2}^+$
92	−86853	β^+	34,7 Ma		$(7)^+$
93	−87219	*	100,00 %		$\frac{9}{2}^+$
94	−86389	β^-	20,3 Ka		6^+
95	−86785	β^-	35,0	d	$\frac{9}{2}^+$
96	−85607	β^-	23,4	h	6^+
97	−85608	β^-	72,1	m	$\frac{9}{2}^+$
98	−83530	β^-	2,9	s	1^+
99	−82332	β^-	15,0	s	$\frac{9}{2}^+$
100	−79809	β^-	1,5	s	1^+
101	−78868	β^-	7,1	s	# $(\frac{5}{2})^+$
102	−76911	β^-	4,3	s	(4^+)

105	#−60820	β^-	84.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
106	#−46050	β^-	72.0 ms	
107	#−42300	β^-	45.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
103	−75025	β^-	1.5 s	$\#\frac{5}{2}^-$
104	−71825	β^-	4.9 s	(1^+)
105	−69912	β^-	3.0 s	$\#\frac{5}{2}^+$

$_{41}$Nb

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$	J^P
106	−66200	β^-	# ms	$\#2^+$
107	−63730	β^-	296.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
108	−59546	β^-	210.0 ms	(2^+)
109	−56630	β^-	101.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
110	#−52140	β^-	82.0 ms	$\#(5)(1^+)$
111	#−46880	β^-	62.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
112	#−44270	β^-	35.0 ms	$\#2^+$
113	#−40610	β^-	#20 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
114	#−35390	β^-	#15 ms	0^+
115	#−31950	β^-	#10 ms	$\#\frac{5}{2}^+$

$_{42}$Mo

A	Δ (keV)		abund.	$t_{1/2}$	J^P
83	#−46690	β^+		23.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
84	#−54500	β^+		2.3 s	0^+
85	−57510	β^+		3.2 s	$(\frac{1}{2}^-)$
86	−64110	β^+		19.6 s	0^+
87	−65884	β^+		14.1 s	$\#\frac{7}{2}^+$
88	−72687	β^+		8.0 m	0^+
89	−75016	β^+		2.1 m	$(\frac{9}{2}^+)$
90	−80173	β^+		5.6 h	0^+
91	−82209	β^+		15.5 m	$\frac{9}{2}^+$
92	−86807		14.53 %		0^+
93	−86806	EC		4.0 ka	$\frac{5}{2}^+$
94	−86412		9.15 %		0^+
95	−87710		15.84 %		$\frac{5}{2}^+$
96	−86793		16.67 %		0^+
97	−87543		9.60 %		$\frac{5}{2}^+$
98	−86114		24.39 %		0^+
99	−85069	β^-		66.0 h	$\frac{1}{2}^+$
100	−80189	9.82 %		7.3 Ea	0^+
101	−83516	β^-		14.6 m	$\frac{1}{2}^+$
102	−83570	β^-		11.3 m	0^+
103	−80967	β^-		67.5 s	$\frac{5}{2}^+$
104	−80856	β^-		60.0 s	0^+
105	−77943	β^-		35.6 s	$(\frac{5}{2}^-)$
106	−76111	β^-		8.7 s	0^+
107	−72658	β^-		3.5 s	$(\frac{5}{2}^+)$
108	−70762	β^-		1.1 s	0^+
109	−66672	β^-		700.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
110	−64519	β^-		296.0 ms	0^+
111	−59998	β^-		186.0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
112	#−57460	β^-		121.0 ms	0^+
113	#−52770	β^-		79.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
114	#−49810	β^-		63.0 ms	0^+
115	#−44780	β^-		90.0 ms	
116	#−41600	β^-		#20 ms	0^+
117	#−36170	β^-		#10 ms	

$_{43}$Tc

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$	J^P
86	#−51300	β^+	55.0 ms	(0^+)
87	−57690	β^+	2.2 s	$\#\frac{9}{2}^+$
88	−61680	β^+	6.4 s	(6^+)
89	−67395	β^+	12.8 s	$(\frac{9}{2}^+)$
90	−70724	β^+	49.2 s	(8^+)
91	−75986	β^+	3.1 m	$(\frac{9}{2})^+$
92	−78926	β^+	4.3 m	$(8)^+$
93	−83606	β^+	2.8 h	$\frac{9}{2}^+$
94	−84157	β^+	293.0 m	7^+
95	−86030	β^+	20.0 h	$\frac{9}{2}^+$
96	−85820	β^+	4.3 d	7^+

$_{43}$Tc

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$	J^P
102	−81571	β^-	5.3 s	1^+
103	−83602	β^-	54.2 s	$\frac{5}{2}^+$
104	−82507	β^-	18.3 m	(3^+)
105	−82290	β^-	7.6 m	$(\frac{9}{2}^-)$
106	−79776	β^-	35.6 s	$(1,2)$
107	−78748	β^-	21.2 s	$\#\frac{5}{2}^-$
108	−75921	β^-	5.2 s	$(2)^+$
109	−74281	β^-	1.1 s	$\#\frac{5}{2}^-$
110	−71032	β^-	900.0 ms	$(2^+,3^+)$
111	−69029	β^-	350.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
112	−65256	β^-	290.0 ms	$\#2^+$
113	−62812	β^-	169.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
114	#−59770	β^-	90.0 ms	(1^+)
115	#−55910	β^-	85.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
116	#−51460	β^-	50.0 ms	$\#2^+$
117	#−48020	β^-	130.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
118	#−43790	β^-	#30 ms	$\#2^+$
119	#−40070	β^-	#20 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
120	#−35520	β^-	#10 ms	0^+

$_{44}$Ru

A	Δ (keV)		abund.	$t_{1/2}$	J^P
87	#−45930	β^+		#50 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
88	#−54400	β^-		1.3 s	0^+
89	#−58110	β^+		1.5 s	$(\frac{9}{2}^+)$
90	−63864	β^-		11.0 s	0^+
91	−68239	β^+		9.0 s	$(\frac{9}{2}^+)$
92	−74301	β^-		3.7 m	0^+
93	−77216	β^-		59.7 s	$(\frac{9}{2})^+$
94	−82684	β^-		51.8 m	0^+
95	−83456	β^-		1.6 h	$\frac{5}{2}^+$
96	−86079		5.54 %		0^+
97	−86119	β^-		2.8 d	$\frac{5}{2}^+$
98	−88225		1.87 %		0^+
99	−87621		12.76 %		$\frac{5}{2}^+$
100	−89228		12.60 %		0^+
101	−87954		17.06 %		$\frac{5}{2}^+$
102	−89102		31.55 %		0^+
103	−87263	β^-		39.2 d	$\frac{3}{2}^+$
104	−85093		18.62 %		0^+
105	−85032	β^-		4.4 h	$\frac{3}{2}^+$
106	−80322	β^-		371.8 d	0^+
107	−83860	β^-		3.8 m	$(\frac{5}{2})^+$
108	−80659	β^-		4.6 m	0^+
109	−80736	β^-		34.5 s	$\#\frac{5}{2}^+$
110	−80071	β^-		12.0 s	0^+
111	−76763	β^-		2.1 s	$\frac{5}{2}^+$
112	−75629	β^-		1.8 s	0^+
113	−71870	β^-		800.0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
114	−70022	β^-		540.0 ms	0^+
115	−66300	β^-		322.0 ms	$(\frac{3}{2}^+)$
116	−64069	β^-		210.0 ms	0^+
117	−59820	β^-		143.0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
118	#−57260	β^-		190.0 ms	0^+
119	#−52560	β^-		#170 ms	
120	#−50010	β^-		#80 ms	0^+
121	#−45050	β^-		#60 ms	
122	#−42410	β^-		#40 ms	0^+
123	#−37960	β^-		#20 ms	
124	#−34420	β^-		#10 ms	0^+

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
97	−87219	CE	4.2 Ma	$\frac{9}{2}^+$
98	−86491	β^-	4.2 Ma	$(6)^+$
99	−87326	β^-	211.1 ka	$\frac{9}{2}^+$
100	−86019	β^-	15.5 s	1^+
101	−86341	β^-	14.2 m	$\frac{5}{2}^+$

$_{45}$Rh

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
89	#−40030	β^-	#10 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
90	#−51060	β^+	15.0 ms	$\#0^+$
91	#−58800	β^-	1.6 s	$\#\frac{1}{2}^+$
92	−62099	β^+	4.7 s	(6^+)

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
93	−69011	β^+	13.9 s	$\#\frac{9}{2}^+$
94	−72908	β^+	70.6 s	(4^+)
95	−78341	β^+	5.0 m	$(\frac{9}{2})^+$
96	−79686	β^+	9.9 m	6^+
97	−82600	β^+	30.7 m	$\frac{9}{2}^+$
98	−85175	β^+	8.7 m	$(2)^+$
99	−86578	β^+	16.1 d	$(\frac{1}{2}^-)$
100	−85588	β^+	20.8 h	1^-
101	−87411	CE	3.3 a	$\frac{1}{2}^-$
102	−86780	β^+	207.0 d	$(1^-,2^-)$
103	−88028	a	100.00 %	$\frac{1}{2}^-$
104	−86955	β^-	42.3 s	1^+
105	−87850	β^-	35.4 h	$\frac{7}{2}^+$
106	−86362	β^-	30.1 s	1^+
107	−86804	β^-	21.7 m	$\frac{7}{2}^+$
108	−85092	β^-	16.8 s	1^+
109	−85600	β^-	80.0 s	$\frac{7}{2}^+$
110	−82829	β^-	3.3 s	(1^+)
111	−82305	β^-	11.0 s	$(\frac{7}{2}^+)$
112	−79730	β^-	3.4 s	1^+
113	−78768	β^-	2.8 s	$(\frac{7}{2}^+)$
114	−75710	β^-	1.9 s	1^+
115	−74329	β^-	990.0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
116	−70740	β^-	685.0 ms	1^+
117	−69898	β^-	421.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
118	−64888	β^-	281.0 ms	$\#(4^-10)(^+)$
119	−62923	β^-	171.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
120	#−58520	β^-	126.0 ms	
121	#−56490	β^-	100.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
122	#−52170	β^-	#80 ms	
123	#−49540	β^-	#60 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
124	#−46170	β^-	#40 ms	
125	#−42210	β^-	#20 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
126	#−37760	β^-	#10 ms	

$_{46}$Pd

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
91	#−16280	β^+	#10 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
92	#−35070	β^+	1.1 s	0^+
93	#−39140	β^+	1.1 s	$(\frac{5}{2}^+)$
94	−66101	β^+	9.0 s	0^+
95	−69905	β^+	7.5 s	$\#\frac{5}{2}^+$
96	−76182	β^+	122.0 s	0^+
97	−77506	β^+	3.1 m	$\#\frac{5}{2}^+$
98	−81321	β^+	17.7 m	0^+
99	−82181	β^+	21.4 m	$(\frac{5}{2})^+$
100	−86227	CE	3.6 d	0^+
101	−85431	β^+	8.5 h	$\frac{5}{2}^+$
102	−87491	a	1.02 %	0^+
103	−87385	CE	17.0 d	$\frac{5}{2}^+$
104	−89395	a	11.14 %	0^+
105	−89417	a	22.33 %	$\frac{5}{2}^+$
106	−89907	a	27.33 %	0^+
107	−89372	β^-	6.5 Ma	$\frac{5}{2}^+$
108	−89324	a	26.46 %	0^+
109	−87606	β^-	13.7 h	$\frac{5}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
120	−70280	β^-	492.0 ms	0^+
121	−66182	β^-	285.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
122	−64616	β^-	175.0 ms	0^+
123	#−60420	β^-	180.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
124	#−56550	β^-	50.0 ms	0^+
125	#−54120	β^-	#60 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
126	#−52020	β^-	#50 ms	0^+
127	#−47410	β^-	#10 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
128	#−44870	β^-	#20 ms	0^+

$_{47}$Ag

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
93	#−46270	p	#5 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
94	#−52410	β^+	37.0 ms	$\#0^+$
95	#−59600	β^+	1.8 s	$(\frac{9}{2}^+)$
96	−64510	β^+	4.4 s	$(6)^+$
97	−70890	β^+	25.5 s	$\#\frac{9}{2}^+$
98	−73070	β^+	47.5 s	(5^+)
99	−76712	β^+	2.1 m	$(\frac{9}{2}^+)$
100	−78138	β^+	2.0 m	$(5)^+$
101	−81934	β^+	11.1 m	$\frac{9}{2}^+$
102	−82247	β^+	12.9 m	$5(^+)$
103	−84800	β^+	65.7 m	$\frac{7}{2}^+$
104	−85116	β^+	69.2 m	5^+
105	−87071	β^+	41.3 d	$\frac{5}{2}^+$
106	−86942	β^+	24.0 m	1^+
107	−88406	a	51.84 %	$\frac{1}{2}^-$
108	−87606	β^-	2.4 m	1^+
109	−88719	a	48.16 %	$\frac{1}{2}^-$
110	−87457	β^-	24.6 s	1^+
111	−88216	β^-	7.4 d	$\frac{1}{2}^-$
112	−86583	β^-	3.1 h	$2(^-)$
113	−87027	β^-	5.4 h	$\frac{1}{2}^-$
114	−84931	β^-	4.6 s	1^+
115	−84983	β^-	20.0 m	$\frac{1}{2}^-$
116	−82548	β^-	3.6 m	(0^-)
117	−82162	β^-	73.6 s	$\#\frac{1}{2}^-$
118	−79553	β^-	3.8 s	1^-
119	−78636	β^-	6.0 s	$\#\frac{1}{2}^-$
120	−75652	β^-	1.2 s	$\#3(^+)$
121	−74400	β^-	780.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
122	−71110	β^-	529.0 ms	(3^+)
123	−69550	β^-	300.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
124	−66200	β^-	172.0 ms	$\#3^+$
125	−64290	β^-	166.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
126	#−60760	β^-	55.0 ms	$\#2^+$
127	#−58680	β^-	79.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
128	#−54900	β^-	58.0 ms	
129	#−52210	β^-	44.0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
130	#−48920	β^-	35.0 ms	0^+

$_{48}$Cd

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
95	#−46630	β^+	90.0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
96	#−56670	β^+	880.0 ms	0^+
97	#−60450	β^+	1.1 s	$(\frac{9}{2}^+)$
98	−67640	β^+	9.2 s	0^+

110	−88331	ε	11,72 %	0^+
111	−86986	β^-	23,4 m	0^+
112	−86922	β^-	21,0 h	0^+
113	−85591	β^-	93,0 s	$(\frac{1}{2}^+)$
114	−83491	β^-	2,4 m	0^+
115	−80427	β^-	25,0 s	$(\frac{1}{2}^+)$
116	−79892	β^-	11,8 s	0^+
117	−76926	β^-	4,3 s	$(\frac{1}{2}^+)$
118	−75388	β^-	1,9 s	0^+
119	−71408	β^-	920,0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$

99	−69231	β^+	16,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
100	−74194	β^+	49,1 s	0^+
101	−75896	β^+	1,4 m	$\#\frac{1}{2}^+$
102	−79659	β^+	5,5 m	0^+
103	−80652	β^+	7,3 m	$\#\frac{5}{2}^+$
104	−83963	β^+	57,7 m	0^+
105	−84333	β^+	55,5 m	$\frac{5}{2}^+$
106	−87132	ε	1,25 %	0^+
107	−86990	β^+	6,5 h	$\frac{5}{2}^+$
108	−89252	ε	,89 %	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{48}$Cd		
109	−88504	EC	461,4 d	$\frac{5}{2}^+$
110	−90348	ε	12,49 %	0^+
111	−89253	ε	12,80 %	$\frac{1}{2}^+$
112	−90575	ε	24,13 %	0^+
113	−89049	12,22 %	8,0 Pa	$\frac{1}{2}^+$
114	−90014	ε	28,73 %	0^+
115	−88084	β^-	53,5 h	$\frac{1}{2}^+$
116	−88712	7,49 %	30,0 Ea	0^+
117	−86118	β^-	2,5 h	$\frac{1}{2}^+$
118	−86702	β^-	50,3 m	0^+
119	−85980	β^-	2,7 m	$\frac{1}{2}^+$
120	−85957	β^-	50,8 s	0^+
121	−84073	β^-	13,5 s	$(\frac{3}{2}^+)$
122	−83612	β^-	5,2 s	0^+
123	−77414	β^-	2,1 s	$(\frac{3}{2}^+)$
124	−76701	β^-	1,3 s	0^+
125	−73348	β^-	680,0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
126	−72256	β^-	515,0 ms	0^+
127	−68491	β^-	370,0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
128	−67242	β^-	280,0 ms	0^+
129	#−63510	β^-	242,0 ms	$\frac{3}{2}^+$
130	−61690	β^-	162,0 ms	0^+
131	#−55330	β^-	68,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
132	#−50200	β^-	97,0 ms	0^+
133	#−43920	β^-	57,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
		$_{49}$In		
97	#−47190	β^+	50,0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
98	#−53900	β^+	37,0 ms	$\#0^+$
99	#−61980	β^+	3,1 s	$\#\frac{9}{2}^+$
100	−64310	β^+	5,8 s	$\#6^+$
101	#−68610	β^+	15,1 s	$\#\frac{9}{2}^+$
102	−70694	β^+	23,3 s	(6^+)
103	−74090	β^+	60,0 s	$\#\frac{9}{2}^+$
104	−76183	β^+	1,8 m	(6^+)
105	−79641	β^+	5,1 m	$\frac{9}{2}^+$
106	−80608	β^+	6,2 m	7^+
107	−83564	β^+	32,4 m	$\frac{9}{2}^+$
108	−84120	β^+	58,0 m	7^+
109	−86488	β^+	4,2 h	$\frac{9}{2}^+$
110	−86471	β^+	4,9 h	7^+
111	−88391	EC	2,8 d	$\frac{9}{2}^+$
112	−87991	β^+	15,0 m	1^+
113	−89365	ε	4,29 %	$\frac{9}{2}^+$
114	−88568	β^-	71,9 s	1^+
115	−89696	95,71 %	441,0 Ta	$\frac{9}{2}^+$
116	−88249	β^-	14,1 s	1^+
117	−88943	β^-	43,2 m	$\frac{9}{2}^+$
118	−87934	β^-	5,0 s	1^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{49}$In		
135	#−46580	β^-	92,0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
		$_{50}$Sn		
99	#−47940	β^+	#5 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
100	−57280	β^+	1,1 s	0^+
101	−60810	β^+	2,0 s	$(\frac{7}{2}^+)$
102	−64930	β^+	3,8 s	0^+
103	−66970	β^+	7,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
104	−71627	β^+	20,8 s	0^+
105	−73339	β^+	34,0 s	$(\frac{5}{2}^+)$
106	−77354	β^+	1,9 m	0^+
107	−78613	β^+	2,9 m	$(\frac{5}{2}^+)$
108	−82070	β^+	10,3 m	0^+
109	−82631	β^+	18,0 m	$\#\frac{5}{2}^{(+)}$
110	−85842	EC	4,2 h	0^+
111	−85940	β^+	35,3 m	$\frac{7}{2}^+$
112	−88656	ε	,97 %	0^+
113	−88329	β^+	115,1 d	$\frac{1}{2}^+$
114	−90557	ε	,66 %	0^+
115	−90033	ε	,34 %	$\frac{1}{2}^+$
116	−91525	ε	14,54 %	0^+
117	−90997	ε	7,68 %	$\frac{1}{2}^+$
118	−91662	ε	24,22 %	0^+
119	−90006	ε	8,59 %	$\frac{1}{2}^+$
120	−91098	ε	32,58 %	0^+
121	−89197	β^-	27,0 h	$\frac{3}{2}^+$
122	−89941	ε	4,63 %	0^+
123	−87816	β^-	129,2 d	$\frac{11}{2}^-$
124	−88234	ε	5,79 %	0^+
125	−85896	β^-	9,6 d	$\frac{11}{2}^-$
126	−86015	β^-	230,0 ka	0^+
127	−83471	β^-	2,1 h	$\frac{11}{2}^-$
128	−83302	β^-	59,1 m	0^+
129	−80607	β^-	2,2 m	$\frac{3}{2}^+$
130	−80132	β^-	3,7 m	0^+
131	−77272	β^-	56,0 s	$\frac{3}{2}^+$
132	−76643	β^-	39,7 s	0^+
133	−70874	β^-	1,5 s	$(\frac{7}{2}^-)$
134	−66432	β^-	1,0 s	0^+
135	−60632	β^-	530,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
136	#−55900	β^-	290,0 ms	0^+
137	#−49790	β^-	273,0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
138	#−44860	β^-	#100 ns	0^+
		$_{51}$Sb		
104	−59170	β^+	470,0 ms	
105	−64016	β^+	1,1 s	$(\frac{5}{2}^+)$
106	−66473	β^+	600,0 ms	(2^+)
107	−70050	β^+	4,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$

118	−67700	β^-	2,1 m	$\frac{9}{2}^+$
120	−69790	β^-	3,1 s	1^+
121	−69696	β^-	23,1 s	$\frac{9}{2}^+$
122	−73570	β^-	1,5 s	1^+
123	−73490	β^-	6,2 s	$(\frac{5}{2})^+$
124	−75970	β^-	3,1 s	$(1)^+$
125	−76477	β^-	2,4 s	$\frac{9}{2}^+$
126	−77773	β^-	1,5 s	$\#3(^+)$
127	−78698	β^-	1,1 s	$\frac{9}{2}^+$
128	−71150	β^-	840,0 ms	$(3)^+$
129	−72937	β^-	611,0 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
130	−69690	β^-	290,0 ms	$1(^-)$
131	−68025	β^-	280,0 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
132	−62410	β^-	207,0 ms	(1^-)
133	#−57160	β^-	168,0 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
134	#−51660	β^-	140,0 ms	

108	−72446	β^+	7,4 s	(4^+)
109	−76251	β^+	17,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
110	−77450	β^+	23,6 s	(3^+)
111	−80837	β^+	75,0 s	$(\frac{9}{2}^+)$
112	−81699	β^+	51,4 s	3^+
113	−84417	β^+	6,7 m	$\frac{5}{2}^+$
114	−84406	β^+	3,5 m	3^+
115	−87009	β^+	32,1 m	$\frac{5}{2}^+$
116	−86822	β^+	15,8 m	3^+
117	−88640	β^+	2,8 h	$\frac{5}{2}^+$
118	−87996	β^+	3,6 m	1^+
119	−89474	CE	38,0 h	$\frac{5}{2}^+$
120	−88418	β^+	15,9 m	1^+
121	−89598	*	57,21 %	$\frac{5}{2}^+$
122	−89339	β^-	2,7 d	2^-
123	−89224	*	42,79 %	$\frac{7}{2}^+$

$_{51}$Sb

134	−87021	β^-	60,2 d	3^-
135	−85256	β^-	2,8 s	$\frac{7}{2}^+$
136	−86390	β^-	12,4 d	(8^-)
137	−86699	β^-	3,8 d	$\frac{7}{2}^+$
138	−84630	β^-	9,0 h	8^-
139	−84629	β^-	4,4 h	$\frac{7}{2}^+$
140	−82286	β^-	39,5 m	(8^-)
141	−81991	β^-	28,0 m	$(\frac{7}{2}^+)$
142	−79635	β^-	2,8 m	$(3)^+$
143	−78923	β^-	2,3 m	$\#\frac{7}{2}^+$
144	−74020	β^-	780,0 ms	(10^-)
145	−69689	β^-	1,7 s	$(\frac{7}{2}^+)$
146	−64510	β^-	929,0 ms	$\#1^-$
147	−60030	β^-	454,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
148	#−54540	β^-	350,0 ms	$\#2^-$
149	#−49790	β^-	93,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
150	#−43940	β^-	#100 ms	$\#2^-$

$_{52}$Te

105	−52610	α	633,0 ns	$(\frac{7}{2}^+)$
106	−58220	α	80,0 µs	0^+
107	−60540	α	3,1 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
108	−65782	β^+	2,1 s	0^+
109	−67715	β^+	4,6 s	$(\frac{9}{2}^+)$
110	−72230	β^+	18,6 s	0^+
111	−73587	β^+	26,2 s	$(\frac{9}{2}^+)$
112	−77565	β^+	2,0 m	0^+
113	−78347	β^+	1,7 m	$(\frac{7}{2}^+)$
114	−81889	β^+	15,2 m	0^+
115	−82063	β^+	5,8 m	$\frac{7}{2}^+$
116	−85269	β^+	2,5 h	0^+
117	−85095	β^+	62,0 m	$\frac{1}{2}^+$
118	−87697	CE	6,0 d	0^+
119	−87191	CE	16,0 h	$\frac{1}{2}^+$
120	−89368	*	,09 %	0^+
121	−88644	β^+	19,2 d	$\frac{1}{2}^+$
122	−90314	*	2,55 %	0^+
123	−89172	*	,89 %	$\frac{1}{2}^+$
124	−90525	*	4,74 %	0^+
125	−89023	*	7,07 %	$\frac{1}{2}^+$
126	−90065	*	18,84 %	0^+
127	−88251	β^-	9,4 h	$\frac{3}{2}^+$
128	−88090	β^- 2,2 %	2,2 %	0^+

$_{53}$I

112	−67069	β^+	3,4 s	$\#1^+$
113	−71120	β^+	6,6 s	$\#\frac{5}{2}^+$
114	#−72800	β^+	2,1 s	1^+
115	−76388	β^+	1,3 m	$\#\frac{5}{2}^+$
116	−77490	β^+	2,9 s	1^+
117	−80436	β^+	2,2 m	$(\frac{5}{2})^+$
118	−80971	β^+	13,7 m	2^-
119	−83766		19,1 m	$\frac{5}{2}^+$
120	−83753	β^+	81,7 m	2^-
121	−86262	β^+	2,1 h	$\frac{5}{2}^+$
122	−86080	β^+	3,6 m	1^+
123	−87944	β^+	13,2 h	$\frac{5}{2}^+$
124	−87365	β^+	4,2 d	2^-
125	−88897	CE	59,4 d	$\frac{5}{2}^+$
126	−87911	β^+	12,9 d	2^-
127	−88984	*	100,00 %	$\frac{5}{2}^+$
128	−87790	β^-	25,0 m	1^+
129	−88507	β^-	15,7 Ma	$\frac{7}{2}^+$
130	−86936	β^-	12,4 h	5^+
131	−87442	β^-	8,0 d	$\frac{7}{2}^+$
132	−85703	β^-	2,3 h	4^+
133	−85887	β^-	20,8 h	$\frac{7}{2}^+$
134	−84069	β^-	52,5 m	$(4)^+$
135	−83789	β^-	6,6 h	$\frac{7}{2}^+$
136	−79545	β^-	83,4 s	(1^-)
137	−76356	β^-	24,1 s	$\#\frac{7}{2}^+$
138	−71980	β^-	6,2 s	(1^-)
139	−68469	β^-	2,3 s	$\#\frac{7}{2}^+$
140	−63600	β^-	860,0 ms	(4^-)
141	#−59000	β^-	430,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
142	−54770	β^-	222,0 ms	$\#2^-$
143	#−50690	β^-	130,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
144	#−45280	β^-	#100 ms	$\#1^-$
145	#−40940	β^-	#100 ms	$\#\frac{7}{2}^+$

$_{54}$Xe

109	−46170	α	13,0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
110	−51920	α	93,0 ms	0^+
111	−54390	β^+	740,0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
112	−60026	β^+	2,7 s	0^+
113	−62204	β^+	2,7 s	$\#\frac{5}{2}^+$
114	−67066	β^+	10,0 s	0^+
115	−69224	β^+		$(\frac{5}{2}^+)$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
128	[illegible]	31.74 %	[illegible]	0^{+}
129	−87004	β^-	69,6 m	$\frac{3}{2}^{+}$
130	−87352	34,08 %	790,0 Ea	0^{+}
131	−85211	β^-	25,0 m	$\frac{3}{2}^{+}$
132	−85185	β^-	3,2 d	0^{+}
133	−82932	β^-	12,5 m	# $\frac{3}{2}^{+}$
134	−82636	β^-	41,8 m	0^{+}
135	−77727	β^-	19,0 s	($\frac{7}{2}^{-}$)
136	−74425	β^-	17,6 s	0^{+}
137	−69304	β^-	2,5 s	# $\frac{3}{2}^{-}$
138	−65096	β^-	1,4 s	0^{+}
139	# −60206	β^-	#500 ms	# $\frac{5}{2}^{-}$
140	# −56357	β^-	#300 ms	0^{+}
141	# −50490	β^-	#150 ms	# $\frac{5}{2}^{-}$
142	# −46370	β^-	#100 ms	0^{+}
143	# −40220	β^-	#100 ms	# $\frac{7}{2}^{+}$
		$_{53}$I		
107	# −49670	α	#20 μs	# $\frac{5}{2}^{+}$
108	−52650	α	36.0 ms	# 1^{+}
109	−57673	p	103,0 μs	$\frac{1}{2}^{+}$
110	−60460	β^+	664,0 ms	(1^{+})
111	−64954	β^+	2,5 s	# $\frac{5}{2}^{+}$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
115	−68657	β^+	18,0 s	($\frac{5}{2}^{+}$)
116	−73047	β^+	59,0 s	0^{+}
117	−74185	β^+	61,0 s	$\frac{5}{2}$($^{+}$)
118	−78079	β^+	3,8 m	0^{+}
119	−78794		5.8 m	$\frac{5}{2}$($^{+}$)
120	−82172	β^+	46,0 m	0^{+}
121	−82481	β^+	40,1 m	$\frac{5}{2}$($^{+}$)
122	−86365	CE	20,1 h	0^{+}
123	−85249	β^+	2.1 h	$\frac{1}{2}^{+}$
124	−87661	•	.10 %	0^{+}
125	−87193	β^+	16.9 h	$\frac{1}{2}$($^{+}$)
126	−89146	•	.09 %	0^{+}
127	−88322	CE	36,3 d	$\frac{1}{2}^{+}$
128	−89860	•	1,91 %	0^{+}
129	−88696	•	26,40 %	$\frac{1}{2}^{+}$
130	−89880	•	4,07 %	0^{+}
131	−88413	•	21,23 %	$\frac{3}{2}^{+}$
132	−89278	•	26,91 %	0^{+}
133	−87643	β^-	5,2 d	$\frac{3}{2}^{+}$
134	−88124	•	10,44 %	0^{+}
135	−86417	β^-	9.1 h	$\frac{3}{2}^{+}$
136	−86429	•	8,86 %	0^{+}
137	−82383	β^-	3.8 m	$\frac{7}{2}^{-}$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
		$_{54}$Xe		
138	−79972	β^-	14.1 m	0^{+}
139	−75644	β^-	39.7 s	$\frac{3}{2}^{-}$
140	−72986	β^-	13,6 s	0^{+}
141	−68197	β^-	1.7 s	# $\frac{5}{2}$($^{-}$)
142	−65229	β^-	1.2 s	0^{+}
143	−60203	β^-	511.0 ms	$\frac{5}{2}^{-}$
144	−56872	β^-	388,0 ms	0^{+}
145	−51493	β^-	188.0 ms	# $\frac{3}{2}^{-}$
146	−47965	β^-	146.0 ms	0^{+}
147	# −42010	β^-	130.0 ms	# $\frac{3}{2}^{-}$
148	# −39000	β^-	#100 ms	0^{+}
		$_{55}$Cs		
112	−46290	p	490.0 μs	# 1^{+}
113	−51764	p	16.7 μs	($\frac{3}{2}^{+}$)
114	−54680	β^+	570.0 ms	(1^{+})
115	# −59700	β^+	1,4 s	# $\frac{9}{2}^{+}$
116	# −62080	β^+	700,0 ms	(1^{+})
117	−66490	β^+	8.4 s	# $\frac{9}{2}^{+}$
118	−68409	β^+	14,0 s	2
119	−72305	β^+	43.0 s	$\frac{9}{2}^{+}$
120	−73889	β^+	60.4 s	# 2($^{-}$)
121	−77102	β^+	155.0 s	$\frac{3}{2}$($^{+}$)
122	−78140	β^+	21.2 s	1^{+}
123	−81044	β^+	5.9 m	$\frac{1}{2}^{+}$
124	−81731	β^+	30.9 s	1^{+}
125	−84088	β^+	46.7 m	$\frac{1}{2}$($^{+}$)
126	−84350	β^+	1.6 m	1^{+}
127	−86240	β^+	6,3 h	$\frac{1}{2}^{+}$
128	−85932	β^+	3.6 m	1^{+}
129	−87499	β^+	32,1 h	$\frac{1}{2}^{+}$
130	−86900	β^+	29.2 m	1^{+}
131	−88059	CE	9.7 d	$\frac{5}{2}^{+}$
132	−87156	β^+	6,5 d	2^{+}
133	−88070	•	100,00 %	$\frac{7}{2}^{+}$
134	−86891	β^-	2,1 a	4^{+}
135	−87581	β^-	2.3 Ma	$\frac{7}{2}^{+}$
136	−86338	β^-	13.2 d	5^{+}

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
		$_{56}$Ba		
124	−79090	β^+	11.0 m	0^{+}
125	−79669	β^+	3,3 m	# $\frac{1}{2}$($^{+}$)
126	−82670	β^+	100.0 m	0^{+}
127	−82818	β^+	12,7 m	$\frac{1}{2}^{+}$
128	−85379	CE	2,4 d	0^{+}
129	−85069	β^+	2.2 h	$\frac{1}{2}^{+}$
130	−87261	•	,11 %	0^{+}
131	−86683	β^+	11.5 d	$\frac{1}{2}^{+}$
132	−88435	•	,10 %	0^{+}
133	−87553	CE	10.6 a	$\frac{1}{2}^{+}$
134	−88950	•	2,42 %	0^{+}
135	−87850	•	6,59 %	$\frac{3}{2}^{+}$
136	−88887	•	7,85 %	0^{+}
137	−87721	•	11,23 %	$\frac{3}{2}^{+}$
138	−88261	•	71,70 %	0^{+}
139	−84913	β^-	83,3 m	($\frac{7}{2}^{-}$)
140	−83270	β^-	12,8 d	0^{+}
141	−79733	β^-	18.3 m	$\frac{3}{2}^{-}$
142	−77843	β^-	10,6 m	0^{+}
143	−73997	β^-	14,5 s	$\frac{5}{2}^{-}$
144	−71767	β^-	11.5 s	0^{+}
145	−67516	β^-	4,3 s	$\frac{5}{2}^{-}$
146	−64940	β^-	2.2 s	0^{+}
147	−60264	β^-	894,0 ms	($\frac{3}{2}^{+}$)
148	−57590	β^-	612,0 ms	0^{+}
149	# −53020	β^-	344.0 ms	# $\frac{3}{2}^{-}$
150	# −50250	β^-	300,0 ms	0^{+}
151	# −45390	β^-	#200 ms	# $\frac{3}{2}^{-}$
152	# −42090	β^-	#100 ms	0^{+}
153	# −36920	β^-	#80 ms	# $\frac{5}{2}^{-}$
		$_{57}$La		
116	# −40700	β^+	#10 ms	
117	# −46590	p	21,7 ms	($\frac{3}{2}^{+}$)
118	# −49620	β^+	#200 ms	
119	# −54970	β^+	#1 s	# $\frac{11}{2}^{-}$
120	# −57690	β^+	2.8 s	
121	# −62270	β^+	5,3 s	# $\frac{11}{2}^{-}$

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$		J^P
137	−86545	β^-	30.1	h	$\frac{3}{2}^+$
138	−82887	β^-	33.4	m	3^-
139	−80701	β^-	9.3	m	$\frac{7}{2}^+$
140	−77050	β^-	63.7	s	1^-
141	−74177	β^-	24.8	s	$\frac{7}{2}^+$
142	−70518	β^-	1.7	s	0^-
143	−67674	β^-	1.8	s	$\frac{5}{2}^+$
144	−63271	β^-	994.0	ms	$1(^-)$
145	−60056	β^-	582.0	ms	$\frac{5}{2}^+$
146	−56670	β^-	323.0	ms	1^-
147	−52020	β^-	230.0	ms	$(\frac{3}{2}^+)$
148	−47900	β^-	146.0	ms	
149	#−43760	β^-	#150	ms	$\#\frac{5}{2}^+$
150	#−38820	β^-	#100	ms	
151	#−34660	β^-	#60	ms	$\#\frac{5}{2}^+$

$_{56}$Ba

114	−45900	β^+	530.0	ms	0^+
115	#−39080	β^+	450.0	ms	$\#\frac{5}{2}^+$
116	#−34700	β^+	1.3	s	0^+
117	−27620	β^+	1.8	s	$\#(\frac{3}{2})(^+)$
118	#−23370	β^+	5.2	s	0^+
119	−16490	β^+	5.4	s	$(\frac{5}{2}^+)$
120	−12890	β^+	24.0	s	0^+
121	−7070	β^+	29.7	s	$\frac{5}{2}(^+)$
122	−4460	β^+	2.0	m	0^+
123	−700	β^+	2.7	m	$\frac{5}{2}^+$
122	#−4540	β^+	8.6	s	
123	#−8850	β^+	17.0	s	$\#\frac{11}{2}^-$
124	−7020	β^+	29.2	s	$(7^-,8^-)$
125	−7359	β^+	64.8	s	$\#\frac{11}{2}^-$
126	−7490	β^+	84.0	s	$\#(5)(^+)$
127	−7790	β^+	5.1	m	$(\frac{11}{2}^-)$
128	−7860	β^+	5.2	m	(5^+)
129	−8132	β^+	11.6	m	$\frac{5}{2}^+$
130	−8162	β^+	8.7	m	$3(^+)$
131	−8376	β^+	59.0	m	$\frac{5}{2}^+$
132	−8372	β^+	4.8	h	2^-
133	−8649	β^+	3.9	h	$\frac{5}{2}^+$
134	−8821	β^+	6.4	m	1^+
135	−8804	β^+	19.5	h	$\frac{5}{2}^+$
136	−8804	β^+	9.9	m	1^+
137	−8714	CE	60.0	ka	$\frac{3}{2}^+$
138	−8652	99 %	102.0	Ga	5^+
139	−8722	ε	99.91	%	$\frac{7}{2}^+$
140	−8431	β^-	40.3	h	3^-
141	−8293	β^-	3.9	h	$(\frac{7}{2}^+)$
142	−8002	β^-	91.1	m	2^-
143	−7817	β^-	14.2	m	$(\frac{7}{2})^+$
144	−7486	β^-	10.8	s	(3^-)
145	−7283	β^-	21.8	s	$(\frac{5}{2}^+)$
146	−6905	β^-	6.3	s	2^-
147	−6667	β^-	4.1	s	$(\frac{5}{2}^+)$
148	−6270	β^-	1.3	s	(2^-)

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
149	−6022	β^-	1.0	s	$(\frac{5}{2}^-)$
150	#−5635	β^-	510.0	ms	(3^+)
151	#−5373	β^-	#300	ms	$\#\frac{5}{2}^+$
152	#−4961	β^-	#200	ms	
153	#−4621	β^-	#150	ms	$\#\frac{5}{2}^+$
154	#−4176	β^-	#100	ms	
155	#−3818	β^-	#60	ms	$\#\frac{5}{2}^+$

$_{58}$Ce

119	#−4405	β^+	#200	ms	$\#\frac{5}{2}^+$
120	#−4980	β^+	#250	ms	0^+
121	#−5277	β^+	1.1	s	$\#(\frac{5}{2})(^+)$
122	#−5787	β^+	42	s	0^+
123	#−6029	β^+	5.9	s	$\#(\frac{5}{2})(^+)$
124	#−6492	β^+	9.1	s	0^+
125	#−6666	β^+	9.7	s	$(\frac{7}{2}^-)$
126	−7082	β^+	51.0	s	0^+
127	−7197	β^+	34.0	s	$(\frac{1}{2}^+)$
128	−7553	β^+	5.9	m	0^+
129	−7626	β^+	3.5	m	$(\frac{5}{2}^+)$
130	−7942	β^+	22.9	m	0^+
131	−7971	β^+	10.2	m	$\frac{7}{2}^+$
132	−8247	β^+	3.5	h	0^+
133	−8241	β^+	97.0	m	$\frac{1}{2}^+$
134	−8383	CE	3.2	d	0^+
135	−8461	β^+	17.7	h	$\frac{1}{2}(^+)$
136	−8650	ε	.19	%	0^+
137	−8591	β^+	9.0	h	$\frac{3}{2}^+$
138	−8756	ε	.25	%	0^+
139	−8650	CE	137.6	d	$\frac{3}{2}^+$
140	−8807	ε	88.45	%	0^+
141	−8543	β^-	32.5	d	$\frac{7}{2}^-$
142	−8483	ε	11.11	%	0^+
143	−8160	β^-	33.0	h	$\frac{3}{2}^-$
144	−8043	β^-	284.9	d	0^+

$_{59}$Pr

136	−8134	β^+	13.1	m	2^+
137	−8320	β^+	1.9	h	$\frac{5}{2}^+$
138	−8313	β^+	1.5	m	1^+
139	−8182	β^+	4.4	h	$\frac{5}{2}^+$
140	−8169		3.4	m	1^+
141	−8601	ε	100.00	%	$\frac{5}{2}^+$
142	−8978	β^-	19.1	h	2^-
143	−8806	β^-	13.6	d	$\frac{7}{2}^+$
144	−8075	β^-	17.3	m	0^-
145	−7962	β^-	6.0	h	$\frac{7}{2}^+$
146	−7008	β^-	24.1	m	$(2)^-$
147	−7544	β^-	13.4	m	$\#\frac{5}{2}^+$
148	−7253	β^-	2.3	m	1^-
149	−7103	β^-	2.3	m	$(\frac{5}{2}^+)$
150	−6830	β^-	6.2	s	$(1)^-$
151	−6677	β^-	18.9	s	$(\frac{9}{2}^-)$
152	−6375	β^-	3.6	s	4^+
153	−6106	β^-	4.3	s	$\#\frac{5}{2}^-$
154	−5819	β^-	2.3	s	(8^+)
155	#−5541	β^-	#1	s	$\#\frac{5}{2}^-$
156	#−6157	β^-	#500	ms	
157	#−4854	β^-	#300	ms	$\#\frac{5}{2}^-$
158	#−4433	β^-	#200	ms	
159	#−4109	β^-	#100	ms	$\#\frac{5}{2}^-$

$_{60}$Nd

121	#−4183	β^+	#500	ms	0^+
123	#−4760	β^+	660.0	ms	$\#(\frac{5}{2})(^+)$
126	#−5299	β^+	#1	s	0^+
127	#−5564	β^+	1.8	s	$\#\frac{5}{2}^+$
128	#−6031	β^+	#5	s	0^+
129	#−6292	β^+	6.8	s	$\#\frac{5}{2}^+$
130	−6689	β^+	21.0	s	0^+
131	−6776	β^+	25.4	s	$\#(\frac{5}{2})(^+)$
132	−7142	β^+	1.6	m	0^+

145	−77070	β^-	9,0 m	$\#\frac{5}{2}^-$
146	−75695	β^-	13,6 m	0^+
147	−72014	β^-	56,4 s	$(\frac{5}{2}^-)$
148	−70898	β^-	56,0 s	0^+
149	−68670	β^-	5,3 s	$\#\frac{3}{2}^-$
150	−64847	β^-	4,0 s	0^+
151	−61225	β^-	1,8 s	$(\frac{3}{2}^-)$
152	#−59060	β^-	1,1 s	0^+
153	#−55020	β^-	#500 ms	$\#\frac{3}{2}^-$
154	#−52950	β^-	#300 ms	0^+
155	#−47990	β^-	#200 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
156	#−44870	β^-	#150 ms	0^+
157	#−40010	β^-	#60 ms	$\#\frac{7}{2}^+$

$_{59}Pr$

121	#−41620	p	12,0 ms	$(\frac{5}{2})$
122	#−44960	β^+	#500 ms	
123	#−50940	β^+	#300 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
124	#−53150	β^+	1,2 s	
125	#−58030	β^+	3,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
126	#−60320	β^+	3,1 s	(4, 5, 6)
127	#−64540	β^+	4,2 s	$\#\frac{5}{2}^+$
128	−66891	β^+	2,8 s	(3^+)
129	−69774	β^+	30,0 s	$(\frac{5}{2}^+)$
130	−71150	β^+	30,0 s	#(6, 7)(+)
131	−74300	β^+	1,5 m	$\#\frac{5}{2}^+$
132	−75210	β^+	1,5 m	(2^+)
133	−77938	β^+	6,5 m	$(\frac{5}{2}^+)$
134	−78628	β^+	17,0 m	2^-
135	−80930	β^+	24,0 m	$\frac{5}{2}^{(+)}$
135	−72880	β^+	70,0 s	$(\frac{7}{2}^+)$
134	−75618	β^+	6,5 m	0^+
135	−76214	β^+	12,4 m	$\frac{5}{2}(-)$
136	−79199	β^+	50,7 m	0^+
137	−79565	β^+	38,5 m	$\frac{1}{2}^+$
138	−82018	β^+	5,0 h	0^+
139	−82015	β^+	29,7 m	$\frac{11}{2}^+$
140	−84254	CE	3,4 d	0^+
141	−84199	β^+	2,5 h	$\frac{5}{2}^+$
142	−85919	α	27,15 %	0^+
143	−84002	α	12,17 %	$\frac{7}{2}^-$
144	−83747	23,80 %	2,3 Pa	0^+
145	−81431	α	8,69 %	$\frac{7}{2}^-$
146	−80925	α	17,19 %	0^+
147	−78146	β^-	11,0 d	$\frac{5}{2}^-$
148	−77497	α	5,76 %	0^+
149	−74375	β^-	1,7 h	$\frac{5}{2}^-$
150	−73679	5,64 %	6,7 Ea	0^+
151	−70912	β^-	12,4 m	$\frac{3}{2}^+$
152	−70149	β^-	11,4 m	0^+
153	−67330	β^-	31,6 s	$(\frac{3}{2})^-$
154	−65680	β^-	25,9 s	0^+
155	−62264	β^-	8,9 s	$\#\frac{3}{2}^-$
156	−60470	β^-	5,1 s	0^+
157	#−56462	β^-	#2 s	$\#\frac{5}{2}^-$
158	#−54060	β^-	#700 ms	0^+
159	#−49810	β^-	#500 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
160	#−47130	β^-	#300 ms	0^+
161	#−42690	β^-	#200 ms	$\#\frac{1}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
			$_{61}$Pm		
127	#−44790	β^-	41	s	#$\frac{5}{2}^+$
128	#−47790	β^-	1.0	s	#(5, 6, 7)(−)
129	#−52980	β^+	2.1	s	($\frac{5}{2}^-$)
130	#−55400	β^-	2.6	s	(5+, 6+, 4−)
131	#−59920	β^+	6.3	s	($\frac{11}{2}^-$)
132	#−61630	β^+	6.2	s	(3+)
133	−65410	β^-	13.5	s	($\frac{3}{2}^+$)
134	−66740	β^-	22.0	s	(6−)
135	−70030	β^+	49.0	s	($\frac{5}{2}^+$, $\frac{3}{2}^-$)
136	−71180	β^-	107.0	s	#(5)(−)
137	#−74073	β^-	#2	m	#$\frac{5}{2}^+$
138	−74940	β^+	10.0	s	#1+
139	−77501	β^-	4.2	m	($\frac{5}{2}^+$)
140	−78210	β^+	9.2	s	1+
141	−80523	β^-	20.9	m	$\frac{5}{2}^+$
142	−81142		40.5	s	1+
143	−82960	CE	265.0	d	$\frac{5}{2}^+$
144	−81416	CE	363.0	d	5−
145	−81257	CE	17.7	a	$\frac{5}{2}^+$
146	−79154	CE	5.5	a	3−
147	−79041	β^-	2.6	a	$\frac{7}{2}^+$
148	−76965	β^-	5.4	d	1−
149	−76063	β^-	53.1	h	$\frac{7}{2}^+$
150	−73596	β^-	2.7	h	(1−)
151	−73385	β^-	28.4	h	$\frac{5}{2}^+$
152	−71254	β^-	4.1	m	1+
153	−70648	β^-	5.3	m	$\frac{5}{2}^+$
154	−68190	β^-	1.7	m	(0−, 1−)
155	−68940	β^-	41.5	s	($\frac{5}{2}^+$)
156	−64164	β^-	26.7	s	4(−)
157	−62297	β^-	10.6	s	($\frac{5}{2}^+$)
158	−59089	β^-	4.8	s	
159	−56564	β^-	1.5	s	#$\frac{5}{2}^+$
160	#−53000	β^-	#2	s	
161	#−50240	β^-	#700	ms	#$\frac{5}{2}^+$
162	#−46870	β^-	#500	ms	
163	#−43260	β^-	#200	ms	#$\frac{5}{2}^+$
			$_{62}$Sm		
128	#−38730	β^+	#500	ms	0+
129	#−42140	β^+	550.0	ms	($\frac{3}{2}^+$, $\frac{1}{2}^-$)
130	#−47510	β^-	41	s	0+
131	#−50130	β^+	1.2	s	#$\frac{5}{2}^+$
132	#−56060	β^+	4.0	s	0+
133	#−57230	β^-	2.9	s	($\frac{5}{2}^+$)
134	#−61360	β^+	9.5	s	0+
135	−62860	β^-	10.3	s	($\frac{7}{2}^-$)
136	−66211	β^-	47.0	s	0+
137	−68030	β^+	46.0	s	($\frac{5}{2}^-$)
138	−71498	β^+	3.1	m	0+
139	−73280	β^-	2.6	m	$\frac{1}{2}^+$
140	−76456	β^+	14.8	m	0+
141	−78934	β^-	10.2	m	$\frac{1}{2}^+$
142	−78987	β^-	72.5	m	0+
143	−79517	β^+	8.8	m	$\frac{3}{2}^+$
144	−81965	a	3.07 %		0+
145	−80651	CE	340.0	d	$\frac{7}{2}^-$
146	−80996	α	68.0	Ma	0+
147	−79266	14.99 %	106.6	Gy	$\frac{7}{2}^-$
148	−79096	11.24 %	7.0	Pa	0+
149	−77135	a	13.82 %		$\frac{7}{2}^-$
150	−77050	a	7.38 %		0+
151	−74576	β^-	90.0	a	$\frac{5}{2}^-$
152	−74762	a	26.75 %		0+
153	−72559	β^-	46.3	h	$\frac{3}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
			$_{62}$Sm		
154	−72464	a	22.75 %		0+
155	−70190	β^-	22.3	m	$\frac{3}{2}^-$
156	−69363	β^-	9.4	h	0+
157	−66078	β^-	8.0	m	#$\frac{5}{2}^-$
158	−66250	β^-	5.3	m	0+
159	−62205	β^-	11.4	s	$\frac{5}{2}^-$
160	−60295	β^-	9.6	s	0+
161	−56672	β^-	4.5	s	#$\frac{7}{2}^+$
162	#−54530	β^-	2.1	s	0+
163	#−50790	β^-	#1	s	#$\frac{1}{2}^-$
164	#−48100	β^-	#500	ms	0+
165	#−43810	β^-	#200	ms	#$\frac{5}{2}^-$
			$_{63}$Eu		
130	#−38820	p	1.0	ms	(1−)
131	#−39270	p	17.8	ms	$\frac{3}{2}^+$
132	#−42290	β^+	#100	ms	
133	#−47240	β^+	#200	ms	#$\frac{11}{2}^-$
134	#−49990	β^+	500.0	ms	
135	#−54150	β^+	1.5	s	#$\frac{11}{2}^-$
136	#−56240	β^+	2.3	s	(7+)
137	#−60120	β^+	8.4	s	#$\frac{11}{2}^-$
138	#−61760	β^+	12.1	s	(6−)
139	−65398	β^+	17.9	s	($\frac{11}{2}^-$)
140	−66990	β^+	1.5	s	1+
141	−69926	β^+	40.7	s	$\frac{5}{2}^+$
142	−71310	β^+	2.4	s	1+
143	−74241	β^+	2.6	m	$\frac{5}{2}^+$
144	−75619	β^+	10.2	s	1+
145	−77992	β^+	5.9	d	$\frac{5}{2}^+$
146	−77117	β^+	4.6	d	4−
147	−77544	β^+	24.1	d	$\frac{5}{2}^+$
148	−76299	β^+	54.5	d	5−
149	−76140	CE	93.1	d	$\frac{5}{2}^+$
150	−74792	β^+	36.9	a	5(−)
151	−74052	a	47.81 %		$\frac{5}{2}^+$
152	−72887	β^+	13.5	a	3−
153	−73366	a	52.19 %		$\frac{5}{2}^+$
154	−71797	β^-	8.6	a	3−
155	−71817	β^-	4.8	a	$\frac{5}{2}^+$
156	−70095	β^-	15.2	d	0+
157	−69466	β^-	15.2	h	$\frac{5}{2}^+$
158	−67255	β^-	45.9	m	(1−)
159	−66043	β^-	18.1	m	$\frac{5}{2}^+$
160	−63480	β^-	38.0	s	#(1)(−)
161	−61792	β^-	28.0	s	#$\frac{5}{2}^+$
162	−58090	β^-	10.6	s	
163	−56640	β^-	7.7	s	#$\frac{5}{2}^+$
164	#−53330	β^-	4.2	s	
165	#−50090	β^-	2.7	s	#$\frac{5}{2}^+$
166	#−46990	β^-	1.7	s	
167	#−43880	β^-	#200	ns	#$\frac{5}{2}^+$
			$_{64}$Gd		
133	#−36020	β^+	#10	ms	#$\frac{3}{2}^+$
134	#−41300	β^+	#100	ms	0+
135	#−44290	β^+	1.1	s	($\frac{5}{2}^+$)
136	#−49090	β^+	#1	s	0+
137	#−51210	β^+	2.2	s	#($\frac{7}{2}$)(+)
138	#−55060	β^+	4.7	s	0+
139	#−57630	β^+	0.7	s	#$\frac{9}{2}^-$
140	−61782	β^+	15.8	s	0+
141	−63214	β^+	14.0	s	($\frac{1}{2}^+$)
142	−66960	CE	70.2	s	0+
143	−68200	β^+	39.0	s	($\frac{1}{2}$)+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
		$_{64}$Gd			
144	−71760	β^+	4.5	m	0^+
145	−72924	β^+	23.0	m	$\frac{1}{2}^+$
146	−76086	CE	48.3	d	0^+
147	−75356	β^+	38.1	h	$\frac{7}{2}^-$
148	−76269	α	70.9	a	0^+
149	−75127	β^+	9.3	d	$\frac{7}{2}^-$
150	−75764	α	1.8	Ma	0^+
151	−74188	CE	123.9	d	$\frac{7}{2}^-$
152	−74706	0.20 %	108.0	Ta	0^+
153	−73881	CE	240.4	d	$\frac{3}{2}^-$
154	−73705	*	2.18	%	0^+
155	−72069	*	14.80	%	$\frac{3}{2}^-$
156	−72534	*	20.47	%	0^+
157	−70822	*	15.65	%	$\frac{3}{2}^-$
158	−70688	*	24.84	%	0^+
159	−68560	β^-	18.5	h	$\frac{3}{2}^-$
160	−67910	*	21.86	%	0^+
161	−65505	β^-	3.6	m	$\frac{5}{2}^-$
162	−64280	β^-	8.4	m	0^+
163	−61314	β^-	68.0	s	$\#\frac{7}{2}^+$
164	#−59770	β^-	45.0	s	0^+
165	#−56490	β^-	10.3	s	$\#\frac{1}{2}^-$
166	#−54530	β^-	4.8	s	0^+
167	#−50810	β^-	#3	s	$\#\frac{5}{2}^-$
168	#−48360	β^-	#300	ms	0^+
169	#−44150	β^-	#1	s	$\#\frac{5}{2}^-$
		$_{65}$Tb			
135	#−92830	p	1.0	ms	$(\frac{5}{2}^-)$
136	#−88080	p	#200	ms	
137	#−40970	p	#600	ns	$\#\frac{11}{2}^-$
138	#−43670	β^+	#600	ns	
139	#−48130	β^+	1.6	s	$\#\frac{11}{2}^-$
140	−50480	β^+	2.3	s	(1^+)
141	−54540	β^+	3.5	s	$(\frac{5}{2}^-)$
142	−56560	β^+	597.0	ms	1^+
143	−60420	β^+	12.0	s	$(\frac{11}{2}^-)$
144	#−62368	β^+	~ 1	s	1^+
145	−66300	β^+	30.9	s	$(\frac{11}{2}^-)$
146	−67760	β^+	8.0	s	1^+
147	−70748	β^+	1.6	h	$(\frac{1}{2}^+)$
148	−70531	β^+	60.0	m	2^-
149	−71489	β^+	4.1	h	$\frac{1}{2}^+$
150	−71106	β^+	3.5	h	(2^-)
151	−71628	β^+	17.6	h	$\frac{1}{2}^+$
152	−70720	β^+	17.5	h	2^-
153	−71313	β^+	2.3	d	$\frac{5}{2}^+$
154	−70160	β^+	21.5	h	$\#0^+$
155	−71249	CE	5.3	d	$\frac{5}{2}^+$
156	−70090	β^+	5.3	d	3^-
157	−70762	CE	71.0	a	$\frac{3}{2}^+$
158	−69469	β^+	180.0	a	3^-
159	−69531	*	100.00	%	$\frac{3}{2}^+$
160	−67335	β^-	72.3	d	3^-
161	−67360	β^-	6.9	d	$\frac{5}{2}^+$
162	−65670	β^-	7.6	m	(1^-)
163	−64595	β^-	19.5	m	$\frac{3}{2}^+$
164	−62080	β^-	3.0	m	(5^+)
165	#−60570	β^-	2.1	m	$\#\frac{3}{2}^+$
166	−57880	β^-	25.1	s	$(2)^-$
167	#−55930	β^-	19.0	s	$\#\frac{3}{2}^+$
168	#−52720	β^-	8.2	s	$\#1^-$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
		$_{66}$Dy			
138	#−84930	β^+	#200	ns	0^+
139	#−37640	β^+	600.0	ms	$(\frac{7}{2}^+)$
140	#−42630	β^+	#700	ms	0^+
141	#−45380	β^+	900.0	ms	$(\frac{9}{2}^-)$
142	#−50120	β^+	2.3	s	0^+
143	−52169	β^+	5.6	s	$(\frac{1}{2}^+)$
144	−56570	β^+	9.1	s	0^+
145	−58243	β^+	9.5	s	$(\frac{1}{2}^+)$
146	−62565	β^+	33.2	s	0^+
147	−64106	β^+	57.0	s	$(\frac{1}{2}^+)$
148	−67553	β^+	3.3	m	0^+
149	−67609	β^+	4.2	m	$\frac{7}{2}^-(^-)$
150	−69309	β^+	7.2	m	0^+
151	−69752	β^+	17.9	m	$\frac{7}{2}^-(^-)$
152	−70118	CE	2.4	h	0^+
153	−69143	β^+	6.4	h	$\frac{7}{2}^-(^-)$
154	−70393	α	3.0	Ma	0^+
155	−69165	β^+	9.9	h	$\frac{3}{2}^-$
156	−70528	*	.06	%	0^+
157	−69124	β^+	8.1	h	$\frac{3}{2}^-$
158	−70406	*	.09	%	0^+
159	−69166	CE	144.4	d	$\frac{3}{2}^-$
160	−69671	*	2.33	%	0^+
161	−68064	*	18.89	%	$\frac{5}{2}^+$
162	−68180	*	25.48	%	0^+
163	−66379	*	24.90	%	$\frac{5}{2}^-$
164	−66966	*	28.26	%	0^+
165	−63611	β^-	2.3	h	$\frac{7}{2}^+$
166	−62583	β^-	81.6	h	0^+
167	−59930	β^-	6.2	m	$(\frac{1}{2}^-)$
168	−59560	β^-	8.7	m	0^+
169	−56600	β^-	39.0	s	$(\frac{5}{2})^-$
170	#−53660	β^-	#30	s	0^+
171	#−50190	β^-	#6	s	$\#\frac{7}{2}^-$
172	#−48010	β^-	#3	s	0^+
173	#−43940	β^-	#2	s	$\#\frac{9}{2}^+$
		$_{67}$Ho			
140	#−29260	p	6.0	ms	$\#8^+$
141	#−34360	p	4.1	ms	$(\frac{7}{2}^-)$
142	#−37250	β^+	400.0	ms	$(7^-,8^+)$
143	#−42060	β^+	#900	ms	$\#\frac{11}{2}^-$
144	−44610	β^+	700.0	ms	(5^-)
145	−49120	β^+	2.4	s	$\#\frac{11}{2}^-$
146	−51298	β^+	3.5	s	(6^-)
147	−55757	β^+	5.8	s	$(\frac{11}{2}^-)$
148	−57990	β^+	2.2	s	(1^+)
149	−61662	β^+	21.1	s	$(\frac{11}{2}^-)$
150	−61946	β^+	76.8	s	2^-
151	−63623	β^+	35.2	s	$\frac{11}{2}^-(^-)$
152	−63599	β^+	161.8	s	2^-
153	−65012	β^+	2.0	m	$\frac{11}{2}^-$
154	−64639	β^+	11.8	m	2^-
155	−66039	β^+	48.0	m	$\frac{5}{2}^+$
156	−65480	β^+	56.0	m	4^-
157	−66831	β^+	12.6	m	$\frac{7}{2}^-$
158	−66186	β^+	11.3	m	5^+
159	−67029	β^+	33.0	m	$\frac{7}{2}^-$
160	−66381	β^+	25.6	m	5^+
161	−67196	CE	2.5	h	$\frac{7}{2}^-$
162	−66041	β^+	15.0	m	1^+
163	−66377	CE	4.6	Ka	$\frac{7}{2}^-$

169	#−50330	β^-	#2 s	$\#\frac{11}{2}^+$	164	−64980	CE	29,0 m	1^+
170	#−48720	β^-	#3 s		165	−64898	s	100,00 %	$\frac{7}{2}^-$
171	#−44030	β^-	#500 ms	$\#\frac{9}{2}^+$	166	−63070	β^-	26,8 h	0^-

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{67}$Ho		
147	−62281	β^-	0,1 b	$\frac{7}{2}^-$
148	−60060	β^-	3,0 m	3^+
149	−58796	β^-	4,7 m	$\frac{7}{2}^-$
150	−56240	β^-	2,8 m	$\#6^+$
151	−54420	β^-	53,0 s	$\#\frac{7}{2}^-$
152	#−51480	β^-	23,0 s	
153	#−49360	β^-	#10 s	$\#\frac{7}{2}^-$
154	#−45690	β^-	#6 s	
155	#−43200	β^-	#5 s	$\#\frac{7}{2}^-$
		$_{68}$Er		
142	#−27660	p	#10 µs	0^+
143	#−31090	β^+	#200 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
144	#−36610	β^+	#400 ms	0^+
145	#−39080	β^+	900,0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
146	−41322	β^+	1,7 s	0^+
147	−46010	β^+	3,2 s	$(\frac{1}{2}^+)$
148	−51179	β^+	4,6 s	0^+
149	−53742	β^+	4,0 s	$(\frac{1}{2}^+)$
150	−57831	β^+	18,5 s	0^+
151	−58266	β^+	23,5 s	$(\frac{7}{2}^-)$
152	−60404	α	10,3 s	0^+
153	−60472	α	37,1 s	$\frac{7}{2}(^-)$
154	−62606	β^+	3,7 m	0^+
155	−62209	β^+	5,3 m	$(\frac{7}{2}^-)$
156	−64210	β^+	19,5 m	0^+
157	−63889	β^+	18,6 m	$\frac{3}{2}^-$
158	−65304	CE	2,3 h	0^+
159	−64560	β^+	36,0 m	$\frac{3}{2}^-$
160	−66004	CE	28,6 h	0^+
161	−66200	β^+	3,2 h	$\frac{3}{2}^-$
162	−66333	ε	,14 %	0^+
163	−65167	β^+	75,0 m	$\frac{5}{2}^-$
164	−65941	ε	1,60 %	0^+
165	−64520	CE	10,4 h	$\frac{5}{2}^-$
166	−64025	ε	33,50 %	0^+
167	−63290	ε	22,87 %	$\frac{7}{2}^+$
168	−62990	ε	26,98 %	0^+
169	−60922	β^-	9,4 d	$\frac{1}{2}^-$
170	−60109	ε	14,91 %	0^+
171	−57719	β^-	7,5 h	$\frac{5}{2}^-$
172	−56484	β^-	49,3 h	0^+
173	#−53660	β^-	1,4 m	$(\frac{7}{2}^-)$
174	#−51950	β^-	3,2 m	0^+
175	#−48660	β^-	1,2 m	$\#\frac{9}{2}^+$
176	#−46630	β^-	#20 s	0^+
177	#−42800	β^-	#3 s	$\#\frac{9}{2}^-$
		$_{69}$Tm		
144	#−22090	μ	2,3 µs	(10^+)
145	#−27580	p	3,2 µs	$(\frac{11}{2}^-)$
146	#−30890	p	155,0 ms	(1^+)
147	−35974	β^+	580,0 ms	$\frac{11}{2}^-$
148	−38766	β^+	700,0 ms	(10^+)
149	#−41660	β^+	900,0 ms	$(\frac{11}{2}^-)$
150	#−44400	β^+	#3 s	(1^+)

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{69}$Tm		
160	−60300	β^+	9,4 m	1^-
161	−61899	β^+	30,2 m	$\frac{7}{2}^+$
162	−61476	β^+	21,7 m	1^-
163	−62728	β^+	1,8 h	$\frac{1}{2}^+$
164	−61904	CE	2,0 m	1^+
165	−62928	β^+	30,1 h	$\frac{1}{2}^+$
166	−61888	β^+	7,7 h	2^+
167	−62544	CE	9,3 d	$\frac{1}{2}^+$
168	−61813	β^+	93,1 d	3^+
169	−61275	ε	100,00 %	$\frac{1}{2}^+$
170	−59796	β^-	128,6 d	1^-
171	−59211	β^-	1,9 a	$\frac{1}{2}^+$
172	−57975	β^-	63,6 h	2^-
173	−56264	β^-	8,2 h	$(\frac{1}{2}^+)$
174	−55870	β^-	5,4 m	$(4)^-$
175	−52810	β^-	15,2 m	$\#\frac{1}{2}^+$
176	−49370	β^-	1,9 m	(4^+)
177	#−47470	β^-	90,0 s	$(\frac{7}{2}^-)$
178	#−44120	β^-	#30 s	
179	#−41600	β^-	420 s	$\#\frac{1}{2}^+$
		$_{70}$Yb		
148	#−30200	β^+	#250 ms	0^+
149	#−33200	β^+	700,0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
150	#−35640	β^+	4700 ms	0^+
151	−41540	β^+	1,6 s	$(\frac{1}{2}^+)$
152	−43320	β^+	3,0 s	0^+
153	#−47210	β^+	4,2 s	$\#\frac{7}{2}^-$
154	−49932	α	409,0 ms	0^+
155	−50503	α	1,6 s	$(\frac{7}{2}^-)$
156	−52256	β^+	26,1 s	0^+
157	−53126	β^+	38,6 s	$\frac{7}{2}^-$
158	−54910	β^+	1,5 m	0^+
159	−55539	β^+	1,7 m	$\frac{5}{2}(^-)$
160	−57163	β^+	4,8 m	0^+
161	−57839	β^+	4,2 m	$\frac{5}{2}^-$
162	−59527	β^+	18,9 m	0^+
163	−59299	β^+	11,1 m	$\frac{5}{2}^-$
164	−61016	CE	75,8 m	0^+
165	−60295	β^+	9,9 m	$\frac{5}{2}^-$
166	−61595	CE	56,7 h	0^+
167	−60591	β^+	17,5 m	$\frac{5}{2}^-$
168	−61841	ε	,13 %	0^+
169	−60377	CE	32,0 d	$\frac{7}{2}^+$
170	−60764	ε	3,03 %	0^+
171	−59306	ε	14,09 %	$\frac{1}{2}^-$
172	−59256	ε	21,68 %	0^+
173	−57562	ε	16,10 %	$\frac{5}{2}^-$
174	−56945	ε	32,03 %	0^+
175	−54696	β^-	4,2 d	$(\frac{7}{2}^-)$
176	−53489	ε	12,00 %	0^+
177	−50984	β^-	1,9 h	$(\frac{9}{2}^+)$
178	−49693	β^-	74,0 m	0^+
179	#−46540	β^-	8,0 m	$(\frac{1}{2}^-)$
180	#−44600	β^-	2,4 m	0^+
181	#−41090	β^-	#1 m	$\#\frac{3}{2}^-$

151	−50778	β^+	4,2 s	$(\frac{1}{2}^-)$
152	−51770	β^+	8,0 s	#(21$^-$
153	−53989	α	1,5 s	$(\frac{1}{2}^-)$
154	−54427	α	8,1 s	(2^-)
155	−56626	β^+	21,6 s	$(\frac{1}{2}^-)$
156	−56829	β^+	83,8 s	2^-
157	−58736	β^+	3,6 m	$\frac{1}{2}^+$
158	−58703	β^+	4,0 m	2^-
159	−60570	β^+	9,1 m	$\frac{5}{2}^+$

$_{71}$Lu

150	#−24640	p	46,0 ms	$(5^-,6^-)$
151	#−30110	p	80,6 ms	$\#\frac{11}{2}^-$
152	#−33420	β^+	660,0 ms	$(5^-,6^-)$
153	−35420	β^+	900,0 ms	$\frac{11}{2}^-$
154	#−39720	β^+	#1 s	(2^-)
155	−42560	α	68,6 ms	$(\frac{11}{2}^-)$
156	−45750	α	494,0 ms	$(21^-$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
		$_{71}$Lu		
157	−46457	β^+	6,8 s	$(\frac{1}{2}^+,\frac{3}{2}^+)$
158	−47219	β^+	10,6 s	2^-
159	−49710	β^+	12,1 s	$\frac{1}{2}^+$
160	−50270	β^+	36,1 s	#2$^-$
161	−52562	β^+	77,0 s	$\frac{1}{2}^+$
162	−52830	β^+	1,4 m	$1(^-)$
163	−54791	β^+	4,0 m	$\frac{1}{2}(^+)$
164	−54642	β^+	3,1 m	$1(^-)$
165	−56442	β^+	10,7 m	$\frac{1}{2}^+$
166	−56021	β^+	2,7 m	6^-
167	−57300	β^+	51,5 m	$\frac{7}{2}^+$
168	−57070	β^+	5,5 m	$6(^-)$
169	−58084	β^+	34,1 h	$\frac{7}{2}^+$
170	−57907	β^+	2,0 d	0^+
171	−57830	β^+	8,2 d	$\frac{7}{2}^+$
172	−56755	β^+	6,7 d	4^-
173	−56882	CE	1,4 a	$\frac{7}{2}^+$
174	−55572	β^+	3,3 a	1^-
175	−55167	a	97,40 %	$\frac{7}{2}^+$
176	−53381	2,60 %	37,6 Ga	7^-
177	−52385	β^-	6,6 d	$\frac{7}{2}^+$
178	−50339	β^-	28,4 m	$1(^+)$
179	−49061	β^-	4,6 h	$\frac{7}{2}^+$
180	−46680	β^-	5,7 m	5^+
181	−44800	β^-	3,6 m	$\#\frac{7}{2}^+$
182	#−41640	β^-	2,0 m	$\#1^-$
183	−39720	β^-	58,0 s	$(\frac{7}{2}^+)$
184	#−36410	β^-	20,0 s	(3^+)
185	#−33590	β^-	#8 s	$\#\frac{7}{2}^+$

$_{72}$Hf

153	#−27300	β^+	#400 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
154	#−32730	β^+	2,0 s	0^+
155	#−34360	β^+	840,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
156	−37870	α	23,0 ms	0^+
157	#−38900	α	115,0 ms	$\frac{7}{2}^-$
158	−42103	β^+	2,8 s	0^+
159	−42853	β^+	5,2 s	$\frac{7}{2}^-$
160	−45931	β^+	13,6 s	0^+
161	−46915	β^+	18,2 s	$\#\frac{3}{2}^-$
162	−49169	β^+	39,4 s	0^+
163	−49264	β^+	40,0 s	$\#\frac{3}{2}^-$
164	−51818	β^+	111,0 s	0^+
165	−51650	β^+	76,0 s	$(\frac{5}{2}^-)$
166	−53869	β^+	6,8 m	0^+
167	−53868	β^+	2,0 m	$(\frac{5}{2})^-$
168	−55961	CE	26,0 m	0^+
169	−54717	β^+	3,2 m	$(\frac{5}{2}^-)$
170	−56254	CE	16,0 h	0^+
171	−55491	β^+	12,1 h	$\frac{7}{2}^+$
172	−56302	CE	1,9 a	0^+
173	−55412	β^+	23,6 h	$\frac{1}{2}^-$
174	−55846	0,16 %	2,0 Pa	0^+
175	−54349	CE	70,0 d	$\frac{5}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. / $t_{1/2}$	J^P
		$_{72}$Hf		
167	#−32820	β^-	#30 s	$\#\frac{5}{2}^-$
168	#−30850	β^-	#20 s	0^+
169	#−27160	β^-	#2 s	$\#\frac{5}{2}^-$

$_{73}$Ta

155	#−23090	p	3,2 ms	$(\frac{11}{2}^-)$
156	#−26050	p	106,0 ms	(2^-)
157	−29640	α	10,1 ms	$\frac{1}{2}^+$
158	#−31170	α	49,0 ms	(2^-)
159	−34444	β^+	1,0 s	$\frac{1}{2}^+$
160	−35370	β^+	1,7 s	(2^-)
161	#−38701	β^+	#3 s	$(\frac{1}{2}^+)$
162	−39750	β^+	3,6 s	$\#7^+$
163	−42530	β^+	10,6 s	$\frac{5}{2}^+$
164	−43253	β^+	14,2 s	(3^+)
165	−45848	β^+	31,0 s	$(\frac{1}{2}^+,\frac{3}{2}^+)$
166	−46098	β^+	34,4 s	$(2)^+$
167	−48851	β^+	1,3 m	$(\frac{5}{2}^+)$
168	−48994	β^+	2,0 m	$(2^-,3^+)$
169	−50290	β^+	4,9 m	$(\frac{5}{2}^+)$
170	−50138	β^+	6,8 m	$\#(9)(^+)$
171	−51720	β^+	23,3 m	$(\frac{5}{2}^-)$
172	−51530	β^+	36,8 m	(3^+)
173	−52997	β^+	3,1 h	$\frac{5}{2}^-$
174	−51731	β^+	1,1 h	3^+
175	−52409	β^+	10,5 h	$\frac{5}{2}^+$
176	−51970	β^+	8,1 h	$(1)^-$
177	−51717	β^+	56,6 h	$\frac{7}{2}^+$
178	#−50000	β^+	2,4 h	$\#7^-$
179	−50359	CE	1,8 a	$\frac{7}{2}^+$
180	−48936	CE	8,2 h	1^+
181	−48441	a	99,99 %	$\frac{7}{2}^+$
182	−46433	β^-	114,7 d	3^-
183	−45296	β^-	5,1 d	$\frac{7}{2}^+$
184	−42942	β^-	8,7 h	(5^-)
185	−41396	β^-	49,4 m	$\#\frac{7}{2}^+$
186	−38610	β^-	10,5 m	$(2^-,3^-)$
187	−36900	β^-	2,3 m	$\#\frac{7}{2}^+$
188	−33010	β^-	19,6 s	
189	#−31830	β^-	#3 s	$\#\frac{7}{2}^+$
190	#−28510	β^-	5,3 s	(3)
191	#−26490	β^-	#3 s	
192	#−23160	β^-	2,2 s	(2)

$_{74}$W

157	#−19710	β^+	275,0 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
158	#−23700	α	1,3 ms	0^+
159	#−25490	α	8,2 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
160	−29380	α	90,0 ms	0^+
161	#−30560	α	309,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
162	−33000	β^+	1,4 s	0^+
163	−34910	β^+	2,6 s	$\frac{3}{2}^-$
164	−36228	β^+	6,3 s	0^+
165	−36861	β^+	5,1 s	$(\frac{3}{2}^-)$

176	−54578	A	5,26 %	0^+	166	−41883	β^+	19,2 s	0^+
177	−52683	+	18,60 %	$\frac{7}{2}^-$	167	−42099	β^+	19,9 s	$\#\frac{13}{2}^-$
178	−52137	A	27,08 %	0^+	168	−41898	β^+	50,9 s	0^+
179	−50165	+	13,62 %	$\frac{9}{2}^+$	169	−41018	β^+	74,0 s	$\#\frac{5}{2}^-$
180	−49781	A	35,08 %	0^+	170	−42290	β^+	2,4 m	0^+
181	−47405	β^-	42,4 d	$\frac{1}{2}^-$	171	−42086	β^+	2,4 m	$(\frac{5}{2}^-)$
182	−46052	β^-	6,9 Ma	0^+	172	−43097	β^+	6,8 m	0^+
183	−43250	β^-	1,0 h	$(\frac{5}{2}^-)$	173	−42727	β^+	7,6 m	$\frac{5}{2}^-$
184	−41500	β^-	4,1 h	0^+	174	−43227	β^+	33,2 m	0^+
185	−38900	β^-	3,5 m	$\#\frac{3}{2}^-$	175	−43033	β^+	35,2 m	$(\frac{1}{2}^-)$
186	−36420	β^-	2,6 m	0^+	176	−50642	CE	2,6 h	0^+

A	Δ (keV)	abund.	$t_{1/2}$	J^P
		$_{74}$W		
177	−49702	β^+	132,0 m	$\frac{1}{2}^-$
178	−50409	CE	21.6 d	0
179	−49297	β^+	37,0 m	$\frac{7}{2}^-$
180	−49038	0,12 %	1,8 Eq	0^+
181	−48253	CE	121.2 d	$\frac{9}{2}^+$
182	−48247	*	26,50 %	0^+
183	−48067	*	14,31 %	$\frac{1}{2}^-$
184	−48707	*	30,64 %	0^+
185	−43389	β^-	75,1 d	$\frac{3}{2}^-$
186	−42510	*	28,43 %	0^+
187	−39306	β^-	24.0 h	$\frac{3}{2}^-$
188	−38670	β^-	69.8 d	0^+
189	−35620	β^-	10,7 m	$\#\frac{3}{2}^-$
190	−34360	β^-	30,0 m	0^+
191	#−31180	β^-	#20 s	$\#\frac{1}{2}^-$
192	#−29650	β^-	#30 s	0^+
193	#−26290	β^-	#1 s	
194	#−24630	β^-	#1 s	
		$_{75}$Re		
159	#−11710	p	#10 µs	$\#\frac{1}{2}^+$
160	#−10930	p	611,0 µs	(4^-)
161	−20890	p	440.0 µs	$\frac{5}{2}^+$
162	#−22500	α	107,0 ms	(2^-)
163	−26007	β^+	390,0 ms	$\frac{5}{2}^+$
164	−27520	α	719.0 ms	(2^-)
165	−30614	β^+	2,6 s	$(\frac{1}{2}^+)$
166	−31890	β^+	2,3 s	(7^+)
167	#−34840	α	3.4 s	$(\frac{9}{2}^-)$
168	−35790	β^+	4,4 s	(7^+)
169	−36409	β^+	8,1 s	$(\frac{9}{2}^-)$
170	−36918	β^+	9.2 s	(5^+)
171	−41250	β^+	15,2 s	$(\frac{9}{2}^-)$
172	−41630	β^+	15.0 s	(5)
173	−43554	β^+	2.0 m	$(\frac{9}{2}^-)$
174	−43678	β^+	2.4 m	$\#3^+$
175	−45068	β^+	5,9 m	$\#\frac{9}{2}^-$
176	−45068	β^+	5.3 m	(3^+)
177	−46269	β^+	14.0 m	$\frac{9}{2}^-$
178	−46653	β^+	13,2 m	(5^+)
179	−48585	β^+	19.5 m	$\frac{5}{2}^+$
180	−48837	β^+	2.4 m	$(1)^-$
181	−48821	β^+	19,9 h	$\frac{5}{2}^+$
182	−48450	β^+	64.0 h	7^+
183	−48811	CE	70.0 d	$\frac{5}{2}^+$
184	−44225	β^+	35,4 d	$3(^-)$
185	−43822	*	37,40 %	$\frac{5}{2}^+$
186	−41930	β^-	3.7 d	1^-
187	−41218	62,60 %	43,3 Gy	$\frac{5}{2}^+$
188	−39018	β^-	17.0 h	1^-
189	−37981	β^-	24.3 h	$\frac{5}{2}^+$
190	−35630	β^-	3,1 m	$(2)^-$
191	−34952	β^-	9.8 m	$(\frac{3}{2}^+, \frac{1}{2}^+)$
192	−31590	β^-	16.0 s	
193	#−30240	β^-	#20 s	$\#\frac{5}{2}^+$
194	#−27240	β^-	1,0 s	
195	#−25580	β^-	6.0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
196	#−22510	β^-	2,4 s	
197	#−20600	β^-	#300 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
198	#−17130	β^-	#300 ns	
		$_{76}$Os		
161	#−10220	α	640,0 µs	$(\frac{7}{2}^-)$
162	#−11600	α	2.1 ms	0^+
163	#−16390	α	5.5 ms	$\#\frac{7}{2}^-$

A	Δ (keV)	abund.	$t_{1/2}$	J^P
		$_{76}$Os		
164	−20470	α	21,0 ms	0^+
165	#−21800	α	71,0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
166	−25437	α	216,0 ms	0^+
167	−26500	α	939.0 ms	$\frac{7}{2}^-$
168	−29987	β^+	2,1 s	0
169	−30723	β^+	3,5 s	$(\frac{5}{2}^-)$
170	−33926	β^+	7.4 s	0^+
171	−34808	β^+	8,3 s	$(\frac{5}{2}^-)$
172	−37244	β^+	19,2 s	0^+
173	−37488	β^+	22.4 s	$(\frac{5}{2}^-)$
174	−39995	β^+	44,0 s	0^+
175	−40105	β^+	1.4 m	$(\frac{5}{2}^-)$
176	−42098	β^+	3,6 m	0^+
177	−41949	β^+	3,0 m	$\frac{1}{2}^-$
178	−43544	β^+	5,0 m	0^+
179	−43019	β^+	6.5 m	$\frac{1}{2}^-$
180	−44362	β^+	21,5 m	0^+
181	−43550	β^+	105,0 m	$\frac{1}{2}^-$
182	−44609	CE	21,8 h	0^+
183	−43660	β^+	13,0 h	9
184	−44256	*	.02 %	0^+
185	−42809	CE	93,6 d	$\frac{1}{2}^-$
186	−43002	1,59 %	2.0 Pq	0^+
187	−41221	*	1,96 %	$\frac{1}{2}^-$
188	−41139	*	13,24 %	0^+
189	−38968	*	16,15 %	$\frac{3}{2}^-$
190	−38700	*	26,26 %	0^+
191	−36396	β^-	15,0 d	$\frac{3}{2}^-$
192	−35968	*	40,78 %	0^+
193	−33396	β^-	29,6 h	$\frac{3}{2}^-$
194	−32437	β^-	6,0 s	0^+
195	#−29510	β^-	#9 m	$\#\frac{3}{2}^-$
196	−28280	β^-	34.9 m	0^+
197	#−25310	β^-	2,8 m	$\#\frac{5}{2}^-$
198	#−23940	β^-	#1 m	0^+
199	#−20480	β^-	6,0 s	$\#\frac{3}{2}^-$
200	#−18760	β^-	7,0 s	0^+
201	#−15240	β^-	#1 s	$\#\frac{1}{2}^-$
202	#−13090	β^-	#200 ns	0
		$_{77}$Ir		
164	#−7540	p	#1 ms	$\#2^-$
165	#−11640	p	#60 µs	$\#\frac{1}{2}^+$
166	#−13360	α	10,5 ms	(2^-)
167	−17078	α	29,3 ms	$\frac{1}{2}^+$
168	−18720	α	230,0 ms	(2^-)
169	−22078	α	353.0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
170	#−23960	β^+	910,0 ms	(3^-)
171	−26120	α	3,1 s	$\frac{1}{2}^+$
172	−27360	β^+	4,4 s	(3^+)
173	−30268	β^+	9.0 s	$(\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+)$
174	−30869	β^+	7,9 s	(3^+)
175	−33304	β^+	9,0 s	$\#\frac{5}{2}^-$
176	−33459	β^+	8,7 s	
177	−36047	β^+	30,0 s	$\frac{5}{2}^-$
178	−36252	β^+	12,0 s	
179	−38079	β^+	79,0 s	$(\frac{5}{2})^-$
180	−37978	β^+	1,5 m	$\#(4,5)(^+)$
181	−39472	β^+	4.9 m	$\frac{5}{2}^-$
182	−39052	β^+	15,0 m	5
183	−40203	β^+	58,0 m	$\frac{5}{2}^-$
184	−39611	β^+	3.1 h	3^-
185	−40936	β^+	14,4 h	$\frac{5}{2}^-$
186	−39178	β^+	16,6 h	4^+
187	−39649	β^+	10,5 h	$\frac{3}{2}^+$

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$	J^P
		$_{77}$Ir		
188	−35351	β^+	41.5 h	1^-
189	−38457	CE	13.2 d	$\frac{3}{2}^+$
190	−36755	β^+	11.8 d	4^-
191	−36710	*	37.30 %	$\frac{3}{2}^+$
192	−34837	β^-	73.8 d	4^+
193	−34638	*	62.70 %	$\frac{3}{2}^+$
194	−32633	β^-	19.3 h	1^-
195	−31694	β^-	2.5 h	$(\frac{3}{2}^+)$
196	−29410	β^-	52.0 s	(0^-)
197	−28266	β^-	6.5 m	$(\frac{3}{2}^+)$
198	#−25820	β^-	8.0 s	
199	#−24400	β^-	7.0 s	$\#\frac{3}{2}^+$
200	#−21610	β^-	44.0 s	
201	#−19900	β^-	21.0 s	$\#\frac{3}{2}^+$
202	#−16750	β^-	13.0 s	#1$^-$
203	#−14690	β^-	#1 s	$\#\frac{3}{2}^+$
204	#−9690	β^-	#200 ms	
		$_{78}$Pt		
166	#−4790	α	300.0 µs	0^+
167	#−6810	α	800.0 µs	$\#\frac{7}{2}^-$
168	−11060	α	2.0 ms	0^+
169	#−12610	α	7.0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
170	−16305	α	13.9 ms	0^+
171	−17470	α	45.5 ms	$\frac{7}{2}^-$
172	−21097	α	97.5 ms	0^+
173	−21940	α	382.0 ms	$(\frac{5}{2}^-)$
174	−25318	α	880.0 ms	0^+
175	−25700	α	2.5 s	$(\frac{7}{2}^-)$
176	−28934	β^+	6.3 s	0^+
177	−29370	β^+	10.6 s	$\frac{5}{2}^-$
178	−31997	β^+	20.7 s	0^+
179	−32266	β^+	21.2 s	$\frac{1}{2}^-$
180	−34436	β^+	56.0 s	0^+
181	−34874	β^+	52.0 s	$\frac{1}{2}^-$
182	−36168	β^+	2.7 m	0^+
183	−36772	β^+	6.5 m	$\frac{1}{2}^-$
184	−37339	β^+	17.3 m	0^+
185	−36688	β^+	70.9 m	$(\frac{9}{2}^+)$
186	−37864	β^+	2.1 h	0^+
187	−36685	β^+	2.9 h	$\frac{3}{2}^-$
188	−37829	CE	10.2 d	0^+
189	−36485	β^+	10.9 h	$\frac{3}{2}^-$
190	−37825	.01 %	650.0 Ga	0^+
191	−35701	CE	2.8 d	$\frac{3}{2}^-$
192	−36292	*	.78 %	0^+
193	−34191	CE	50.0 y	$\frac{1}{2}^-$
194	−34762	*	32.86 %	0^+
195	−32796	*	33.78 %	$\frac{1}{2}^-$
196	−32616	*	25.21 %	0^+
197	−30422	β^-	19.9 h	$\frac{1}{2}^-$
198	−29905	*	7.36 %	0^+
199	−27990	β^-	30.8 m	$\frac{5}{2}^-$
200	−26601	β^-	12.6 h	0^+
201	−25710	β^-	2.5 m	$(\frac{5}{2}^-)$
202	−22692	β^-	44.0 h	0^+
203	#−19630	β^-	22.0 s	$\#\frac{1}{2}^-$
204	#−17920	β^-	10.3 s	0^+
205	#−12970	β^-	#1 s	$\#\frac{3}{2}^+$
206	#−9630	β^-	#1 s	0^+
		$_{79}$Au		
169	#−1790	p	#150 µs	$\#\frac{1}{2}^+$

A	Δ (keV)		$t_{1/2}$	J^P
		$_{79}$Au		
172	−9970	α	28.0 ms	(2^-)
173	−12916	α	25.0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
174	#−14240	α	139.0 ms	
175	−17420	α	188.0 ms	$\frac{1}{2}^+$
176	−18400	α	1.0 s	(5^-)
177	−21545	α	1.5 s	$(\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+)$
178	−22330	β^+	2.6 s	
179	−24969	β^+	7.1 s	$(\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+)$
180	−25694	β^+	8.1 s	
181	−27871	β^+	13.7 s	$(\frac{3}{2}^-)$
182	−28301	β^+	15.3 s	(2^+)
183	−30189	β^+	42.8 s	$\frac{5}{2}^-$
184	−30319	β^+	20.6 s	5^+
185	−31867	β^+	4.3 m	$\frac{5}{2}^-$
186	−31716	β^+	10.7 m	9^-
187	−33028	β^+	8.3 m	$\frac{1}{2}(^+)$
188	−32277	β^+	8.8 m	$1(^-)$
189	−33562	β^+	28.7 m	$\frac{1}{2}^+$
190	−32983	β^+	42.8 m	1^-
191	−33510	β^+	3.2 h	$\frac{3}{2}^+$
192	−32776	β^+	4.9 h	1^-
193	−33406	β^+	17.6 h	$\frac{3}{2}^+$
194	−32713	β^+	38.0 h	1^-
195	−32609	CE	186.1 d	$\frac{3}{2}^+$
196	−31139	β^+	6.2 d	2^-
197	−31141	*	100.00 %	$\frac{3}{2}^+$
198	−29582		2.7 d	2^-
199	−29095	β^-	3.1 d	$\frac{3}{2}^+$
200	−27240	β^-	48.4 m	$1(^-)$
201	−26401	β^-	26.0 m	$\frac{3}{2}^+$
202	−24859	β^-	28.4 s	(1^-)
203	−23143	β^-	60.0 s	$\frac{3}{2}^+$
204	#−20650	β^-	38.3 s	(2^-)
205	#−18770	β^-	32.5 s	$\#\frac{3}{2}^+$
206	#−14220	β^-	#30 s	
207	#−10910	β^-	#10 s	$\#\frac{3}{2}^+$
208	#−6100	β^-	#10 s	
209	#−2470	β^-	#1 s	$\#\frac{3}{2}^+$
210	#2330	β^-	#1 s	
		$_{80}$Hg		
171	#3290	α	70.0 µs	$\#\frac{3}{2}^-$
172	−1110	α	231.0 µs	0^+
173	#−2710	α	910.0 µs	$\#\frac{3}{2}^-$
174	−6646	α	2.0 ms	0^+
175	−7970	α	10.6 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
176	−11773	α	20.3 ms	0^+
177	−12780	α	127.3 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
178	−16316	α	266.5 ms	0^+
179	−16924	α	1.0 s	$\frac{7}{2}^-$
180	−20260	β^+	2.6 s	0^+
181	−20661	β^+	3.6 s	$\#\frac{1}{2}(^-)$
182	−23577	β^+	10.8 s	0^+
183	−23806	β^+	9.4 s	$\frac{1}{2}^-$
184	−26343	β^+	30.9 s	0^+
185	−26176	β^+	49.1 s	$\frac{1}{2}^-$
186	−28539	β^+	1.4 m	0^+
187	−28118	β^+	1.9 m	$\frac{3}{2}(^-)$
188	−30211	β^+	3.3 m	0^+
189	−29630	β^+	7.6 m	$\frac{3}{2}^-$
190	−31370	CE	20.0 m	0^+
191	−30699	β^+	49.0 m	$\frac{3}{2}(^-)$
192	−32011	CE	4.8 h	0^+

170	#−3750	*p*	290,0 µs	(2⁻)	193	−31063	β⁺	8,8 h	$\frac{9}{2}^{(-)}$
171	−7568	*p*	22,8 µs	$(\frac{1}{2}^+)$	194	−32163	CE	440,0 a	0⁺

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{80}$Hg		
195	−31000	β⁺	10,5 h	$\frac{1}{2}^-$
196	−31826	*	0,15 %	0⁺
197	−30541	CE	64,9 h	$\frac{1}{2}^-$
198	−30964	*	9,97 %	0⁺
199	−29546	*	16,87 %	$\frac{1}{2}^-$
200	−29503	*	23,10 %	0⁺
201	−27662	*	13,18 %	$\frac{3}{2}^-$
202	−27345	*	29,86 %	0⁺
203	−25268	β⁻	46,6 d	$\frac{5}{2}^-$
204	−24690	*	6,87 %	0⁺
205	−22287	β⁻	5,1 m	$\frac{1}{2}^-$
206	−20945	β⁻	8,3 m	0⁺
207	−16487	β⁻	2,9 m	$\frac{1}{2}^-$
208	−15270	β⁻	42,0 m	0⁺
209	#−8640	β⁻	37,0 s	$\frac{3}{2}^-$
210	#−5370	β⁻	#10 m	0⁺
211	#−620	β⁻	#10 s	$\frac{1}{2}^-$
212	#2760	β⁻	#1 m	0⁺
213	#7670	β⁻	#1 s	$\frac{1}{2}^-$
214	#11180	β⁻	#1 s	0⁺
215	#16210	β⁻	#1 s	$\frac{1}{2}^-$
216	#19860	β⁻	#100 ms	0⁺
		$_{81}$Tl		
176	≥80	*p*	6,2 ms	$(3^-, 4^-, 5^-)$
177	−3325	α	18,0 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
178	#−4790	α	255,0 ms	
179	−8280	α	480,0 ms	$\frac{1}{2}^+$
180	−9260	β⁺	1,1 s	4(⁻)
181	−12799	β⁺	3,2 s	$\frac{1}{2}^+$
182	−13310	β⁺	2,2 s	(7⁺)
183	−16587	β⁺	6,9 s	$\frac{1}{2}^{(+)}$
184	−16873	β⁺	10,1 s	#2⁻
185	−19768	β⁺	19,5 s	$\#\frac{1}{2}^+$
186	#−19887	β⁺	#40 s	(2⁻)
187	#−22143	β⁺	~ 51 s	$(\frac{1}{2}^+)$
188	−22336	β⁺	71,0 s	(2⁻)
189	−24002	β⁺	2,3 m	$(\frac{1}{2}^+)$
190	#−24380	β⁺	2,6 m	2(⁻)
191	#−26283	β⁺	420 m	$(\frac{1}{2}^+)$
192	−26870	β⁺	9,6 m	(2⁻)
193	−27477	β⁺	21,6 m	$\#\frac{1}{2}^{(+)}$
194	−26937	β⁺	33,0 m	2⁻
195	−28155	β⁺	1,2 h	$\frac{1}{2}^+$
196	−27497	β⁺	1,8 h	2⁻
197	−28340	β⁺	2,8 h	$\frac{1}{2}^+$
198	−27490	β⁺	5,3 h	2⁻
199	−28069	β⁺	7,4 h	$\frac{1}{2}^+$
200	−27048	β⁺	26,1 h	2⁻
201	−27179	CE	3,0 d	$\frac{1}{2}^+$
202	−25986	CE	12,3 d	2⁻
203	−25760	*	29,52 %	$\frac{1}{2}^+$
204	−24345	β⁻	3,8 a	2⁻
205	−23820	*	70,48 %	$\frac{1}{2}^+$
206	−22262	β⁻	4,2 m	0⁻
207	−21033	β⁻	4,8 m	$\frac{1}{2}^+$
208	−19749	β⁻	3,1 m	5⁺
209	−18636	β⁻	2,2 m	$(\frac{1}{2}^+)$
210	−9240	β⁻	1,3 m	#5⁺
211	−6080	β⁻	100,0 s	$\#\frac{9}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{81}$Tl		
217	#18310	β⁻	#1 s	$\#\frac{1}{2}^+$
218	#23090	β⁻	#200 ns	#5⁺
		$_{82}$Pb		
178	3560	α	280,0 µs	0⁺
179	2050	α	3,9 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
180	−1990	α	4,2 ms	0⁺
181	−3120	α	39,0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
182	−6626	α	55,0 ms	0⁺
183	−7571	α	535,0 ms	$\frac{3}{2}^-$
184	−11052	α	490,0 ms	0⁺
185	−11641	α	6,3 s	$\frac{3}{2}^-$
186	−14682	β⁺	4,8 s	0⁺
187	−14987	β⁺	15,2 s	$\frac{3}{2}^-$
188	−17815	β⁺	25,1 s	0⁺
189	−17890	β⁺	50,5 s	$\frac{3}{2}^-$
190	−20416	β⁺	71,0 s	0⁺
191	−20240	β⁺	1,3 m	$(\frac{9}{2}^-)$
192	−22565	β⁺	3,5 m	0⁺
193	#−22190	β⁺	#5 m	$(\frac{13}{2}^-)$
194	−24207	β⁺	10,7 m	0⁺
195	#−23713	β⁺	~ 15 m	$\#\frac{13}{2}^-$
196	−25361	β⁺	37,0 m	0⁺
197	−24749	β⁺	5,1 m	$\frac{13}{2}^-$
198	−26050	β⁺	2,4 h	0⁺
199	−25292	β⁺	90,0 m	$\frac{13}{2}^-$
200	−26251	CE	21,5 h	0⁺
201	−25259	β⁺	9,3 h	$\frac{5}{2}^-$
202	−25940	CE	52,5 ka	0⁺
203	−24786	CE	51,9 h	$\frac{5}{2}^-$
204	−25109	*	1,40 %	0⁺
205	−23760	CE	17,3 Ma	$\frac{5}{2}^-$
206	−23735	*	24,10 %	0⁺
207	−22451	*	22,10 %	$\frac{1}{2}^-$
208	−21748	*	52,40 %	0⁺
209	−17614	β⁻	3,3 h	$\frac{9}{2}^+$
210	−14728	β⁻	22,2 a	0⁺
211	−10491	β⁻	36,1 m	$\frac{9}{2}^+$
212	−7547	β⁻	10,6 h	0⁺
213	−3202	β⁻	10,2 m	$(\frac{9}{2}^+)$
214	−180	β⁻	26,8 m	0⁺
215	#4420	β⁻	2,5 m	$\#\frac{9}{2}^+$
216	#7480	β⁻	#7 m	0⁺
217	#12240	β⁻	#30 s	$\#\frac{9}{2}^+$
218	#15450	β⁻	#2 m	0⁺
219	#20280	β⁻	#10 s	$\#\frac{9}{2}^+$
220	#23670	β⁻	#30 s	0⁺
		$_{83}$Bi		
184	1190	α	6,0 ms	#3⁻
185	#−2240	*p*	#2 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
186	−3190	α	14,8 ms	(8⁺)
187	−6383	α	37,0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
188	−7185	α	61,2 ms	#3⁺
189	−10065	α	668,0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
190	−10509	α	6,3 s	(3⁺)
191	−13240	α	12,4 s	$(\frac{9}{2}^-)$
192	−13540	β⁺	34,6 s	(3⁺)
193	−15573	β⁺	63,6 s	$(\frac{9}{2}^-)$
194	#−16040	β⁺	95,0 s	(3⁺)

212	#−1350	β^-	100.0	s	$\#5^+$	195	−18026	β^+	183.0	s	$(\frac{3}{2}^-)$
213	1784	β^-	60.0	s	$\frac{1}{2}^+$	196	−18009	β^+	5.1	m	(3^+)
214	#6470	β^-	410	s	$\#5^+$	197	−19687	β^+	9.3	m	$(\frac{3}{2}^-)$
215	#9910	β^-	#6	s	$\#\frac{1}{2}^+$	198	−19369	β^+	10.3	m	$(2^+,3^+)$
216	#13720	β^-	#2	s	$\#5^+$	199	−20797	β^+	27.0	m	$\frac{9}{2}^-$

A	Δ (MeV)	abund. / $t_{1/2}$		J^P
		$_{83}$Bi		
200	−20371	β^+	36.4 m	7^+
201	−21416	β^+	108.0 m	$\frac{9}{2}^-$
202	−20741	β^+	1.7 h	$*5(^+)$
203	−21524	β^+	11.8 h	$\frac{9}{2}^-$
204	−20646	β^+	11.2 h	6^+
205	−21064	β^+	15.3 d	$\frac{9}{2}^-$
206	−20025	β^+	6.2 d	$6(^+)$
207	−20094	β^+	31.5 a	$\frac{9}{2}^-$
208	−18869	β^+	365.0 ka	5^+
209	−18258	100,00 %	19.9 Ea	$\frac{9}{2}^-$
210	−14791	β^-	5.0 d	1^-
211	−11858	α	2.1 m	$\frac{9}{2}^-$
212	−8117	β^-	60.5 m	$1(^-)$
213	−5290	β^-	45.6 m	$\frac{9}{2}^-$
214	−1200	β^-	19.9 m	1^-
215	1649	β^-	7.6 m	$(\frac{9}{2}^-)$
216	5674	β^-	2.3 m	$(6^-,7^-)$
217	8730	β^-	98.5 s	$*\frac{9}{2}^-$
218	13216	β^-	33.0 s	$(6^-,7^-,8^-)$
219	#16280	β^-	22.0 s	$*\frac{9}{2}^-$
220	#20820	β^-	#7 s	$*1^-$
221	#24100	β^-	#5 s	$*\frac{9}{2}^-$
222	#28670	β^-	#2 s	$*1^-$
223	#32140	β^-	#1 s	$*\frac{9}{2}^-$
224	#36770	β^-	#300 ms	$*1^-$
		$_{84}$Po		
186	#3090	α	#40 µs	0^+
187	2830	α	1.4 ms	$(\frac{1}{2}^-,\frac{3}{2}^-)$
188	−544	α	275.0 µs	0^+
189	−1422	α	3.8 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
190	−4564	α	2.5 ms	0^+
191	−5069	α	22.0 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
192	−8071	α	32.2 ms	0^+
193	−8360	α	370.0 ms	$(\frac{1}{2}^-)$
194	−11005	α	392.0 ms	0^+
195	−11060	α	4.6 s	$(\frac{1}{2}^-)$
196	−13493	α	5.8 s	0^+
197	−13960	β^+	53.6 s	$(\frac{1}{2}^-)$
198	−15473	α	1.8 m	0^+
199	−15214	β^+	5.5 m	$*\frac{1}{2}^-$
200	−16954	β^+	11.5 m	0^+
201	−16835	β^+	15.6 m	$\frac{3}{2}^-$
202	−17924	β^+	44.6 m	0^+
203	−17811	β^+	36.7 m	$\frac{5}{2}^-$
204	−18841	β^+	3.5 h	0^+
205	−17609	β^+	1.7 h	$\frac{5}{2}^-$
206	−18185	β^+	8.8 d	0^+
207	−17145	β^+	5.8 h	$\frac{5}{2}^-$
208	−17469	α	2.9 a	0^+
209	−16365	α	102.0 a	$\frac{1}{2}^-$
210	−15952	α	138.4 d	0^+
211	−12432	α	516.0 ms	$\frac{9}{2}^+$
212	−10369	α	299.0 ns	0^+
213	−6053	α	3.7 µs	$\frac{9}{2}^+$
214	−4169	α	164.3 µs	0^+
215	−540	α	1.8 ms	$\frac{9}{2}^+$
216	1784	α	145.0 ms	0^+
217	6886	α	1.5 s	$(\frac{9}{2}^-)$
218	8356	α	3.1 m	0^+
219	#12681	β^-	#2 m	$*\frac{9}{2}^+$
220	#15263	β^-	#40 s	0^+
221	19774	β^-	2.2 m	$*\frac{9}{2}^+$
222	22490	β^-	9.1 m	0^+
223	#27080	β^-	#1 m	$*\frac{9}{2}^+$

A	Δ (MeV)	abund. / $t_{1/2}$		J^P
		$_{84}$Po		
224	#29910	β^-	#1 m	0^+
225	#34630	β^-	#20 s	$*\frac{9}{2}^+$
226	#37650	β^-	#20 s	0^+
227	#42280	β^-	#5 s	$*\frac{9}{2}^+$
		$_{85}$At		
191	9864	α	2.1 ms	$(\frac{1}{2}^+)$
192	2940	α	11,5 ms	$*3^+$
193	−68	α	29,0 ms	$*\frac{1}{2}^+$
194	−712	α	258.0 ms	$(4^-,5^-)$
195	−3476	α	328,0 ms	$\frac{1}{2}^-$
196	−3910	α	388.0 ms	(3^+)
197	−6340	α	388,2 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
198	#−6720	α	4,2 s	(3^+)
199	−8828	α	7.0 s	$(\frac{9}{2}^-)$
200	−8968	α	43,2 s	(3^+)
201	−10789	α	85,2 s	$(\frac{9}{2}^-)$
202	−10891	β^+	184,0 s	$(2^+,3^+)$
203	−12163	β^+	7,4 m	$\frac{9}{2}^-$
204	−11875	β^+	9,1 m	7^-
205	−12970	β^+	26.3 m	$\frac{9}{2}^-$
206	−12429	β^+	30,6 m	$(5)^-$
207	−13227	β^+	1,8 h	$\frac{9}{2}^-$
208	−12470	β^+	1,6 h	6^+
209	−12882	β^+	5,4 h	$\frac{9}{2}^-$
210	−11972	β^+	8.1 h	$(5)^+$
211	−11646	CE	7,2 h	$\frac{9}{2}^-$
212	−8027	α	314,0 ms	(1^-)
213	−6679	α	125.0 ns	$\frac{9}{2}^-$
214	−3379	α	558,0 ns	1^-
215	−1256	α	100.0 µs	$\frac{9}{2}^-$
216	2258	α	300,0 µs	$1(^-)$
217	4990	α	32,3 ms	$\frac{9}{2}^-$
218	8099	α	1.5 s	$*1^-$
219	10397	α	56,0 s	$*\frac{9}{2}^-$
220	14378	β^-	3,7 m	$*3(^-)$
221	16783	β^-	2.3 m	$*\frac{9}{2}^-$
222	20953	β^-	54,0 s	
223	23423	β^-	50,0 s	$*\frac{9}{2}^-$
224	27711	β^-	2.6 m	
225	#30400	β^-	#2 m	$*\frac{1}{2}^-$
226	#34610	β^-	#20 s	
227	#37480	β^-	#20 s	$*\frac{1}{2}^-$
228	#41080	β^-	#5 s	
229	#44820	β^-	#6 s	$*\frac{1}{2}^+$
		$_{86}$Rn		
193	9013	α	1,1 ms	$*\frac{9}{2}^-$
194	5723	α	720,0 µs	0^-
195	5050	α	7,0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
196	1971	α	4,7 ms	0^-
197	1480	α	54,0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
198	−1230	α	65,0 ms	0^+
199	−1500	α	590,0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
200	−4014	α	1.1 s	0^+
201	−4070	α	7,0 s	$(\frac{9}{2}^-)$
202	−6274	α	9,7 s	0^+
203	−6159	α	44.0 s	$*\frac{9}{2}^-$
204	−7983	α	1,2 m	0^+
205	−7710	β^+	2,8 m	$\frac{9}{2}^-$
206	−9116	α	5,7 m	0^+
207	−8635	β^+	9,3 m	$\frac{9}{2}^-$
208	−9665	α	24.4 m	0^+
209	−8929	β^+	28,5 m	$\frac{9}{2}^-$
210	−9605	α	2.4 h	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{90}$Th		
211	−8755	β^+	14.6 h	$\frac{1}{2}^-$
212	−8659	α	29.9 m	0^+
213	−5698	α	19.5 m	$\#\frac{9}{2}^+$
214	−4319	α	270.0 ms	0^+
215	−1168	α	2.3 µs	$\frac{9}{2}^-$
216	258	α	45.0 µs	0^+
217	3659	α	530.0 µs	$\frac{9}{2}^-$
218	5217	α	35.0 ms	0^+
219	8830	α	4.0 s	$\frac{9}{2}^-$
220	10613	α	55.6 s	0^+
221	14479	β^-	26.7 m	$\frac{9}{2}^+$
222	16374	α	3.8 d	0^+
223	20900	β^-	24.3 m	$\#\frac{7}{2}(1^-)$
224	22445	β^-	107.0 m	0^-
225	26534	β^-	4.7 m	$\frac{7}{2}^-$
226	28747	β^-	7.4 m	0^+
227	32886	β^-	20.8 s	$\#\frac{5}{2}(1^+)$
228	35243	β^-	65.0 s	0^-
229	39002	β^-	11.9 s	$\#\frac{5}{2}^+$
230	#42050	β^-	810 s	0^+
231	#46450	β^-	#300 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
		$_{87}$Fr		
199	6760	α	16.0 ms	$\#\frac{1}{2}^-$
200	6130	α	49.0 ms	(3^+)
201	9600	α	62.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
202	#8090	α	300.0 ms	(3^+)
203	870	α	550.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
204	607	α	1.8 s	(3^+)
205	−1310	α	3.8 s	$(\frac{9}{2}^-)$
206	#−1242	β^+	~ 16 s	$(2^+,3^+)$
207	−2844	α	14.8 s	$\frac{9}{2}^-$
208	−3666	α	59.1 s	7^-
209	−5768	α	50.0 s	$\frac{9}{2}^-$
210	−6393	α	3.2 m	6^-
211	−8140	α	3.1 m	$\frac{9}{2}^-$
212	−8516	β^+	20.0 m	5^-
213	−9553	α	34.6 s	$\frac{9}{2}^-$
214	−958	α	5.0 ms	(1^-)
215	918	α	86.0 ms	$\frac{9}{2}^-$
216	2971	α	700.0 ns	(1^-)
217	4315	α	16.8 µs	$\frac{9}{2}^-$
218	7059	α	1.0 ms	1^-
219	8619	α	20.0 ms	$\frac{9}{2}^-$
220	11483	α	27.4 s	1^-
221	13279	α	4.8 m	$\frac{9}{2}^-$
222	16350	β^-	14.2 m	2^-
223	18384	β^-	22.0 m	$\frac{9}{2}(^-)$
224	21795	β^-	9.3 m	1^-
225	23821	β^-	4.0 m	$\frac{9}{2}^-$
226	27041	β^-	49.0 s	1^-
227	29696	β^-	2.5 m	$\frac{9}{2}^-$
228	33369	β^-	38.0 s	2^-
229	35674	β^-	50.2 s	$\#\frac{9}{2}^+$
230	39511	β^-	19.1 s	
231	42064	β^-	17.6 s	$\#\frac{1}{2}^+$
232	#45000	β^-	5.5 s	(5)
233	#49050	β^-	#5 s	$\#\frac{1}{2}^-$
		$_{86}$Rn		
201	#11840	α	#1 ms	$\#\frac{9}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{86}$Rn		
206	9566	α	240.0 ms	0^+
207	9540	α	1.4 s	$\#\frac{9}{2}^-$
208	1715	α	1.1 s	0^+
209	1850	α	4.7 s	$\frac{9}{2}^-$
210	460	α	4.0 s	0^+
211	832	α	13.2 s	$\frac{9}{2}(^-)$
212	−199	α	19.0 s	0^+
213	358	α	2.7 m	$\frac{9}{2}^-$
214	99	α	2.5 s	0^+
215	2534	α	1.7 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
216	3291	α	182.0 ns	0^+
217	5888	α	1.6 µs	$(\frac{9}{2}^+)$
218	6651	α	25.2 µs	0^+
219	9395	α	10.0 ms	$(\frac{7}{2})^+$
220	10271	α	17.9 ns	0^+
221	13064	α	28.0 s	$\frac{9}{2}^+$
222	14922	α	33.6 s	0^+
223	17204	α	11.4 d	$\frac{9}{2}^+$
224	18827	α	3.7 d	0^+
225	21994	β^-	14.9 d	$\frac{1}{2}^+$
226	23069	α	1.6 ka	0^+
227	27179	β^-	42.2 m	$\frac{3}{2}^+$
228	28942	β^-	5.8 s	0^+
229	32549	β^-	4.0 m	$\frac{3}{2}^+$
230	34516	β^-	93.0 m	0^+
231	38016	β^-	104.0 s	$(\frac{1}{2}^+)$
232	40197	β^-	4.0 m	0^+
233	44922	β^-	30.0 s	$\#\frac{1}{2}^+$
234	46890	β^-	30.0 s	0^+
235	#51200	β^-	#3 s	$\#\frac{3}{2}^+$
		$_{85}$At		
206	#13460	α	25.0 ns	(3^+)
207	11150	α	81.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
208	10760	α	97.0 ms	(3^+)
209	8840	α	92.0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
210	8790	α	350.0 ms	$\#7^+$
211	7200	α	213.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
212	7250	α	920.0 ms	$\#6^+$
213	6160	α	738.0 ns	$\#\frac{9}{2}^-$
214	6445	α	8.2 s	$\#5^+$
215	6031	α	170.0 ms	$\frac{9}{2}^-$
216	8145	α	440.0 µs	(1^-)
217	8701	α	69.0 ms	$\frac{9}{2}^-$
218	10840	α	1.1 µs	$\#1^-$
219	11570	α	11.8 µs	$\frac{9}{2}^-$
220	13741	α	26.4 ms	(3^-)
221	14520	α	52.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
222	16622	α	5.0 s	1^-
223	17827	α	2.1 m	$(\frac{9}{2}^-)$
224	20295	β^+	2.8 h	0^-
225	21639	α	9.9 d	$\#\frac{9}{2}^-$
226	24310	β^-	29.4 h	$\#(1)(^-)$
227	25851	β^-	21.8 s	$\frac{3}{2}^-$
228	28896	β^-	6.2 h	5^+
229	30698	β^-	62.7 m	$(\frac{9}{2}^+)$
230	33838	β^-	122.0 s	(1^+)
231	35763	β^-	7.5 m	$(\frac{1}{2}^+)$
232	39154	β^-	2.0 m	(1^+)
233	41908	β^-	145.0 s	$(\frac{1}{2}^+)$
234	44841	β^-	45.0 s	$\#1^+$

202	9091	α	31.0 ms	0^-
203	8070	α	36.0 ms	$(\frac{5}{2}^-)$
204	8047	α	60.0 ms	0^+
205	6840	α	220.0 ms	$(\frac{5}{2}^-)$

235	47557	β^-	62.0 s	$\#\frac{1}{2}^+$
236	51220	β^-	3.5 m	
237	#54280	β^-	#4 m	$\#\frac{1}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{90}$Th		
209	16540	α	3.1 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
210	14060	α	16.0 ms	0^-
211	13910	α	48.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
212	12098	α	31.7 ms	0^-
213	12120	α	144.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
214	10712	α	87.0 ms	0^-
215	10922	α	1.2 s	$(\frac{1}{2}^-)$
216	10299	α	26.0 ms	0^-
217	12218	α	247.0 µs	$\#\frac{9}{2}^-$
218	12367	α	117.0 ns	0^-
219	14470	α	1.0 µs	$\#\frac{9}{2}^-$
220	14869	α	9.7 µs	0^-
221	16938	α	1.7 ms	$(\frac{9}{2}^+)$
222	17209	α	2.0 ms	0^-
223	19386	α	600.0 ms	$(\frac{5}{2})^+$
224	19994	α	1.0 s	0^-
225	22311	α	8.8 m	$(\frac{3}{2}^+)$
226	23197	α	30.7 m	0^-
227	25806	α	18.7 d	$\frac{1}{2}^+$
228	26772	α	1.9 s	0^+
229	29586	α	7.9 ks	$\frac{5}{2}^+$
230	30864	α	75.4 ka	0^+
231	33817	β^-	25.5 h	$\frac{5}{2}^+$
232	35448	100.00 %	14.0 Ga	0^+
233	38733	β^-	21.8 m	$(\frac{1}{2}^+)$
234	40614	β^-	24.1 d	0^+
235	44018	β^-	7.2 m	$(\frac{1}{2}^+)$
236	46265	β^-	37.5 m	0^+
237	49955	β^-	4.8 m	$(\frac{1}{2}^+)$
238	#52630	β^-	9.4 m	0^+
239	#56610	β^-	#2 m	$\#\frac{1}{2}^+$
		$_{91}$Pa		
212	21610	α	8.0 ms	$\#7^-$
213	19660	α	7.0 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
214	19490	α	17.0 ms	
215	17870	α	14.0 ms	$(\frac{9}{2}^-)$
216	17800	α	105.0 ms	
217	17070	α	3.5 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
218	18684	α	118.0 µs	
219	18540	α	53.0 ns	$\frac{9}{2}^-$
220	#20220	α	780.0 ns	$\#1^-$
221	20380	α	5.9 µs	$\frac{9}{2}^-$
222	#22160	α	3.2 ms	
223	22320	α	5.1 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
224	23863	α	844.0 ms	$\#5^-$
225	24340	α	1.7 s	$\#\frac{5}{2}^-$
226	26093	α	1.8 m	
227	26832	α	38.3 m	$(\frac{5}{2}^-)$
228	28921	β^+	22.0 h	3^+
229	29898	CE	1.5 d	$(\frac{5}{2}^+)$
230	32175	β^+	17.4 d	(2^-)
231	33426	α	32.8 ka	$\frac{3}{2}^-$
232	36948	β^-	1.3 d	(2^-)
233	37490	β^-	27.0 d	$\frac{3}{2}^-$
234	40340	β^-	6.7 h	4^+
235	42289	β^-	24.4 m	$(\frac{3}{2}^-)$
236	45334	β^-	9.1 m	$1(-)$
237	47208	β^-	8.7 m	$(\frac{1}{2}^+)$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P
		$_{92}$U		
218	21912	α	550.0 µs	0^+
219	23290	α	55.0 µs	$\#\frac{9}{2}^+$
220	#22930	α	#60 ns	0^+
221	#24480	α	#700 ns	$\#\frac{9}{2}^+$
222	#24220	α	1.5 µs	0^+
223	25840	α	21.0 µs	$\#\frac{7}{2}^+$
224	25714	α	940.0 µs	0^+
225	27378	α	61.0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
226	27329	α	269.0 ms	0^+
227	29022	α	1.1 m	$(\frac{3}{2}^+)$
228	29222	α	9.1 m	0^+
229	31211	β^+	58.0 m	$(\frac{3}{2}^+)$
230	31616	α	20.2 d	0^+
231	33808	CE	4.2 d	$\#(\frac{5}{2})(+)$
232	34610	α	68.9 a	0^+
233	36920	α	159.2 ka	$\frac{5}{2}^+$
234	38146	0.01 %	245.5 ka	0^+
235	40920	0.72 %	704.0 Ma	$\frac{7}{2}^-$
236	42446	α	23.4 Ma	0^+
237	45092	β^-	6.8 d	$\frac{1}{2}^+$
238	47309	99.27 %	4.5 Ga	0^+
239	50374	β^-	23.5 m	$\frac{5}{2}^+$
240	52716	β^-	14.1 h	0^+
241	#56200	β^-	#5 m	$\#\frac{5}{2}^+$
242	#58620	β^-	16.8 m	0^+
243	#62300	β^-	#10 m	$\#\frac{5}{2}^-$
		$_{93}$Np		
219	#29280	α	#55 µs	$\#\frac{9}{2}^-$
220	#30310	α	#100 ns	$\#1^-$
221	#29850	α	#100 ns	$\#\frac{9}{2}^-$
222	#31020	α	#3 µs	$\#1^-$
223	#30600	α	#1 µs	$\#\frac{9}{2}^-$
224	#31880	α	#100 µs	$\#1^-$
225	#31590	α	#3 ms	$\#\frac{9}{2}^-$
226	#32780	α	35.0 ms	
227	32560	α	510.0 ms	$\#\frac{5}{2}^-$
228	33600	CE	61.4 s	
229	33780	α	4.0 m	$\#\frac{5}{2}^+$
230	35240	ε	4.6 m	
231	35630	ε^+	48.8 m	$\#(\frac{5}{2})(+)$
232	#37360	ε^+	14.7 m	(4^-)
233	37950	ε	36.2 m	$\#\frac{5}{2}^+$
234	39957	ε^+	4.4 d	(0^+)
235	41044	CE	396.1 d	$\frac{5}{2}^+$
236	43380	CE	153.0 ka	(6^-)
237	44879	α	2.1 Ma	$\frac{5}{2}^+$
238	47456	β^-	2.1 d	2^+
239	49312	β^-	2.4 d	$\frac{5}{2}^+$
240	52318	β^-	61.9 m	(5^-)
241	54260	β^-	13.9 m	$(\frac{5}{2}^+)$
242	57420	β^-	2.2 m	(1^-)
243	#59880	β^-	1.9 m	$(\frac{5}{2}^-)$
244	#63200	β^-	2.3 m	(7^-)
245	#65950	β^-	#2 m	$\#\frac{5}{2}$
		$_{94}$Pu		
228	36080	α	2.1 s	0^+
229	37990	α	91.0 s	$\#\frac{3}{2}^+$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
237	41940	β^+	0.7	m	$(\frac{7}{2}^+)$
238	40894	β^-	2.3	m	$\#0^-$
239	#39340	β^-	1.8	h	$\#(\frac{9}{2}(+))$
240	#38800	β^-	#2	m	
241	#39690	β^-	#2	m	$\#\frac{9}{2}^-$

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
230	38934	α	1.7	m	0^+
231	38236	β^+	8.0	m	$\#\frac{5}{2}^+$
232	38363	CE	33.7	m	0^+
233	40050	β^+	20.9	m	$\#\frac{5}{2}^+$
234	40350	CE	8.8	h	0^+
235	42184	β^+	25.5	m	$(\frac{5}{2}^-)$

$_{94}$Pu

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
236	42902	α	2.9	s	0^+
237	45093	CE	45.6	d	$\frac{7}{2}^-$
238	46164	α	87.7	a	0^+
239	48590	α	24.1	ka	$\frac{1}{2}^+$
240	50127	α	6.6	ka	0^+
241	52957	β^-	14.3	a	$\frac{5}{2}^+$
242	54718	α	375.0	ka	0^+
243	57756	β^-	5.0	h	$\frac{7}{2}^+$
244	59807	α	80.0	Ma	0^+
245	63180	β^-	10.5	h	$(\frac{9}{2}^-)$
246	65396	β^-	10.8	d	0^+
247	#69110	β^-	2.3	d	$\#\frac{1}{2}^+$

$_{95}$Am

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
230	#42950	β^+	1.4	m	
231	#42440	β^+	#1	m	
232	#43270	β^+	1.3	m	$\#1^-$
233	#43260	β^+	3.2	m	$\#\frac{5}{2}^-$
234	#44460	β^+	2.3	m	
235	44630	β^+	10.3	m	$\#\frac{5}{2}^-$
236	#46040	β^+	3.6	m	(5^-)
237	#46570	β^+	73.6	m	$\frac{5}{2}(^-)$
238	48420	β^+	98.0	m	1^+
239	49392	CE	11.9	h	$(\frac{5}{2})^-$
240	51512	β^+	50.8	h	(3^-)
241	52956	α	432.6	a	$\frac{5}{2}^-$
242	55469	β^-	16.0	h	1^-
243	57176	α	7.4	ka	$\frac{5}{2}^-$
244	59881	β^-	10.1	h	$\#6^-$
245	61902	β^-	2.0	h	$(\frac{5}{2})^+$
246	#64995	β^-	39.0	m	(7^-)
247	#67150	β^-	23.0	m	$\#\frac{5}{2}^+$
248	#70660	β^-	#3	m	
249	#73100	β^-	#1	m	

$_{96}$Cm

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
232	#46400	β^+	#30	s	0^+
233	47290	α	27.0	s	$\#\frac{5}{2}^+$
234	46724	β^+	51.0	s	0^+
235	#48010	β^+	#5	m	$\#\frac{5}{2}^+$
236	47856	β^+	6.8	m	0^+
237	#49250	β^+	#20	m	$\#\frac{5}{2}^+$
238	49415	CE	2.2	h	0^+
239	51150	β^+	2.5	h	$(\frac{7}{2}^-)$
240	51725	α	27.0	d	0^+
241	53703	CE	32.8	d	$\frac{1}{2}^+$
242	54805	α	162.8	d	0^+
243	57183	α	29.1	a	$\frac{5}{2}^+$
244	58453	α	18.1	a	0^+
245	61004	α	8.4	ka	$\frac{7}{2}^+$
246	62618	α	4.7	ka	0^+
247	65534	α	15.6	Ma	$\frac{9}{2}^-$
248	67393	α	348.0	ka	0^+

$_{97}$Bk

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
240	#65070	β^-	4.8	m	
241	#65630	α	4.6	m	$(\frac{7}{2}^+)$
242	#67710	β^+	7.0	m	$\#2^-$
243	68691	β^-	4.5	h	$\#\frac{3}{2}^-$
244	69716	β^+	4.3	h	$\#4^-$
245	71815	CE	4.9	d	$\frac{3}{2}^-$
246	73970	β^-	1.8	d	$2(^-)$
247	75491	α	1.4	ka	$(\frac{3}{2}^-)$
248	#78060	α	9	s	$\#6^+$
249	79850	β^-	330.0	d	$\frac{7}{2}^+$
250	72952	β^-	3.2	h	2^-
251	75229	β^-	55.6	m	$(\frac{3}{2}^-)$
252	#78540	β^-	1.8	m	
253	#80980	β^-	#10	m	
254	#84090	β^-	#1	m	

$_{98}$Cf

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
237	67940	α	.8	s	$\#\frac{5}{2}^+$
238	#67280	fis/a	21.2	ms	0^+
239	#68250	α	60.0	s	$\#\frac{5}{2}^+$
240	67991	α	40.3	s	0^+
241	#69330	β^-	2.3	m	$\#\frac{7}{2}^-$
242	69867	α	3.6	m	0^+
243	#69990	β^-	10.7	m	$\#\frac{1}{2}^+$
244	61179	α	19.4	m	0^+
245	69360	β^-	45.0	m	$\frac{1}{2}^+$
246	64091	α	35.7	h	0^+
247	66104	CE	3.1	h	$\#\frac{7}{2}^+$
248	67240	α	334.0	d	0^+
249	69726	α	351.0	a	$\frac{9}{2}^-$
250	71172	α	13.1	a	0^+
251	74136	α	900.0	a	$\frac{1}{2}^+$
252	76036	α	2.6	a	0^+
253	79302	β^-	17.8	d	$(\frac{7}{2}^+)$
254	81312	fis/a	60.5	d	0^+
255	#84810	β^-	85.0	m	$(\frac{7}{2}^+)$
256	#87010	fis/a	12.3	m	0^+

$_{99}$Es

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$		J^P
239	#63060	α	#1	s	$\#\frac{5}{2}^+$
240	#64200	α	#1	s	
241	#63860	α	10.0	s	$(\frac{5}{2}^-)$
242	#64800	α	17.8	s	
243	#64750	α	21.6	s	$(\frac{7}{2}^+)$
244	#66030	β^-	37.0	s	
245	#66370	β^-	1.1	m	$(\frac{5}{2}^-)$
246	#67000	β^+	7.6	m	$\#4^-$
247	68578	β^-	4.6	m	$(\frac{7}{2}^+)$
248	#70300	β^+	27.0	m	$\#2^-,0^+$
249	#71180	β^-	102.2	m	$\frac{7}{2}^+$
250	#73230	β^+	8.6	h	(6^+)
251	74614	CE	33.0	h	$(\frac{3}{2}^-)$
252	77300	α	471.7	d	(4^+)

249	70751	β^-	64,2 m	$(\frac{1}{2}^+)$
250	#72990	fiss	#8300 s	0^+
251	76619	β^-	16,8 m	$(\frac{1}{2}^+)$
252	#79060	β^-	#1 m	0^+

$_{97}$Bk

234	#83340	α	2,4 m	
235	#82700	β^+	#1 m	
236	#83540	β^+	#2 m	
237	#83190	β^+	#2 m	$(\frac{3}{2}^-)$
238	#84220	β^+	2,4 m	
239	#84250	β^+	#4 m	$(\frac{7}{2}^+)$

253	79014	α	20,6 d	$\frac{7}{2}^+$
254	81992	α	276,7 d	(7^+)
255	84091	β^-	89,8 d	$(\frac{7}{2}^+)$
256	#87190	β^-	25.4 m	$(1^-,0^-)$
257	#89400	β^-	7,7 d	$\#\frac{7}{2}^+$
258	#92700	β^-	#3 m	

$_{100}$Fm

241	#69130	fiss	730,0 µs	$\#\frac{5}{2}^+$
242	#68400	fiss	800.0 µs	0^+
243	#69360	α	231,0 ms	$\#\frac{7}{2}^-$
244	#68970	fiss	3.1 ms	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P

$_{100}$Fm

245	#70190	α	4,2 s	$\#\frac{1}{2}^+$
246	70189	α	1,5 s	0^+
247	#71670	α	31,0 s	$(\frac{7}{2}^+)$
248	71899	α	35,1 s	0^+
249	73521	β^+	1,6 m	$(\frac{7}{2}^+)$
250	74078	α	30,4 m	0^+
251	75954	β^+	5.3 h	$(\frac{9}{2}^-)$
252	76818	α	25,4 h	0^+
253	78349	EC	3,0 d	$(\frac{1}{2})^+$
254	80904	α	3,2 h	0^+
255	83801	α	20,1 h	$\frac{7}{2}^+$
256	85487	fiss	157,6 m	0^+
257	88691	α	100,5 d	$(\frac{9}{2}^+)$
258	#90480	fiss	370,0 µs	0^+
259	#93710	fiss	1.5 s	$\#\frac{3}{2}^+$
260	#95770	fiss	#1 µs	0^+

$_{101}$Md

245	#76270	α	300,0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
246	#76120	α	,9 s	
247	#76940	α	1,2 s	$(\frac{7}{2}^-)$
248	#77100	β^+	7,0 s	
249	#77230	α	25.4 s	$(\frac{7}{2}^-)$
250	#78680	β^+	52,0 s	
251	78967	β^+	4,2 m	$(\frac{7}{2}^-)$
252	#80510	β^+	2,3 m	
253	#81180	β^+	12,0 m	$(\frac{7}{2}^-)$
254	#83160	β^+	10,0 m	$\#0^-$
255	84844	β^+	27,0 m	$(\frac{7}{2}^-)$
256	#87460	β^+	#30 m	$\#7^-$
257	88997	EC	5,5 h	$(\frac{7}{2}^-)$
258	91688	α	51,5 d	$\#8^-$
259	#93690	fiss	1,6 h	$\#\frac{7}{2}^-$
260	#96560	fiss	27,8 d	
261	#98580	α	#40 m	$\#\frac{7}{2}^-$
262	#101630		#3 m	

$_{102}$No

249	#81780	β^+	57,0 µs	$\#\frac{9}{2}^+$
250	#81560	fiss	5,0 µs	0^+
251	#82660	α	800,0 ms	$(\frac{7}{2}^+)$
252	82872	α	2,5 s	0^+
253	84360	α	1,6 m	$(\frac{9}{2}^-)$
254	84725	α	51,2 s	0^+
255	86807	α	3,5 m	$(\frac{1}{2}^+)$
256	87824	α	2,9 s	0^+

A	Δ (keV)		abund. $t_{1/2}$	J^P

$_{103}$Lr

260	#98280	α	3,0 m	
261	#99560	fiss	39,0 m	
262	#102100	β^+	~ 4 h	
263	#103780	α	#5 h	
264	#106360	α	#10 h	
265	#108230	α	#10 h	
266	#111620	α	#1 h	

$_{104}$Rf

253	#93560	fiss	19,0 ms	$\#(\frac{7}{2})(^+)$
254	#93200	fiss	23,0 µs	0^+
255	#94390	α	1,7 s	$(\frac{9}{2}^-)$
256	94228	fiss	6,6 ms	0^+
257	95868	α	4,8 s	$(\frac{1}{2}^+)$
258	96340	fiss	12,8 ms	0^+
259	#98260	α	2,5 s	$\#\frac{7}{2}^+$
260	#99150	fiss	21,0 ms	0^+
261	101320	fiss	2,2 s	$\#\frac{3}{2}^+$
262	#102390	fiss	280,0 ms	0^+
263	#104790	fiss	11,0 m	$\#\frac{3}{2}^+$
264	#106080	α	#1 h	0^+
265	#108690	fiss	6,6 m	$\#\frac{3}{2}^+$
266	#110080	α	#1 h	0^+
267	#113460	fiss	2,5 h	
268	#116480	α	#1 h	0^+

$_{105}$Db

255	#99790	α	1,7 s	
256	#100500	α	1,9 s	
257	#100210	α	2,3 s	$(\frac{9}{2}^+)$
258	#101800	α	4,5 s	
259	101990	α	510,0 ms	
260	#103670	α	1,5 s	
261	#104250	fiss	4,5 s	
262	#106260	α	35,0 s	
263	#107110	fiss	29,0 s	
264	#109300	α	#3 m	
265	#110190	α	#15 m	
266	#112740	α	30,0 m	
267	#114090	fiss	4,6 h	
268	#117060	fiss	30,6 h	
269	#119150	α	#3 h	
270	#122360	fiss	90,0 h	

$_{106}$Sg

258	#106240	fiss	2,7 ms	0^+
259	#106660	α	280.0 ms	$\#\frac{1}{2}^+$
260	106548	fiss	4,9 ms	0^+
261	106906	α	183.0 ms	$(\frac{3}{2}^+)$

257	90250	α	24,5 s	$(\frac{1}{2}^-)$
258	#91180	ßa6a	1,2 ms	0^+
259	#91110	α	58,0 m	$\#\frac{9}{2}^+$
260	#96610	ßa6a	106,0 ms	0^+
261	#96460	α	#3 h	$\#\frac{3}{2}^+$
262	#100100	ßa6a	~ 5 ms	0^+
263	#100130	α	#20 m	
264	#105010	α	#1 m	0^+

^{103}Lr

251	#87730	β^+	#160 µs	
252	#88740	β^+	969,0 ms	
253	#88580	α	632,0 ms	$(\frac{7}{2}^-)$
254	#89870	α	17,1 s	
255	89947	α	31,1 s	$(\frac{1}{2}^-)$
256	91750	α	27,0 s	
257	#92810	α	6,0 s	$(\frac{1}{2}^-)$
258	#94780	α	4,1 s	
259	#95860	α	6,2 s	$\#\frac{1}{2}^-$

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
262	108970	ßa6a	10,9 ms	0^+
263	#110190	α	940,0 ms	$\#\frac{7}{2}^+$
264	#110780	ßa6a	47,0 ms	0^+
265	#112600	α	9,2 s	$\#\frac{9}{2}^+$
266	#113620	ßa6a	460,0 ms	0^+
267	#115540	ßa6a	1,8 m	
268	#116800	α	#2 m	0^+
269	#119620	α	8,0 m	
270	#121490	α	#3 m	0^+
271	#124700	α	9,1 m	
272	#126580	α	#4 m	0^+
273	#130020	ßa6a	#5 m	

^{107}Bh

260	#113320	α	41,0 ms	
261	#113140	α	12,8 ms	$(\frac{5}{2}^-)$

A	Δ (keV)	abund.	$t_{1/2}$	J^P
		$_{107}$Bh		
262	#114540	α	84,0 ms	
263	#114500	α	#200 ms	
264	#116060	α	1,1 s	
265	#116360	α	1,2 s	
266	#118110	α	2,5 s	
267	#118770	α	22,0 s	
268	#120610	α	#25 s	
269	#121460	α	#1 m	
270	#124230	α	3,8 m	
271	#126990	α	#1 m	
272	#128790	α	8,8 s	
273	#130630	α	#1 m	
274	#133710	α	3,1 m	
275	#135690	fisión	#5 m	
		$_{108}$Hs		
263	#119720	α	760,0 µs	$\#\frac{7}{2}^+$
264	119564	α	340,0 µs	0^+
265	120901	α	2,0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
266	121140	α	3,0 ms	0^+
267	#122650	α	55,0 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
268	#122890	α	1,4 s	0^+
269	#124590	α	27,0 s	$\#\frac{9}{2}^+$
270	#125090	α	#30 s	0^+
271	#127770	α	#10 s	
272	#128010	α	#10 s	0^+
273	#131970	α	910,0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
274	#133490	α	#500 ms	0^+
275	#136620	α	290,0 ms	
276	#138290	α	#100 ms	0^+
277	#141490	fisión	11,0 ms	$\#\frac{3}{2}^+$
		$_{109}$Mt		
265	#126680	α	#2 ms	
266	#127960	α	1,2 ms	
267	#127790	α	#10 ms	
268	#129150	α	27,0 ms	$\#5^+,6^+$
269	#129310	α	#100 ms	
270	#130710	α	6,3 ms	
271	#131100	α	#100 ms	
272	#133580	α	#100 ms	
273	#134510	α	#800 ms	
274	#137160	α	850,0 ms	
275	#138630	α	40,0 ms	
276	#141210	α	730,0 ms	
277	#142770	α	#10 s	
278	#145600	α	20,0 s	
279	#147260	α	#30 s	
		$_{110}$Ds		
267	#139920	α	10,0 µs	$\#\frac{9}{2}^+$
268	#139050	α	#100 µs	0^+
269	138840	α	280,0 µs	$\#\frac{9}{2}^+$
270	139080	α	205,0 µs	0^+
271	#139590	α	90,0 ms	$\#\frac{13}{2}^-$
272	#139020	fisión	#200 ms	0^+
273	#138380	α	240,0 µs	$\#\frac{13}{2}^-$
274	#139180	α	#10 ms	0^+
275	#141620	α	#10 ms	
276	#142540	α	#100 ms	0^+
277	#145230	α	22,0 ms	$\#\frac{11}{2}^+$
278	#146280	α	#270 ms	0^+
279	#149130	fisión	210,0 ms	
280	#150260	fisión	11,0 s	0^+
281	#153240	fisión	14,0 s	$\#\frac{3}{2}^+$

A	Δ (keV)	abund.	$t_{1/2}$	J^P
		$_{111}$Rg		
272	#142770	α	3,5 ms	$\#5^+,6^+$
273	#142640	α	#2 ms	
274	#144620	α	29,0 ms	
275	#145260	α	#5 ms	
276	#147490	α	#10 ms	
277	#148170	α	#10 ms	
278	#150430	α	8,0 ms	
279	#151570	α	640,0 ms	
280	#153630	α	3,8 s	
281	#154960	fisión	37,0 s	
282	#157590	α	1,9 s	
283	#158860	α	#90 s	
		$_{112}$Cn		
276	#150350	α	#100 µs	0^+
277	#152450	α	990,0 µs	$\#\frac{9}{2}^+$
278	#152910	α	#2 ms	0^+
279	#155130	α	#5 ms	
280	#155700	α	#5 ms	0^+
281	#158120	α	370,0 ms	$\#\frac{9}{2}^+$
282	#158620	fisión	900,0 µs	0^+
283	#161400	α	4,1 s	
284	#162230	fisión	104,0 ms	0^+
285	#164980	α	32,0 s	$\#\frac{5}{2}^+$
		$_{113}$Ed		
278	#158890	α	2,3 ms	
279	#159240	α	#1 ms	
280	#161080	α	#10 ms	
281	#161600	α	#100 ms	
282	#163640	α	140,0 ms	
283	#164480	α	360,0 ms	
284	#166480	α	1,0 s	
285	#167420	α	6,0 s	
286	#169730	α	70,0 s	
287	#170830	α	#2 m	
		$_{114}$Fl		
285	#171060	α	470,0 ms	
286	#171610	fisión	140,0 ms	0^+
287	#173090	α	520,0 ms	
288	#174720	α	760,0 ms	0^+
289	#177370	α	2,4 s	$\#\frac{5}{2}^+$
		$_{115}$Ef		
287	#177040	α	120,0 ms	
288	#179640	α	190,0 ms	
289	#180360	α	340,0 ms	
290	#182650	α	60,0 ms	
291	#183570	α	#1 s	
		$_{116}$Lv		
289	#184690	α	#2 ms	$\#\frac{5}{2}^+$
290	#185030	α	8,0 ms	0^+
291	#187300	α	28,0 ms	
292	#187920	α	24,0 ms	0^+
293	#190480	α	80,0 ms	
		$_{115}$Eh		
291	#191450	α	#2 ms	
292	#193250	α	#10 ms	
293	#193970	α	18,0 ms	
294	#196040	α	290,0 ms	

Apéndice H: Tablas estadísticas

Se presentan a continuación tres tablas de probabilidades de frecuente uso en estadística. La primera tabla, H.1, se utiliza para calcular niveles de confianza sobre una variable gaussiana. La segunda, H.2, para el cálculo de intervalos de confianza; por ejemplo, puede verse que en un intervalo ±1 σ(±2σ) centrado en la media, elárea de la curva de Gauss es de 68,27 % (95,45 %). Así mismo, uno puede encontrar el intervalo que abarca el 90 % (95 %) delárea de la curva de Gauss y encuentra ±1,645 σ(±1,960σ) respecto a la media.

Porúltimo, la tabla H.3 de probabilidades de χ^2 da la probabilidad asociada al valor del χ^2 reducido (χ^2/ν), en función del número de grados de libertad ν(primera columna de la tabla). Es una medida de la bondad de un ajuste de un conjunto de datos experimentales a una expresión teórica. Si se trata de un ajuste de N medidas y_i con varianza σ_i^2 que se supone que provienen de una distribución teórica $f(x_i;\vec{a})$, que depende de k parámetros $\vec{a}$, los mejores estimadores de los k parámetros, $\vec{a}_{min}$, se obtienen al minimizar la suma de cuadrados cuyo valor en el mínimo es:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i;\vec{a}_{min}))^2}{\sigma_i^2}$$

La probabilidad de obtener este valor viene dada por el nivel de

confianza de la distribución de χ^2:

$$P_{\chi^2}(S_0, \nu) = \int_{S_0}^{\infty} f_{\chi^2}(z, \nu) dz$$

siendo $\nu = N - k$ el número de grados de libertad. Así por ejemplo, en un ajuste a una recta con 7 puntos ($\nu = 5$ grados de libertad) se obtiene un valor del χ^2: $S_0 = 6{,}0$, luego la probabilidad de χ^2, $P_{\chi}2\ (S_0, \nu) = 30{,}6\%$.

En el parágrafo 7.6.3 se puede consultar la definición del estimador χ^2.

Tabla H.1: Tabla de valores de la integral de la función de Gauss, muy cómoda para conocer rápidamente el nivel de confianza sobre una estimación estadística. La variable $z = (x - \mu) / \sigma$ y el valor tabulado da la probabilidad de que x se encuentre dentro de z desviaciones estándar σ por debajo de la media μ, es decir la probabilidad dada en la tabla $F_g(z_c) = \int_{-\infty}^{z_c} f_g(z) dz$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	50,00	50,40	50,80	51,20	51,60	51,99	52,39	52,79	53,19	53,59
0,10	53,98	54,38	54,78	55,17	55,57	55,96	56,36	56,75	57,14	57,54
0,20	57,93	58,32	58,71	59,10	59,48	59,87	60,26	60,64	61,03	61,41
0,30	61,79	62,17	62,55	62,93	63,31	63,68	64,06	64,43	64,80	65,17
0,40	65,54	65,91	66,27	66,64	67,00	67,36	67,72	68,08	68,44	68,79
0,50	69,15	69,50	69,85	70,19	70,54	70,88	71,22	71,56	71,90	72,24
0,60	72,57	72,91	73,24	73,56	73,89	74,21	74,54	74,86	75,17	75,49
0,70	75,80	76,11	76,42	76,73	77,03	77,34	77,64	77,93	78,23	78,52
0,80	78,81	79,10	79,39	79,67	79,95	80,23	80,51	80,79	81,06	81,33
0,90	81,59	81,86	82,12	82,38	82,64	82,89	83,15	83,40	83,65	83,89
1,00	84,14	84,38	84,61	84,85	85,08	85,31	85,54	85,77	85,99	86,22
1,10	86,43	86,65	86,87	87,08	87,29	87,49	87,70	87,90	88,10	88,30
1,20	88,49	88,69	88,88	89,07	89,25	89,44	89,62	89,80	89,97	90,15
1,30	90,32	90,49	90,66	90,83	90,99	91,15	91,31	91,47	91,62	91,77
1,40	91,93	92,07	92,22	92,36	92,51	92,65	92,79	92,92	93,06	93,19
1,50	93,32	93,45	93,57	93,70	93,82	93,94	94,06	94,18	94,29	94,41
1,60	94,52	94,63	94,74	94,85	94,95	95,05	95,15	95,25	95,35	95,45
1,70	95,54	95,64	95,73	95,82	95,91	95,99	96,08	96,16	96,25	96,33
1,80	96,41	96,48	96,56	96,64	96,71	96,78	96,86	96,93	96,99	97,06
1,90	97,13	97,19	97,26	97,32	97,38	97,44	97,50	97,56	97,61	97,67
2,00	97,72	97,78	97,83	97,88	97,93	97,98	98,03	98,08	98,12	98,17
2,10	98,21	98,26	98,30	98,34	98,38	98,42	98,46	98,50	98,54	98,57
2,20	98,61	98,64	98,68	98,71	98,74	98,78	98,81	98,84	98,87	98,90
2,30	98,93	98,95	98,98	99,01	99,03	99,06	99,09	99,11	99,13	99,16
2,40	99,18	99,20	99,22	99,24	99,26	99,28	99,30	99,32	99,34	99,36
2,50	99,38	99,40	99,41	99,43	99,44	99,46	99,48	99,49	99,51	99,52
2,60	99,53	99,55	99,56	99,57	99,58	99,60	99,61	99,62	99,63	99,64
2,70	99,65	99,66	99,67	99,68	99,69	99,70	99,71	99,72	99,73	99,74
2,80	99,74	99,75	99,76	99,77	99,77	99,78	99,79	99,79	99,80	99,81
2,90	99,81	99,82	99,82	99,83	99,84	99,84	99,85	99,85	99,86	99,86
3,00	99,86	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,89	99,89	99,90	99,90
3,10	99,90	99,91	99,91	99,91	99,92	99,92	99,92	99,92	99,93	99,93
3,20	99,93	99,93	99,94	99,94	99,94	99,94	99,94	99,95	99,95	99,95
3,30	99,95	99,95	99,95	99,96	99,96	99,96	99,96	99,96	99,96	99,96
3,40	99,97	99,97	99,97	99,97	99,97	99,97	99,97	99,97	99,97	99,98
3,50	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98

Tabla H.2: Tabla de valores de la integral de la función de Gauss, muy cómoda para conocer rápidamente el intervalo de confianza de una variable estadística. La variable $z = (x - \mu) / \sigma$ y el valor tabulado da la probabilidad de que x se encuentre un número de z desviaciones estándar σ de la media μ, es decir la

probabilidad dada en la tabla es: $F_g(z_c) = \int_{-z_c}^{z_c} f_g(z)dz$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,00	0,80	1,60	2,39	3,19	3,99	4,79	5,58	6,38	7,17
0,10	7,97	8,76	9,55	10,35	11,14	11,93	12,71	13,50	14,29	15,07
0,20	15,85	16,63	17,41	18,19	18,97	19,74	20,51	21,28	22,05	22,82
0,30	23,58	24,34	25,10	25,86	26,61	27,37	28,11	28,86	29,60	30,34
0,40	31,08	31,82	32,55	33,28	34,00	34,73	35,45	36,16	36,88	37,58
0,50	38,29	38,99	39,69	40,39	41,08	41,77	42,45	43,13	43,81	44,48
0,60	45,15	45,81	46,47	47,13	47,78	48,43	49,07	49,71	50,35	50,98
0,70	51,61	52,23	52,85	53,46	54,07	54,67	55,27	55,87	56,46	57,05
0,80	57,63	58,21	58,78	59,35	59,91	60,47	61,02	61,57	62,11	62,65
0,90	63,19	63,72	64,24	64,76	65,28	65,79	66,30	66,80	67,29	67,78
1,00	68,27	68,75	69,23	69,70	70,17	70,63	71,09	71,54	71,99	72,43
1,10	72,87	73,30	73,73	74,15	74,57	74,99	75,40	75,80	76,20	76,60
1,20	76,99	77,37	77,76	78,13	78,50	78,87	79,24	79,59	79,95	80,30
1,30	80,64	80,98	81,32	81,65	81,98	82,30	82,62	82,93	83,24	83,55
1,40	83,85	84,15	84,44	84,73	85,01	85,30	85,57	85,85	86,11	86,38
1,50	86,64	86,90	87,15	87,40	87,64	87,89	88,12	88,36	88,59	88,82
1,60	89,04	89,26	89,48	89,69	89,90	90,11	90,31	90,51	90,70	90,90
1,70	91,09	91,27	91,46	91,64	91,81	91,99	92,16	92,33	92,49	92,65
1,80	92,81	92,97	93,12	93,27	93,42	93,57	93,71	93,85	93,99	94,12
1,90	94,26	94,39	94,51	94,64	94,76	94,88	95,00	95,11	95,23	95,34
2,00	95,45	95,56	95,66	95,76	95,86	95,96	96,06	96,15	96,25	96,34
2,10	96,43	96,51	96,60	96,68	96,76	96,84	96,92	97,00	97,07	97,15
2,20	97,22	97,29	97,36	97,42	97,49	97,55	97,62	97,68	97,74	97,80
2,30	97,85	97,91	97,96	98,02	98,07	98,12	98,17	98,22	98,27	98,31
2,40	98,36	98,40	98,45	98,49	98,53	98,57	98,61	98,65	98,68	98,72
2,50	98,76	98,79	98,82	98,86	98,89	98,92	98,95	98,98	99,01	99,04
2,60	99,07	99,09	99,12	99,14	99,17	99,19	99,22	99,24	99,26	99,28
2,70	99,30	99,33	99,35	99,37	99,38	99,40	99,42	99,44	99,45	99,47
2,80	99,49	99,50	99,52	99,53	99,55	99,56	99,58	99,59	99,60	99,61
2,90	99,63	99,64	99,65	99,66	99,67	99,68	99,69	99,70	99,71	99,72
3,00	99,73	99,74	99,75	99,75	99,76	99,77	99,78	99,79	99,79	99,80
3,10	99,81	99,81	99,82	99,82	99,83	99,84	99,84	99,85	99,85	99,86
3,20	99,86	99,87	99,87	99,88	99,88	99,88	99,89	99,89	99,90	99,90
3,30	99,90	99,91	99,91	99,91	99,92	99,92	99,92	99,92	99,93	99,93
3,40	99,93	99,93	99,94	99,94	99,94	99,94	99,95	99,95	99,95	99,95
3,50	99,95	99,95	99,96	99,96	99,96	99,96	99,96	99,96	99,97	99,97

Tabla H.3: Tabla de valores de la probabilidad de χ^2 en función del número de grados de libertad, ν, (de 1 a 30) y del valor de χ^2 reducido, (χ^2/ν), de 0 a 2,8.

ν	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
1	100,0	65,5	52,7	43,9	37,1	31,7	27,3	23,7	20,6	18,0	15,7	13,8	12,1	10,7	9,4
2	100,0	81,9	67,0	54,9	44,9	36,8	30,1	24,7	20,2	16,5	13,5	11,1	9,1	7,4	6,1
3	100,0	89,6	75,3	61,5	49,4	39,2	30,8	24,1	18,7	14,5	11,2	8,6	6,6	5,0	3,8
4	100,0	93,8	80,9	66,3	52,5	40,6	30,8	23,1	17,1	12,6	9,2	6,6	4,8	3,4	2,4
5	100,0	96,3	84,9	70,0	54,9	41,6	30,6	22,1	15,6	10,9	7,5	5,1	3,5	2,3	1,6
6	100,0	97,7	87,9	73,1	57,0	42,3	30,3	21,0	14,3	9,5	6,2	4,0	2,5	1,6	1,0
7	100,0	98,6	90,3	75,6	58,7	42,9	29,9	20,0	13,0	8,2	5,1	3,1	1,9	1,1	0,7
8	100,0	99,1	92,1	77,9	60,3	43,3	29,4	19,1	11,9	7,2	4,2	2,4	1,4	0,8	0,4
9	100,0	99,4	93,6	79,8	61,6	43,7	29,0	18,2	10,9	6,3	3,5	1,9	1,0	0,5	0,3
10	100,0	99,6	94,7	81,5	62,9	44,0	28,5	17,3	10,0	5,5	2,9	1,5	0,8	0,4	0,2
11	100,0	99,8	95,7	83,0	64,0	44,3	28,0	16,5	9,1	4,8	2,4	1,2	0,6	0,3	0,1
12	100,0	99,8	96,4	84,4	65,1	44,6	27,6	15,7	8,4	4,2	2,0	0,9	0,4	0,2	0,1
13	100,0	99,9	97,1	85,6	66,1	44,8	27,1	15,0	7,7	3,7	1,7	0,7	0,3	0,1	0,1
14	100,0	99,9	97,6	86,7	67,0	45,0	26,7	14,3	7,1	3,3	1,4	0,6	0,2	0,1	
15	100,0	100,0	98,0	87,8	67,9	45,1	26,3	13,7	6,5	2,9	1,2	0,5	0,2	0,1	
16	100,0	100,0	98,3	88,7	68,7	45,3	25,8	13,1	6,0	2,5	1,0	0,4	0,1	0,0	
17	100,0	100,0	98,6	89,5	69,5	45,4	25,4	12,5	5,5	2,2	0,8	0,3	0,1		
18	100,0	100,0	98,8	90,3	70,3	45,6	25,0	12,0	5,1	2,0	0,7	0,2	0,1		
19	100,0	100,0	99,0	91,0	71,0	45,7	24,6	11,4	4,7	1,7	0,6	0,2	0,1		
20	100,0	100,0	99,2	91,6	71,7	45,8	24,2	10,9	4,3	1,5	0,5	0,2	0,0		
21	100,0	100,0	99,3	92,2	72,3	45,9	23,9	10,5	4,0	1,4	0,4	0,1			
22	100,0	100,0	99,4	92,7	72,9	46,0	23,5	10,0	3,7	1,2	0,4	0,1			
23	100,0	100,0	99,5	93,2	73,5	46,1	23,1	9,6	3,4	1,1	0,3	0,1			
24	100,0	100,0	99,6	93,7	74,1	46,2	22,8	9,2	3,2	0,9	0,3	0,1			
25	100,0	100,0	99,7	94,1	74,7	46,2	22,4	8,8	2,9	0,8	0,2	0,0			
26	100,0	100,0	99,7	94,5	75,2	46,3	22,1	8,5	2,7	0,7	0,2				
27	100,0	100,0	99,8	94,9	75,7	46,4	21,8	8,1	2,5	0,7	0,2				
28	100,0	100,0	99,8	95,2	76,2	46,4	21,4	7,8	2,3	0,6	0,1				
29	100,0	100,0	99,8	95,6	76,7	46,5	21,1	7,5	2,1	0,5	0,1				
30	100,0	100,0	99,9	95,9	77,2	46,6	20,8	7,2	2,0	0,5	0,1				

Apéndice I: Estructura electrónica de los elementos

ESTRUCTURA ELECTRÓONICA DE LOS ELEMENTOS (I)

	Elemento		Configuración electrónica ($3d^5$=5 electrones 3d, etc.)			Estado fundamental $^{2S+1}L_J$	Energía de ionización (eV)
1	H	Hidrógeno	$(1s)$			$^2S_{1/2}$	13.5984
2	He	Helio	$(1s)^2$			$^1S_0$	24.5874
3	Li	Litio	$[He](2s)$			$^2S_{1/2}$	5.3917
4	Be	Berilio	$[He](2s)^2$			$^1S_0$	9.3227
5	B	Boro	$[He](2s)^2$	$(2p)$		$^2P_{1/2}$	8.2980
6	C	Carbono	$[He](2s)^2$	$(2p)^2$		$^3P_0$	11.2603
7	N	Nitrógeno	$[He](2s)^2$	$(2p)^3$		$^4S_{3/2}$	14.5341
8	O	Oxígeno	$[He](2s)^2$	$(2p)^4$		$^3P_2$	13.6181
9	F	Flúor	$[He](2s)^2$	$(2p)^5$		$^2P_{3/2}$	17.4228
10	Ne	Neón	$[He](2s)^2$	$(2p)^6$		$^1S_0$	21.5645
11	Na	Sodio	$[Ne](3s)$			$^2S_{1/2}$	5.1391
12	Mg	Magnesio	$[Ne](3s)^2$			$^1S_0$	7.6462
13	Al	Aluminio	$[Ne](3s)^2$	$(3p)$		$^2P_{1/2}$	5.9858
14	Si	Silicio	$[Ne](3s)^2$	$(3p)^2$		$^3P_0$	8.1517
15	P	Fósforo	$[Ne](3s)^2$	$(3p)^3$		$^4S_{3/2}$	10.4867
16	S	Azufre	$[Ne](3s)^2$	$(3p)^4$		$^3P_2$	10.3600
17	Cl	Cloro	$[Ne](3s)^2$	$(3p)^5$		$^2P_{3/2}$	12.9676
18	Ar	Argón	$[Ne](3s)^2$	$(3p)^6$		$^1S_0$	15.7596
19	K	Potasio	$[Ar]$	$(4s)$		$^2S_{1/2}$	4.3407
20	Ca	Calcio	$[Ar]$	$(4s)^2$		$^1S_0$	6.1132
..	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
21	Sc	Escandio	$[Ar](3d)$	$(4s)^2$	T	$^2D_{3/2}$	6.5615
22	Ti	Titanio	$[Ar](3d)^2$	$(4s)^2$	t	$^3F_2$	6.8281
23	V	Vanadio	$[Ar](3d)^3$	$(4s)^2$	a	$^4F_{3/2}$	6.7462
24	Cr	Cromo	$[Ar](3d)^5$	$(4s)$	n	$^7S_3$	6.7665
25	Mn	Manganeso	$[Ar](3d)^5$	$(4s)^2$	s	$^6S_{5/2}$	7.4340
26	Fe	Hierro	$[Ar](3d)^6$	$(4s)^2$	i	$^5D_4$	7.9024
27	Co	Cobalto	$[Ar](3d)^7$	$(4s)^2$	c	$^4F_{9/2}$	7.8810
28	Ni	Níquel	$[Ar](3d)^8$	$(4s)^2$	i	$^3F_4$	7.6398
29	Cu	Cobre	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)$	o	$^2S_{1/2}$	7.7264
30	Zn	Zinc	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2$	s	$^1S_0$	9.3942
..	...	.....	.....	.....	.	.....	.....

31	Ga	Galio	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)$		$^2P_{1/2}$	5.9993
32	Ge	Germanio	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^2$		$^3P_0$	7.8994
33	As	Arsénico	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^3$		$^4S_{3/2}$	9.7886
34	Se	Selenio	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^4$		$^3P_2$	9.7524
35	Br	Bromo	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^5$		$^2P_{3/2}$	11.8138
36	Kr	Kriptón	$[Ar](3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^6$		$^1S_0$	13.9996
37	Rb	Rubidio	$[Kr]$	$(5s)$		$^2S_{1/2}$	4.1771
38	Sr	Estroncio	$[Kr]$	$(5s)^2$		$^1S_0$	5.6949
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
39	Y	Itrio	$[Kr](4d)$	$(5s)^2$	T	$^2D_{3/2}$	6.2173
40	Zr	Circonio	$[Kr](4d)^2$	$(5s)^2$	r	$^3F_2$	6.6339
41	Nb	Niobio	$[Kr](4d)^4$	$(5s)$	a	$^6D_{1/2}$	6.7589
42	Mo	Molibdeno	$[Kr](4d)^5$	$(5s)$	n	$^7S_3$	7.0924
43	Tc	Tecneceo	$[Kr](4d)^6$	$(5s)$	c	$^6D_{9/2}$	7.28
44	Ru	Rutenio	$[Kr](4d)^7$	$(5s)$	i	$^5F_5$	7.3605
45	Rh	Rodio	$[Kr](4d)^8$	$(5s)$	c	$^4F_{9/2}$	7.4589
46	Pd	Paladio	$[Kr](4d)^{10}$		i	$^1S_0$	8.3369
47	Ag	Plata	$[Kr](4d)^{10}$	$(5s)$	ó	$^2S_{1/2}$	7.5762
48	Cd	Cadmio	$[Kr](4d)^{10}$	$(5s)^2$	n	$^1S_0$	8.9938
49	In	Indio	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)$		$^2P_{1/2}$	5.79
50	Sn	Estaño	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)^2$		$^3P_0$	7.34
51	Sb	Antimonio	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)^3$		$^4S_{3/2}$	8.64
52	Te	Telurio	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)^4$		$^3P_2$	9.01
53	I	Yodo	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)^5$		$^2P_{3/2}$	10.45
54	Xe	Xenón	$[Kr](4d)^{10}(5s)^2$	$(5p)^6$		$^1S_0$	12.13
55	Cs	Cesio	$[Xe]$	$(6s)$		$^2S_{1/2}$	3.89
56	Ba	Bario	$[Xe]$	$(6s)^2$		$^1S_0$	5.21

ESTRUCTURA ELECTRÓONICA DE LOS ELEMENTOS (II)

	Elemento		Configuración electrónica ($3d^5$= 5 electrones 3d, etc.)			Estado fundamental $^{2S+1}L_J$	Energía de ionización eV
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
57	La	Lantano	$[Xe](5d)$	$(6s)^2$		$^2D_{3/2}$	5.58
58	Ce	Cerio	$[Xe](4f)^2$	$(6s)^2$	T	$^3H_4$	5.54
59	Pr	Praseodimio	$[Xe](4f)^3$	$(6s)^2$	i	$^4I_{9/2}$	5.46
60	Nd	Neodimio	$[Xe](4f)^4$	$(6s)^2$	e	$^5I_4$	5.52
61	Pm	Promecio	$[Xe](4f)^5$	$(6s)^2$	r	$^6H_{5/2}$	5.55
62	Sm	Samario	$[Xe](4f)^6$	$(6s)^2$	r	$^7F_0$	5.64
63	Eu	Europio	$[Xe](4f)^7$	$(6s)^2$	a	$^8S_{7/2}$	5.67
64	Gd	Gadolinio	$[Xe](4f)^7(5d)$	$(6s)^2$	s	$^9D_2$	6.15
65	Tb	Terbio	$[Xe](4f)^9$	$(6s)^2$		$^6H_{15/2}$	5.86
66	Dy	Disprosio	$[Xe](4f)^{10}$	$(6s)^2$	r	$^5I_8$	5.94
67	Ho	Holmio	$[Xe](4f)^{11}$	$(6s)^2$	a	$^4I_{15/2}$	6.02
68	Er	Erbio	$[Xe](4f)^{12}$	$(6s)^2$	i	$^3H_6$	6.11
69	Tm	Tulio	$[Xe](4f)^{13}$	$(6s)^2$	a	$^2F_{7/2}$	6.18
70	Yb	Iterbio	$[Xe](4f)^{14}$	$(6s)^2$	s	$^1S_0$	6.25
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
71	Lu	Lutecio	$[Xe](4f)^{14}(5d)$	$(6s)^2$	T	$^2D_{3/2}$	5.43
72	Hf	Hafnio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^2$	$(6s)^2$	r	$^3F_2$	6.83
73	Ta	Tantalio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^3$	$(6s)^2$	a	$^4F_{3/2}$	7.89
74	W	Wolframio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^4$	$(6s)^2$	n	$^5D_0$	7.98
75	Re	Renio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^5$	$(6s)^2$	s	$^6S_{5/2}$	7.88
76	Os	Osmio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^6$	$(6s)^2$	i	$^5D_4$	8.70
77	Ir	Iridio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^7$	$(6s)^2$	c	$^4F_{9/2}$	9.10
78	Pt	Platino	$[Xe](4f)^{14}(5d)^9$	$(6s)$	l	$^3D_3$	9.00

79	Au	Oro	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)$	s	$^2S_{1/2}$	9.23
80	Hg	Mercurio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2$	s	$^1S_0$	10.44
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
81	Tl	Talio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)$		$^2P_{1/2}$	6.11
82	Pb	Plomo	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)^2$		$^3P_0$	7.42
83	Bi	Bismuto	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)^3$		$^4S_{3/2}$	7.29
84	Po	Polonio	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)^4$		$^3P_2$	8.42
85	At	Ástato	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)^5$		$^2P_{3/2}$	9.65
86	Rn	Radón	$[Xe](4f)^{14}(5d)^{10}$	$(6s)^2(6p)^6$		$^1S_0$	10.75
87	Fr	Francio	$[Rn]$	$(7s)$		$^2S_{1/2}$	3.97
88	Ra	Radio	$[Rn]$	$(7s)^2$		$^1S_0$	5.28
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
89	Ac	Actinio	$[Rn](6d)$	$(7s)^2$		$^2D_{3/2}$	5.17
90	Th	Torio	$[Rn](6d)^2$	$(7s)^2$		$^3F_2$	6.08
91	Pa	Protactinio	$[Rn](5f)^2(6d)$	$(7s)^2$	A	$^4K_{11/2}$	5.89
92	U	Uranio	$[Rn](5f)^3(6d)$	$(7s)^2$	c	$^5L_6$	6.19
93	Np	Neptunio	$[Rn](5f)^4(6d)$	$(7s)^2$	i	$^6L_{11/2}$	6.27
94	Pu	Plutonio	$[Rn](5f)^6$	$(7s)^2$	j	$^7F_0$	6.06
95	Am	Americio	$[Rn](5f)^7$	$(7s)^2$	n	$^8S_{7/2}$	5.99
96	Cm	Curio	$[Rn](5f)^7(6d)$	$(7s)^2$	t	$^9D_2$	6.02
97	Bk	Berkelio	$[Rn](5f)^9$	$(7s)^2$	d	$^6H_{15/2}$	6.23
98	Cf	Californio	$[Rn](5f)^{10}$	$(7s)^2$	o	$^5I_8$	6.30
99	Es	Einsteinio	$[Rn](5f)^{11}$	$(7s)^2$	s	$^4I_{15/2}$	6.42
100	Fm	Fermio	$[Rn](5f)^{12}$	$(7s)^2$		$^3H_6$	6.50
101	Md	Mendelevio	$[Rn](5f)^{13}$	$(7s)^2$		$^2F_{7/2}$	6.58
102	No	Nobelio	$[Rn](5f)^{14}$	$(7s)^2$		$^1S_0$	6.65
103	Lr	Lawrencio	$[Rn](5f)^{14}$	$(7s)^2 7p?$		$^2P_{1/2}$	4.92
...	...	.....	.....	.....	.	.....	.....
104	Rf	Rutherfordio	$[Rn](5f)^{14}(6d)^2$	$(7s)^2?$		$^3F_2$	6.0?
105	Db	Dubnio					
106	Sg	Seaborgio					
107	Bh	Bohrio					
108	Hs	Hassio					
109	Mt	Meitnerio					
110	Ds	Darmstadtio					
111	Rg	Roentgenio					
112	Cn	Copernicio					
114	Fl	Flerovio					
116	Lv	Livermorio					

Apéndice J: Tablas de propiedades atómicas de los elementos

Tabla J.1: Propiedades atómicas y nucleares de varios elementos. Se muestran los valores de la sección eficaz total, σ_T, la sección eficaz de absorción (o inelástica), σ_I, la longitud de colisión nuclear, λ_T y la longitud de absorción λ_I, para colisiones con protones o neutrones de alta energía (80-240 GeV/c), que dependen muy poco de la energía. La densidad, ρ, corresponde al estado sólido o líquido en punto de ebullición; en el caso del *C* es para grafito puro.

Material	Z	A	σ_T (barns)	λ_T (g/cm^2)	σ_{abs} (barns)	λ_I (g/cm^2)	ρ (g/cm^3)
H_2	1	1,01	0,0387	43,3	0,033	50,8	0,071
D_2	1	2,01	0,073	45,7	0,061	53,7	0,162
He	2	4,00	0,133	49,9	0,102	65,1	0,125
Li	3	6,94	0,211	54,6	0,157	73,4	0,534
Be	4	9,01	0,268	55,8	0,199	75,2	1,848
C	6	12,01	0,331	60,2	0,231	86,3	2,210
N_2	7	14,01	0,379	61,4	0,265	87,8	0,807
O_2	8	16,00	0,420	63,2	0,292	91,0	1,141
Ne	10	20,18	0,507	66,1	0,347	96,6	1,204
Al	13	26,98	0,634	70,6	0,421	106,4	2,699
Ar	18	39,95	0,868	76,4	0,566	117,2	1,396
Fe	26	55,85	1,120	82,8	0,703	131,9	7,87
Cu	29	63,55	1,232	85,6	0,782	134,9	8,96
Sn	50	118,69	1,967	100,2	1,21	163	7,31
W	74	183,85	2,767	110,3	1,65	185	19,30
Pb	82	207,19	2,960	116,2	1,77	194	11,35
U	92	238,03	3,378	117,0	1,98	199	18,95

Tabla J.2: Propiedades electromagnéticas de varios elementos. n_a y n_e dan el número deátomos y electrones por unidad de volumen ($\times 10^{23}/cm^3$), respectivamente; I es el potencial medio de excitación y L_0(en cm) y X_0(en g/cm^2) representan la longitud de radiación del elemento. La densidad, ρ, corresponde al estado sólido o líquido en punto de ebullición; en el caso del C es para grafito puro.

	Z	A	n_a	n_e	I (eV)	L_0 (cm)	X_0 (g/cm^2)	ρ (g/cm^3)
H_2	1	1,01	0,423	0,423	21,8	865	63,04	0,071
He	2	4,00	0,188	0,376	41,8	757	94,32	0,125
Li	3	6,94	0,463	1,39	40,0	155	82,78	0,534
Be	4	9,01	1,230	4,94	63,7	35,3	65,19	1,848
B	5	10,81	1,320	6,60	76	22,2	52,69	2,37
C	6	12,01	1,146	6,82	78	18,8	42,70	2,210
N_2	7	14,01	0,347	2,43	85,1	47,0	37,99	0,807
O_2	8	16,00	0,429	3,43	98,3	30,0	34,24	1,141
Ne	10	20,18	0,358	3,58	137	24,0	28,93	1,204
Al	13	26,98	0,603	7,84	166	8,89	24,01	2,699
Si	14	28,09	0,500	6,99	173	9,36	21,82	2,329
Ar	18	39,95	0,211	3,80	188	14,0	19,55	1,396
Fe	26	55,85	0,849	22,1	286	1,76	13,84	7,87
Cu	29	63,55	0,845	24,6	322	1,43	12,86	8,96
Zn	30	65,39	0,658	19,6	330	1,75	12,43	7,14
Kr	36	83,80	0,155	5,59	352	5,26	11,37	2,16
Ag	47	107,87	0,586	27,6	470	0,85	8,97	10,5
Sn	50	118,69	0,371	18,5	488	1,21	8,82	7,31
W	74	183,85	0,632	46,8	727	0,35	6,76	19,30
Pt	78	195,08	0,662	51,5	790	0,305	6,54	21,45
Au	79	196,97	0,577	45,6	790	0,34	6,46	19,32
Pb	82	207,19	0,330	27,0	823	0,56	6,37	11,35
U	92	238,03	0,479	44,1	890	0,32	6,00	18,95

Apéndice K: La tabla de Mendeleiev

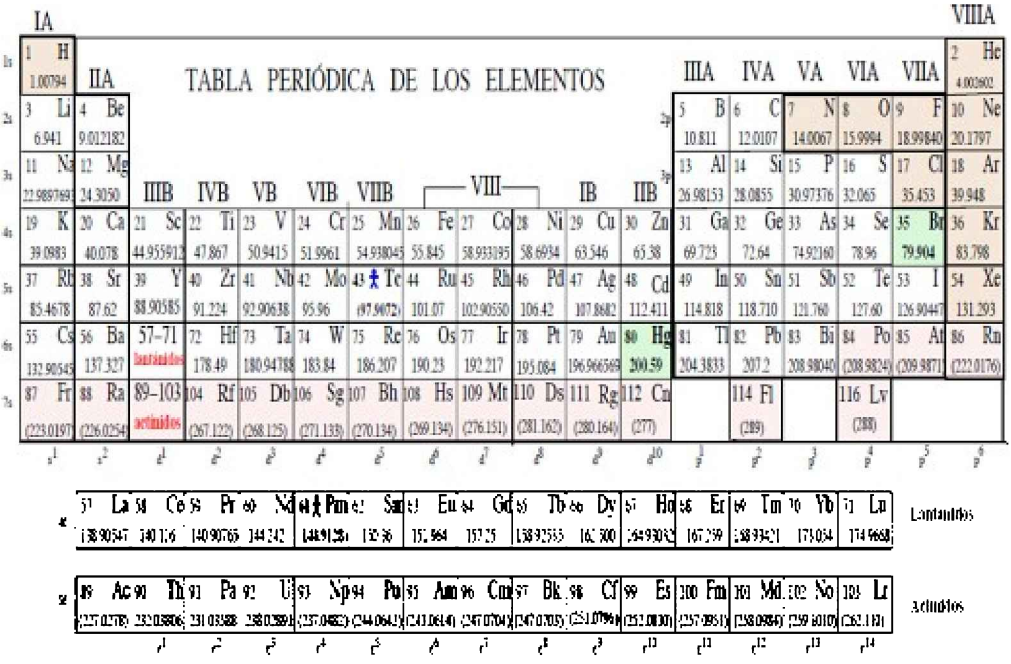
La tabla de Mendeleiev, publicada en 1869 por el propio Dimitri Ivanovich Mendeleiev y conocida con el nombre de *sistema periódico,* consta de 18 columnas (después de la corrección de A. Werner y F. Paneth) y de 6 filas (en el sistema largo). Las columnas se denominan *grupos* y las filas *peñodos*; los grupos contienen elementos con propiedades físico-químicas similares porque tienen suúltima capa electrónica con la misma configuración. En cualquier caso, los elementos están ordenados según su número atómico *Z*. De esta manera, la ordenación de los elementos en esta tabla da lugar a las dos observaciones siguientes:

- La masa atómica del elemento: los elementos aparecen según sus masas atómicas, de menor a mayor masa.
- Las propiedades: los elementos con propiedades similares se encuentra en una misma columna.

No debe confundirse la masa atómica que aparece en el recuadro de cada elemento de la tabla de Mendeleiev con la masa atómica de un determinado isótopo. Estaúltima viene dada en las tablas de masas atómicas, o en las tablas de los excesos de masa como por ejemplo la del apéndice G. En la tabla de Mendeleiev aparece el valor ponderado de las masas atómicas de los distintos isótopos, según su abundancia, de un mismo elemento.

La gran aportación de Mendeleiev fue suponer, observando las

propiedades de los elementos conocidos, que en la tabla existían algunos huecos vacíos, de elementos aún no conocidos, pero que se descubrieron más adelante. Efectivamente, Mendeleiev predijo la existencia de tres elementos que denominóekaboro, eka-aluminio y eka-silicio (*eka* es una palabra sánscrita que significa *uno*), los cuales al ser descubiertos se denominaron escandio ${}_{21}Sc$, galio ${}_{31}Ga$ y germanio ${}^{32}Ge$, respectivamente. Sólo hay 2 elementos con $Z < 82$ que no tienen ningún isótopo estable; el tecnecio ${}^{43}Tc$ y el prometio ${}^{61}Pm$, elementos que aparecen en la tabla con un símbolo que recuerda que son radiactivos (es decir, inestables).



Índice de figuras

1.1 Sección eficaz diferencial de Rutherford
1.2 Distribución de carga de Saxon–Woods
1.3 Densidad de carga de varios núcleos. 28
1.4 Desplazamiento isotópico de rayos X en el Hg
1.5 Rotura de la curva de Rutherford
1.6 Espectroscopio de masas
1.7 La parábola de Thomson
1.8 Reacción nuclear $a + A \rightarrow b + B$
1.9 Abundancia de elementos
1.10 Curva de energía de ligadura por nucleón
1.11 Carta de Segré
1.12 Parábola de masas
1.13 Momentos cuadrupolares eléctricos nucleares
1.14 Niveles nucleares de núcleos espejo
1.15 Isóbaros con $A = 33$
2.1 Efectos de fuerzas tensoriales
2.2 Pozo cuadrado de potencial
2.3 Función de ondas radial del deuterón
2.4 Desfasajes de la interacción pp
2.5 Sección eficaz de difusión n + p a bajaenergía
2.6 Diagrama de intercambio de π de Yukawa
2.7 Potencial fenomenológico nuclear

2.8 Potencial de pozo cuadrado
3.1 Pozo nuclear en el modelo del gas de Fermi
3.2 Energía de apareamiento para n y p en núcleos par–par
3.3 Energía de niveles nucleares 2^+ en núcleos par–par
3.4 Distribución del cociente $R = \frac{E(4^+)}{E(2^+)}$ en núcleos par–par
3.5 Esquema de los modos vibracionales de los núcleos
3.6 Esquema de niveles vibracionales del Cd-118
3.7 Sistema de referencia del elipsoide
3.8 Esquema de niveles rotacionales del U-238
3.9 Espectro de energías α para isótopos del $_{86}$Rn
3.10 Potencial de Fermi o de Saxon–Woods
3.11 Niveles del modelo de capas esférico con acoplamiento $\ell \cdot s$
3.12 Niveles nucleares en el modelo de capas
3.13 Las líneas de Schmidt
3.14 Distribución de valores del momento cuadrupolar
3.15 Fotografía de una emulsión que registróel hipernúcleo ^{8}Be
3.16 Niveles de Nilsson en núcleos deformados
3.17 Diagrama de llenado de nucleones en las cercanías del ^{207}Pb
4.1 Vista aérea del CERN y el LHC
4.2 Parámetros de la superconductividad
4.3 Enfriamiento estocástico
4.4 La carta de Livingston
4.5 Acelerador Cockroft–Walton
4.6 Acelerador Van de Graaf
4.7 Acelerador lineal
4.8 Estabilidad de fase
4.9 El ciclotrón
4.10 Imanes dipolares y cuadrupolares
4.11 Luz sincrotrón
4.12 Aceleradores del CERN

4.13 El colisionador SLC de SLAC
5.1 Colisión entre partículas $a + X \rightarrow b + Y$
5.2 Parámetro de impacto b yángulo de difusión θ
5.3 Interpretación ondulatoria de una colisión por un potencial
5.4 Definición de momento transferido
5.5 Sección eficaz de difusión n + p a bajaenergía
5.6 Secciones eficaces totales con protones
5.7 Secciones eficaces protón+protón
5.8 Secciones eficaces totales π^+ + p
5.9 Haz de fotones
5.10 Sección eficaz de fotoproducción de hadrones
5.11 Parámetro de impacto
5.12 La curva de Bethe-Bloch
5.13 Mínimo de la curva de Bethe-Bloch
5.14 Curva de transmisión
5.15 La curva de Bragg
5.16 Trayectoria con difusión múltiple
5.17 Poder frenante para electrones
5.18 Alcance para electrones
5.19 Alcance para electrones
5.20 Poder frenante de muones en cobre
5.21 Colisión Compton
5.22 Espectro Compton
5.23 Coeficiente de absorción
5.24 Coeficiente de atenuación másico
5.25 Esquema del efecto Cherenkov
5.26 Esquema de detector umbral y diferencial
5.27 Experimento de Chamberlain *et al.*,
5.28 Tiempo de vuelo para π y p
5.29 Diagrama del dispositivo para la detección de partículas α
6.1 Espectro del efecto Comptom

6.2 Resolución energética de un detector

6.3 Resolución energética de un detector

6.4 Eficiencia geométrica de un detector

6.5 Modelo de un contador gaseoso

6.6 La curva de Montgomery

6.7 Emisión de luz de centelleo

6.8 Contador de centelleo

6.9 Pulso electrónico

6.10 Medida de la resolución temporal de un centelleador

6.11 Método de medida del tiempo de vuelo (TOF)

6.12 Espectros de fuentes radiactivas Cd, Ba, Cs, Eu, Tl, Bi y Th

6.13 Espectros de fuentes radiactivas de Co

6.14 Estructura de bandas del semiconductor

6.15 Detector de estado sólido

6.16 Carga y potencial en la unión $p - n$

6.17 Ángulo umbral de reflexión total

7.1 La distribución uniforme

7.2 La distribución de Poisson

7.3 La distribución de Gauss

7.4 Límite crítico y límite de detección

8.1 Esquemas de desintegración nuclear α, $\beta^{\pm}$, CE y γ

8.2 Serie radiactiva del ^{238}U

8.3 Ley de evolución de cadenas radiactivas

8.4 Radiactividad por bombardeo artificial

8.5 Datación de la Tierra por el método Rb-Sr

8.6 Desintegración de la serie radiactiva del uranio

8.7 Esquema de desintegración del ^{40}K

8.8 Curva del alcance R en función de la energía E

8.9 Cadena radiactiva para la serie del ^{133}Sb

9.1 Desintegración alfa del ^{228}Th

9.2 La regla de Geiger–Nuttall

9.3 Potencial del Modelo de Gamow
9.4 Verificación de la Regla de Geiger–Nuttall
9.5 Estructura fina en la desintegración alfa
9.6 Ejemplos de barreras de potencial
9.7 Esquema de desintegración α del ^{244}Cm
9.8 Esquema de desintegración β retrasada del ^{20}Na
9.9 Esquema de desintegración β retrasada del ^{8}Li
10.1 Espectro de la desintegración β
10.2 Diagramas de Feynman para la desintegración β^+ del quark d
10.3 Esquema de desintegración del núcleo ^{40}K
10.4 Tipos de desintegración del neutrón
10.5 Plot de Kurie
10.6 Medidas de la masa del neutrino
10.7 Valores de la integral de Fermi
10.8 Distribución de valores de log $ft_{1/2}$
10.9 Experimento de Reines y Cowan
10.10 Desintegración beta del ^{60}Co
10.11 Desintegración doble beta del ^{82}Se→ ^{82}Kr
10.12 Desintegración β^+ del ^{14}O
10.13 Desintegración β^+ retrasada en el ^{17}Ne
10.14 Niveles del ^{7}Be y ^{7}Li
11.1 Desintegración γ
11.2 Semiperiodos calculados por los estimadores de Weisskopf
11.3 Ejemplo de isómero en el núcleo ^{108}Ag
11.4 Esquema de niveles del ^{190}Hg
11.5 Esquemas de desintegración γ de ^{198}Hg, ^{203}Tℓ, ^{191}Ir y ^{57}Fe
11.6 Esquema de desintegración del ^{60}Co
11.7 Diagrama de desintegración γ del ^{72}Ge
11.8 Perfil energético del fenómeno de la autoabsorción
11.9 Experimento de Mössbauer
11.10 Transiciones electromagnéticas del ^{12}C

11.11 Niveles nucleares del ^{57}Fe
12.1 Reacción nuclear $a + X \rightarrow b + Y$ en el sistema laboratorio
12.2 Transformación entre sistemas
12.3 Esquema de estudio de reacciones
12.4 Diagrama de niveles de energía para el ^{14}N
13.1 Variación de la energía potencial con la deformación nuclear
13.2 Semiperiodo de fisión espontánea en función de Z^2/A
13.3 Sección eficaz de fisión para el U
13.4 Esquema de desintegración del $^{93}Rb \rightarrow {}^{93}Sr$
13.5 Esquema de un reactor de fisión de tipo BWR
13.6 Producción por paises de electricidad nuclear
13.7 Producción por fisión del isótopo ^{135}Xe
14.1 La evolución del universo según la teoría del *big–bang*
14.2 Las medidas de la velocidad de expansión de las galaxias
14.3 Radiación de fondo del universo
14.4 Esquema energético de niveles del núcleo ^{12}C
14.5 Espectro de neutrinos solares
14.6 Sección eficaz de fusión D-T y D-D
14.7 Pico Gamow del ritmo $< \sigma v >$
14.8 Pérdidas por *bremstrahlung* en el plasma
15.1 Esquema del experimento de Thomson
15.2 Experimento de Rutherford
15.3 Fotografía del positrón en una cámara de niebla
15.4 El pión en emulsión fotográfica
15.5 Fotografía del suceso de corriente neutra
15.6 Diagrama de intercambio de π de Yukawa
15.7 Diagramas de Feynman, convenio de líneas
15.8 Diagramas de Feynman básicos de la electrodinámica cuántica
15.9 Diagrama de Feynman de la difusión elástica $e^- e^-$
15.10 Diagramas de Feynman para $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$
15.11 Autoacoplos de los campos *gauge* no abelianos

15.12 Diagrama de Feynman para la desintegración beta del neutrón
15.13 Diagramas de Feynman de intercambio de $W^{\pm}$
15.14 Diagrama de Feynman de la interacción *qq* g de la teoría QCD
15.15 Diagramas de Feynman básicos de QCD
15.16 Diagramas de producción del bosón de Higgs
15.17 W-*strahlung* del Higgs
15.18 Desintegración del Higgs
15.19 Desintegración del Higgs (2) 535
15.20 Sucesos $H \rightarrow \gamma + \gamma$
15.21 Cocientes de desintegración del Higgs
15.22 Diagramas de quarks del sistema $\Delta(1232)$
15.23 Diagrama de quarks de la interacción $\pi^- p$
15.24 Medidas de α_s en función de Q
15.25 Evolución de los acoplamientos *gauge* en función de Q
16.1 Sistemas inerciales de coordenadas
16.2 La colisión $\pi^- + p \rightarrow m_1 + m_2$
16.3 Desintegración $M \rightarrow m_1 + m_2$
16.4 Desintegración a tres cuerpos
16.5 Colisión con dos cuerpos
16.6 Definición de los momentos angulares
16.7 Espectro de momentos del electrón
16.8 Verificación de la simetría T
16.9 Oscilaciones $K^0\overline{K}^0$
16.10 Oscilaciones de extra˜neza
17.1 Representación fundamental del modelo SU(3) de quarks
17.2 Técnica gráfica del producto $3 \otimes \overline{3}$
17.3 Multipletes de SU(3) 600
17.4 El hiperón Ω^-
17.5 Diagrama de Feynman de la desintegración del π^0
17.6 Octetes $J^p = 0^-, 1^-$ de SU(3)
17.7 Mecanismo de producción de los mesones vectoriales

17.8 Descubrimiento del mesón J/ψ

17.9 Descubrimiento del mesón Υ

17.10 Los tres mesones Υ

17.11 Umbrales energéticos

17.12 La regla de OZI

17.13 Diagrama de la desintegración leptónica $V \rightarrow e^+e^-$

17.14 Diagrama de Feynman de $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

17.15 Sección eficaz $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

17.16 Sección eficaz de producción de hadrones

17.17 Cociente *R* entre secciones eficaces

17.18 Espectro de masas $\mu^+ \mu^-$ en ATLAS

17.19 Representación fundamental de SU(4)

17.20 Multipletes de SU(4)

17.21 Multipletes de bariones en SU(4)

17.22 El positronio y el charmonio

17.23 Potencial de QCD

17.24 Aniquilación del charmonio

17.25 Desintegración del charmonio

18.1 Cociente de secciones eficaces

18.2 Experimento de los dos neutrinos

18.3 Diagramas de desintegración β^-

18.4 Diagrama de Feynman del intercambio de $W^{\pm}$

18.5 Violación de la paridad en la desintegración del $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$

18.6 La desintegración beta+ del $^{152}Eu \rightarrow {}^{152}Sm$

18.7 La desintegración del $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$

18.8 Desintegración del neutrón y del Λ^0

18.9 Desintegración del K^0

18.10 Esquema del haz de neutrinos del CERN

18.11 Sección eficaz total de interacción $\nu_\mu N$ y $\overline{\nu}_\mu N$

18.12 Interacción $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- + X$

18.13 Diagramas de Feynman de neutrino electrón
18.14 La interacción débil elástica $\overline{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \overline{\nu}_\mu + e^-$
18.15 Producción del bosón intermediario W^+
18.16 Distribución del momento faltante p_t
18.17 Curva de producción del bosón Z^0 en el experimento DELPHI

Bibliografía

[1] **W. E. Burcham y M. Jobes.** *Nuclear and Particle Physics.* Longman Scientific & Technical, Londres, 1995.

[2] **B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche.** *Particles and Nuclei.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[3] **W. S. C. Williams.** *Nuclear and Particle Physics.* Oxford Science Publications, New York, 1992.

Estos tres primeros textos, tienen un contenido suficientemente amplio como para servir de libros de introducción a la física nuclear y de partículas.

Las referencias que siguen, pueden utilizarse como ampliación de la parte dedicada a la física nuclear.

[4] **J. M. Eisenberg and W. Greiner.** *Nuclear Theory, 3 Vols.* North Holland, New York, 1987.

[5] **A. Ferrer y J. A. Valls.** *Problemas resueltos de Física nuclear.* Publicacions de la Universitat de València, 2014. http://puv.uv.es

[6] **P. E. Hodgson, E. Gadioli and E. Gadioli Erba.** *Introductory Nuclear Physics.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[7] **K. S. Krane.** *Introductory Nuclear Physics.* Wiley, New York, 1988.

[8] **J. S. Lilley.** *Nuclear Physics.* Wiley, Chichester, 2006.

[9] **S. S. M. Wong.** *Introductory Nuclear Physics.* Prentice Hall, New Jersey, 1990.

Las referencias que aparecen a continuación son buenos textos para ampliar la parte que concierne la física de partículas.

[10] **A. Bettini.** *Introduction to Elementary Particle Physics.* Second Edition. Cambridge University Press, 2014.

[11] **G. D. Caughlan, J. E. Dodd and B. M. Gripaios.** *The Ideas of Particle Physics.* Cambridge University Press, 2006.

[12] **A. Ferrer y E. Ros.** F *ísica de Partículas y de Astropartículas.* Segunda Edición. Universidad de Valencia, 2014. http://puv.uv.es

[13] **A. Ferrer Soria y E. Ros Martínez.** *Problemas resueltos de Física de partículas.*
Publicacions de la Universitat de València, 2007. http://puv.uv.es

[14] **D. Griffiths.** *Introduction to Elementary Particles.* Wiley, New York, 1987.

[15] **F. Halzen and A. D. Martin.** *Quarks and Leptons.* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[16] **B. R. Martin and G. Shaw.** *Particle Physics.* John Wiley & Sons, New York, 1992.

[17] **D. H. Perkins.** *Introduction to High Energy Physics.* Cambridge University Press, 2000.

Porúltimo, se recogen varias referencias a textos especializados en técnicas experimentales en física nuclear y de partículas. En particular, sobre la medida y detección de la radiación.

[18] **R. J. Barlow.** *Statistics.*
Wiley, Chichester, 1989.

[19] **R. C. Fernow.** *Introduction to experimental particle physics.*
Cambridge University Press, 1986.

[20] **G. F. Knoll.** *Radiation detection and measurement.* Wiley, New York, 1989.

[21] **W. R. Leo.** *Techniques for Nuclear and Particle Physics experiments.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[22] **N. Tsoulfanidis.** *Measurement and Detection of Radiation.* Taylor & Francis Ltd., London, 1995.

Índice analítico

absorción resonante, 409
aceptancia, 233
actividad, 293, 317
    específica, 294, 317
ADA, 159
AGS, 503, 650
ajustes de funciones, 281
ALBA, 158
albedo, 202
alcance efectivo, 79
ALEPH, 512, 681
Alvarez, L., 153
anchura intrínseca, 298
Anderson, C. D., 500
angström (unidad), 14
ángulo
    de Cabibbo, 378, 664
    de Weinberg, 673, 680
antipartículas, 508
armónicos esféricos, 715
Aston, Francis W., 36
atenuación
    de fotones, 211, 330

ley de, 172
ATLAS, 631
átomo muónico, 30
autoabsorción, 408
avalancha, 238
Avogadro (número), 170, 186, 294, 317, 688

backscattering, 232
Bahcall, J., 476
balance detallado, 575
barión, 515, 592, 598
multipletes de, 599
barn (unidad), 171
barrera centrífuga, 346
Bateman (ecuaciones), 304
becquerel (unidad), 294, 317
Becquerel, H., 498
Bethe-Bloch (fórmula), 188
big–bang, 466
blindajes, 329
para neutrones, 330
Bohr, A., 105
Bohr, N., 427
radio de, 29
Born, aproximación de, 175
bosón, 509
$W^{\pm}$, 520, 653, 674, 679
Z^{0}, 520, 653, 674, 683
de Brout-Englert-Higgs, 505, 538
intermediario, 520, 533, 653, 673, 674
vectorial, 616
bottomonio, 504, 636
Bragg (curva), 193

Bragg-Kleeman (ley), 193
Breit–Wigner (fórmula), 428
bremsstrahlung, 196

Cabibbo, N., 378, 529, 661–666, 679
Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (matriz), 666
cadenas radiactivas, 303
cámara
    de burbujas, 226, 503
    de chispas, 226
    de ionización, 237
    de niebla, 226, 292, 501
    proporcional, 237
Canfranc, 386
captura electrónica, 359, 362, 374
carga nuclear, 23
CDF, 642
centelleador, 241–242
centro de masas, 422
CERN, 161, 361, 425, 497, 503, 505, 512, 520, 527, 625, 653, 668, 669, 671, 675, 677
CESR, 161, 620
Chadwick, J., 22, 419, 500
Chamberlain, O., 217
charmonio, 504, 622, 636
Cherenkov (efecto), 213
chiralidad, 713
ciclotrón, 155
CKM, matriz de mezcla, 666
Clebsch-Gordan, 717
CLEO, 620
CMS, 631
CNGS, 496

COBE, 470
cociente de desintegración, 295
Cockroft–Walton, 150, 419
coeficiente
    de absorción, 172, 211
    de absorción másico, 212
    de atenuación, 201, 330
    de conversión interna, 404
    de correlación lineal, 267
coincidencia α–γ, 352
colisionador, 159
    de iones, 162
    lineal, 163
confianza
    intervalo de, 272
    nivel de, 274
configuración, 125
confinamiento
    inercial, 484
    magnético, 484
constante
    solar, 472
    de acoplamiento, 520, 521
        débil, 527
        electromagnética, 519
        fuerte, 532
        gravitacional, 542
    de desintegración, 293
constantes físicas, 687
contador
    de centelleo, 240
    Geiger–Müller, 235, 237
Conversi, M., 502

conversión interna, 400, 404
coordenadas de superficie, 103
corrientes
    cargadas, 361, 503, 669
    neutras, 361, 503, 652, 671
covarianza, 267
Cowan, C. L., 381, 502, 649
creación de pares, 209
    longitud de, 212
cuadrivector
    contravariante, 549
    covariante, 549
cuerpo negro, 469
Curie
    Joliot e Irene, 419
    Pierre y Marie, 292
curio (unidad), 294, 317
CUSB, 620

D–D (reacciones), 479
D–T (reacciones), 479
D0, 642
Dalitz (plot de), 557
Darriulat, P., 361, 653
datación, 311
Davis, R., 477
De Broglie, L., 25, 32, 96, 495
defecto de masa, 35
DELPHI, 512, 681, 682
desfasajes, 77
desplazamiento hacia el rojo, 412
desviación estándar, 267
detectores

de centelleo, 239
de estado sólido, 250
de gas, 235
de neutrones, 255
deuterón, 65–77
foto-disociación del, 66
función de ondas del, 75
por captura radiativa, 66
propiedades, 66
deuterio, 20, 467, 474, 479
difusión múltiple, 195
Dirac, P. A. M.
biespinores, 656, 711
ecuación de, 508, 656, 711
matrices de, 712
momento magnético, 508
distribución
χ^2, 273
t de Student, 279
de Poisson, 269
normal o de Gauss, 271
uniforme, 268
dosis, 323
absorbida, 317, 318
equivalente, 317, 320
letal, 324

efecto
Compton, 206, 318
fotoeléctrico, 205, 318
Mössbauer, 408
túnel, 343
eficiencia

de un detector, 231
geométrica, 231
intrínseca, 231
relativa, 232
total, 232
Ehrenfest (teorema de), 547
Einstein, A., 84, 206, 500, 518
fórmula de, 494
electrón, 512
Auger, 206
emitancia, 160
emulsión nuclear, 134
energía
crítica, 201
de apareamiento, 45
de ligadura, 41, 44, 66
de separación, 44
enfriamiento estocástico, 149
equilibrio
radiactivo, 305
secular, 305
error
estadístico, 264
propagación de, 275
sistemático, 264
espín isotópico, 52
espacio fásico, 555
espectros
rotacionales, 112, 352
vibracionales, 106
espectroscopía
alfa, 350
beta, 384

de hadrones, 593
de masas, 35
gamma, 58, 108, 407
espectroscopio, 35
ESS, 154
estabilidad de fase, 148
excentricidad, 57
exposición a rayos X, 318

factor
g de espín, 54
g nuclear, 55
de forma, 25, 26, 526
del protón, 27
de multiplicación infinito, 449
giromagnético, 54, 508, 613
FCNC, 666
fermi (unidad), 14
Fermi, E., 437, 484, 527
captura neutrónica, 420
conexión espín-estadística, 509
constante de, 361
distribución de, 24, 34
función de, 368
modelo del gas de, 97
momento de, 95, 98
potencial de, 121
regla de oro de, 176, 364, 396
relativista, 554
transiciones de, 366
fermión, 509
Fermilab, 497
Feynman, R.

diagramas de, 521
fisión, 438–456
barrera de, 439
factor de reproducción, 448
inducida, 441
reactores de, 454
focalización fuerte, 148
FODO, 157
fonón, 104, 105
fórmula
de Bethe-Weisz¨acker, 46
de Breit-Wigner, 298, 408, 617, 676, 680
de Kelson–Garvey, 47
de los cuatro factores, 449
de Van Royen-Weisskopf, 623
semiempírica de masas, 45
fotocátodo, 243
fotomultiplicador, 243
fotones
alcance de, 212
atenuación de, 211
coeficiente de absorción de, 211
longitud de conversión de, 212
fotopico, 206
fragmentación, 642, 668
Frank, I. M., 214
Fraunhofer, J., 25
Friedman, J., 503
fuentes radiactivas
α, 299
β, 301
γ, 302
fuerza de apareamiento, 45, 100

función error, 229, 272
función respuesta, 227
fusión, 478
    solar, 466
FWHM, 230, 271

Gamow
    factor de, 346, 347, 480
    modelo de, 343–350
Gamow–Teller
    transiciones de, 366
ganancia
    de un detector, 237
    de un fotomultiplicador, 235, 244
    en neutrones, 450
Geiger–Nuttall
    regla de, 342
Gell-Mann, M., 503, 516
Glashow, S., 504, 527, 672–680
glueball, 634
gluón, 514
Gosset, W., 279
gran unificación, 539
Green, función de, 174

hadrón, 502
hadrones, 591–622
Hahn, O., 438
Heisenberg, W., 494
    principio de incertidumbre, 494
    representación de, 547
helicidad, 88, 571, 712, 714
helio, 339, 567

Helmholtz, ecuación de, 174
Hess, V. F., 495
Higgs, P. W.
    bosón de, 505, 538, 625
    mecanismo de, 506
hipercarga, 516, 593
    débil, 680
hipernúcleos, 131
Hubble, E., 466
    constante de, 468
    ley de, 468

IAS, 58
Iliopoulos, J., 504
ILL, 39
imán
    cuadrupolar, 157
    dipolar, 157
IMB, 541
independencia de carga, 80
interacción espín–órbita, 122
invariancia *gauge*, 546, 584
ionización específica, 193
isla de estabilidad, 123
isóbaro, 20
isómeros, 300
isospín, 21, 52
isótono, 20
isótopo, 20
ITER, 466, 486

Jensen, J. H., 122
JET, 486

jets, 505, 642
Joliot-Curie, I. y F., 293

KAMIOKANDE, 477, 541
KATRIN, 372
Kendall, H., 503
klystron, 148
Kurie (plot de), 369–372

L3, 512, 681
Lagrange
    fórmula de interpolación, 285
Landé(fórmula de), 72, 127, 718
Larmor (fórmula de), 197
Lattes, C. M. G., 502
Lawrence, E. O., 153, 155, 217
Lawson
    criterio de, 485
Lederman, L., 503, 650
Lee, T. D., 383, 654
LEP, 161
leptones, 506, 514
    familias de, 514, 648
leyes de conservación, 545, 585
LHC, 161, 506
límite
    de Chandrasekar, 475
    crítico, 283
    de detección, 284
    superior, 282
litio, 484
longitud
    de absorción, 172

de colisión, 172, 759
de conversión, 212
de creación de pares, 212
de difusión, 79
de onda Compton, 207
de radiación, 196, 199
luminosidad, 160
luminosidad solar, 472

Maiani, L., 504
MAINZ, 372
Mandelstam (variables de), 524, 557
masa efectiva, 550, 555
materia
nuclear, 32
oscura, 471
máxima verosimilitud, 275
Mayer, M. G., 122
McMillan, E., 217
mecanismo de GIM, 664
media, 267
Meitner, Lisa, 438
Mendeleiev (tabla), 761
mesón, 501, 515, 592, 598
masas de, 609
multipletes de, 605
pesado, 616
pseudoescalar, 605
vectorial, 607, 623
Millikan, R., 499
mínimos cuadrados, 280
modelo
de capas, 116

de Gamow, 343
de la gota líquida, 97
de quarks, 591
del gas de Fermi, 95, 98
estándar, 493
OPEP, 88
rotacional, 110
semiclásico, 97
vibracional, 103
momento
cuadrupolar eléctrico, 55
de inercia, 112
dipolar magnético, 53, 508, 614
monocromadores, 159
Montgomery (curva de), 235
Mott (fórmula de), 194
Mottelson, B., 105
Muirhead, H., 502
muón, 502, 512, 648

NA14, 183
Neeman, Y., 503
neutrinos
atmosféricos, 478
familias de, 497, 514, 648
solares, 475
neutrones
moderación, 446
térmicos, 441
Newton, I., 494
nivel de confianza, 282, 283
Noether, E., 545
núcleo compuesto, 425

núcleos espejo, 31, 52, 58
nucleosíntesis, 466–467
número
    bariónico, 420, 516, 592
    leptónico, 514, 649
    mágico, 121

oblato (núcleo), 74
Occhialini, G. P. S., 502
OPAL, 512, 681
oscilaciones
    betatrón, 156
    sincrotrón, 154
oscilador armónico, 119
OZI (regla de), 623

Pancini, E., 502
parábola
    de masas, 48
    de Thomson, 36
parámetro de deformación, 57, 113
paralaje, 468
paridad, 375, 401
    de partículas, 568
    de núcleos, 51
    violación de la, 383
partícula virtual, 521
partones, 182, 668
Pauli, W., 43, 46, 84, 86, 98, 116
    hipótesis del neutrino de, 360, 502
    matrices de, 563, 712
    principio de exclusión de, 67, 510, 567
Penzias, A., 469

PEP-II, 161
Perl, M., 381, 504
Perrin, F., 498
pión, 519
Piccioni, O., 502
Planck, M.
    masa de, 542
poder frenante, 188
polarización, 571, 655, 711
Pomeron, 178
positrón, 500
positronio, 201, 635
postulado de simetrización, 510
potencial
    medio de excitación, 188
    de Yukawa, 85
    OPEP, 84
Powell, C. F., 501
prolato (núcleo), 74
propagador, 521

QCD, 531
QED, 522
quarkonio, 636
quarks, 506, 512
    color de los, 514, 601
    confinamiento de los, 532, 593
    familias de los, 512, 666
    fragmentación de, 642
    interacción hiperfina entre, 611
    números cuánticos de los, 593
    sabor de los, 512

radio
    clásico del electrón, 172, 206, 688
    del protón, 27
radiocarbono, 311
rayos
    catódicos, 496
    cósmicos, 315, 478
    del berilio, 23
    X delacapaK, 29
reactividad, 452
recombinación, 236
recorrido libre medio, 172
Reines, F., 381, 502, 649
relación alcance-energía, 190
residuos radiactivos, 456
resolución energética, 229
resonancia, 408, 428, 516, 676
retrodifusión, 202
Richter, B., 503, 616
Röntgen, W. C., 498
Rossi–Greisen (ecuación de), 196
Rubbia, C., 361, 653, 675
ruido
    carga equivalente al (*ENC*), 255
    de fondo, 233
Rutherford, E., 22, 292, 419
    difusión de, 525
    fórmula de, 194
    sección eficaz de, 426, 526

Sakharov, A., 484
Salam, A., 527, 672–680
Sargent (regla de), 374

Saxon–Woods
distribución de, 24
potencial de, 121
Schmidt (líneas de), 127
Schrödinger, E.
ecuación de, 50, 58, 96, 119, 546
Schwartz, M., 650
sección eficaz, 170–183
de colisión, 425
diferencial, 170
elástica, 425
macroscópica, 448
total, 425
Segrè, E., 217
semiconductores, 251
potencial de polarización, 254
zona desierta, 252
semiperiodo, 294
semivida, 294
comparativa, 374
parcial, 295
simetría, 585
C, conjugación de carga, 572–573
CPT, 577
P, paridad, 568–572
T, inversión temporal, 574–577
de carga, 80
sincrotrón, 156
sistemas de coordenadas, 422, 551
sistemas inerciales, 547
SLC, 161
Sloan, D. H., 153
SNU, 476

Soddy, F., 292
SPEAR, 159
$S\overline{p}pS$ S, 161
Steinberger, J., 650
STP, 192, 318
Strassmann, F., 438
SU(2), 563
SU(3), 503, 595
SU(4), 632
SU(5), 633
SUDAN, 496
superconductividad, 149
supernova
    SN1987A, 476
    SN1987B, 475

Tamm, I. Y., 214
tandem, 151
tasa de exposición, 321
tauón, 382, 512, 648
Taylor, R., 503
tensor métrico, 549
tensores esféricos, 716
Tevatrón, 161, 497
Thomson, J. J., 498
    sección eficaz de, 172
tiempo
    de respuesta, 231
    de vuelo, 245
    muerto, 234
Ting, S. S. C., 503, 616
TOF, 245
tritio, 20, 65, 303, 311, 371, 479, 484

TROITSK, 372

UA1, 361
UA2, 361
unión p–n, 252
unidad de masa atómica, 34, 499
universalidad e − μ − τ, 678

valle de la estabilidad, 43
valor Q de una reacción, 38
Van de Graaff, 150
Van der Meer, S., 150, 675
varianza, 267
velocidad de deriva, 238
vibraciones nucleares
    β, 115
    γ, 115
vida media, 294
Villard, P., 292

WA4, 183
Weinberg, S., 527, 672–680
Weisskopf, V., 429
    estimadores de, 397–402
Widerö, R., 153
Wiegand, E., 217
Wien, W., 498
Wilson, C. T. R., 501
Wilson, R., 469
Wu, C. S., 383, 654

Yang, C. N., 383, 654
Ypsilantis, T., 217
Yukawa, H., 75, 80, 361, 501–518, 648, 653

potencial de, 85, 519

zircaloy, 446
Zweig, G., 503